**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH NGHỆ AN**

**MÔN TOÁN 9 NĂM HỌC 2023-2024**

**Câu 1.**

1. Cho a, b là các số tự nhiên lẻ và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $a^{2}-b^{2}$ chia hết cho 24.
2. Tìm tất cả các số nguyên dương n để $9n^{2}+6n-35$ là số nguyên tố.

**Câu 2.**

1. Giải phương trình $3x+1=\sqrt{8x+1}+\sqrt{2x-1}.$
2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{2}y^{2}+2xy+1=7x+9\\x\left(y-x\right)=2\end{array}\right.$

**Câu 3.**

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn x + 3y + 2z = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $ P=\frac{x^{2}+9y^{2}}{xy+1}+z\left(z^{2}-8z+17\right).$

**Câu 4.**

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O,R). Trên cung BC không chưa điểm A lấy điểm M bất kì (M không trùng với B và C).

1. Chứng minh MA = MB + MC.
2. Gọi D là giao điểm của AM và BC. Chứng minh $\frac{MD}{MB}+\frac{MD}{MC}=1.$
3. Xác định vị trí của M để tổng: $\frac{12}{MA}+\frac{2}{MD}+2023\left(\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 5.**

Trên một khu đất hình chữ nhật kích thước 100m x 120m. Người ta muốn xây một sân bóng nhân tạo có nền đất là hình chữ nhật kích thước 25m x 35m và 9 bồn hoa hình tròn đường kính 5m. Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở các vị trí như thế nào thì trên phần đất còn lại luôn tìm được một nền đất kích thước 25m x 35m để xây sân bóng.

***Lời giải.***

**Câu 1.**

+ Do $\left\{\begin{array}{c}a không chia hết cho 3\\b không chia hết cho 3\end{array}⟹\left\{\begin{array}{c}a^{2}≡1(mod3)\\b^{2}≡1(mod3)\end{array}⟹a^{2}-b^{2}\vdots 3\right. \right.$ (1)

+ Do a không chia hết cho 2 $⟹\left\{\begin{array}{c}a-1\vdots 2\\a+1\vdots 4\end{array}⟹a^{2}-1\vdots 8\right.$, do a – 1 và a + 1 là hai số chẵn liên tiếp.

+ Tương tự $b^{2}-1\vdots 8$

Do đó $a^{2}-b^{2}=\left(a^{2}-1\right)-\left(b^{2}-1\right)\vdots 8$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $a^{2}-b^{2}\vdots 24$.

1. Ta có $9n^{2}+6n-35=\left(9n^{2}+6n+1\right)-36=\left(3n+1\right)^{2}-36$

$$=\left(3n+1-6\right)\left(3n+1+6\right)=(3n-5)(3n+7)$$

Lại có 3n – 5 < 3n + 7, $∀n$

Suy ra $9n^{2}+6n-35$ là số nguyên tố thì 3n – 5 = 1 $⟺n=2$

Thử lại ta thấy n = 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 2.**

1. Điều kiện $x\geq \frac{1}{2}.$ Phương trình đã cho

$⟺6x+2=2\left(\sqrt{8x+1}+\sqrt{2x-1}\right)$.

Đặt $\left\{\begin{array}{c}a=\sqrt{8x+1}\\b=\sqrt{2x-1}\end{array}\left(a>0,b\geq 0\right)\right.$

$$⟹6x+2=\left(8x+1\right)-\left(2x-1\right)=a^{2}-b^{2}$$

Phương trình trên trở thành: $a^{2}-b^{2}=2(a+b)$

$$⟺\left(a+b\right)\left(a-b-2\right)=0⟺a-b-2=0, do a+b>0$$

$$Với a-b=2⟹\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-1}=2$$

$$⟺\sqrt{8x+1}=2+\sqrt{2x-1}⟺8x+1=\left(2+\sqrt{2x-1}\right)^{2}$$

$$⟺3x-1=2\sqrt{2x-1}⟺\left\{\begin{array}{c}3x-1\geq 0\\\left(3x-1\right)^{2}=4(2x-1)\end{array}\right.$$

$$⟺\left\{\begin{array}{c}x\geq \frac{1}{3}\\9x^{2}-14x+5=0\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}x=1\\x=\frac{5}{9}\end{array}.\right.\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm x = 1, x = $\frac{5}{9}.$

1. Hệ phương trình đã cho tương đương với $\left\{\begin{array}{c}\left(xy+1\right)^{2}=7x+9 (1)\\xy=x^{2}+2 (2)\end{array}\right.$

Thay (2) vào (1) ta có: $\left(x^{2}+3\right)^{2}=7x+9⟺x^{4}+6x^{2}-7x=0$

$$⟺x\left(x^{3}+6x-7\right)=0$$

$$⟺x\left(x-1\right)\left(x^{2}+x+7\right)=0⟺\left[\left.\begin{array}{c}x=0\\x=1\end{array}\right.\right.$$

Thay vào (2) ta thấy:

Khi x = 0 $⟹0y=3$ (không thỏa mãn).

Khi x = 1 $⟹y=3$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là (x;y) = (1;3).

**Câu 3.**

Ta có: $x+3y+2z=3⟹x+3y=3-2z⟹3-2z\geq 0⟹z\leq \frac{3}{2}$

Lại có $\frac{x^{2}+9y^{2}}{xy+1}=\frac{x^{2}+9y^{2}}{xy+1}+6-6=\frac{x^{2}+9y^{2}+6xy+6}{xy+1}-6=\frac{\left(x+3y\right)^{2}+6}{xy+1}-6$

$$\leq \frac{\left(3-2z\right)^{2}+6}{1}-6, do \left\{\begin{array}{c}x+3y=3-2z\\xy\geq 0\end{array}\right.$$

Khi đó, $P\leq \left(3-2z\right)^{2}+z^{3}-8z^{2}+17z=z^{3}-4z^{2}+5z+9$

$=\left(z^{2}-2z+1\right)\left(z-2\right)+11=11+\left(z-1\right)^{2}\left(z-2\right)\leq 11, do z-2<0$,

$$∀0\leq z\leq \frac{3}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra $⟺$ z = 1.

Vậy max P = 11 $⟺$ (x;y;z) = $\left(0;\frac{1}{3};1\right) $hoặc (x;y;z) = $\left(\frac{1}{3};0;1\right)$.

**Câu 4.**

****

1. Chứng minh MA = MB + MC

Trên đoạn AM lấy điểm E sao cho ME = MB.

Ta có: AMB = ACB = 60$°$ (cùng chắn cung AB).

Suy ra $Δ$MBE là tam giác đều $⟹$ MB = BE (1)

Xét $ΔEBA$ và $ΔMBC$ có:

MB = BE; AB = AC, BCM = BAE (cùng chắn cung BM)

$⟹ΔEBA=ΔMBC$ (c.g.c) $⟹EA=MC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra MB + MC = ME + EA = MA.

1. Gọi B là giao điểm AM và BC. $Chứng minh \frac{MD}{MB}+\frac{MD}{MC}=1.$

Ta có ADB = CDM (đối đỉnh) và BAD = DCM (cùng chắn cung BM)

$$⟹ΔABD \~ ΔCMD\left(g.g\right)⟹\frac{MD}{CM}=\frac{BD}{AB} (3)$$

Tương tự $ΔACD \~ ΔBMD\left(g.g\right)⟹\frac{MD}{BM}=\frac{CD}{CA}$

Lại do AC = AB $⟹\frac{MD}{BM}=\frac{CD}{AC}=\frac{CD}{AB} (4)$

Cộng (3) và (4) vế theo vế ta có $\frac{MD}{CM}+\frac{MD}{BM}=\frac{BD}{AB}+\frac{CD}{AB}=\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$

1. Xác định vị trí của M để tổng: $\frac{12}{MA}+\frac{2}{MD}+2023\left(\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Từ câu b) $\frac{MD}{CM}+\frac{MD}{BM}=1⟹\frac{1}{MD}=\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\geq \frac{4}{MB+MC}$

Dấu bằng xảy ra khi MB = MC (5)

Khi đó $\frac{12}{MA}+\frac{2}{MD}+2023\left(\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)=\frac{12}{MA}+2\left(\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)+2023\left(\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)$

$$=\frac{12}{MA}+2025\left(\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right)$$

$\geq \frac{12}{MA}+2025\frac{4}{MB+MC}=\frac{12}{MA}+2025\frac{4}{MA}$ (do kết quả câu a: MB + MC = MA)

=$\frac{8112}{MA}\geq \frac{8112}{2R}=\frac{4056}{R}(do MA\leq 2R)$

Dấu bằng xảy ra khi MA = 2R $⟹MB=MC.$

**Câu 5.**

Ta chia mảnh đất hình chữ nhật ban đầu thành các mảnh đất hình chữ nhật nhỏ kích thước 30m x 40m (như hình vẽ). Có tất cả 10 hình chữ nhật 30m x 40m.



Theo nguyên lí Dicrichle tồn tại ít nhất một hình chữ nhật 30m x 40m không chứa tâm hình tròn nào trong 9 hình tròn nói trên. Giả sử đó là ABCD.

Ta cắt mỗi cạnh của mảnh đất ABCD này đi 2,5m được một mảnh đất mới MNPQ có:

Chiều rộng MN = 30 – 2.2,5 = 25m
Chiều dài NP = 40 – 2.2,5 = 35m
Suy ra MNPQ là mảnh đất đủ để xây sân bóng theo yêu cầu.

Như vậy trong phần đất còn lại sau khi xây 9 bồn hoa ta luôn tìm được mảnh đất có kích thước 25m x 35m để xây sân bóng.