**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH NGHỆ AN**

**MÔN TOÁN 9 NĂM HỌC 2023-2024**

**Câu 1.**

1. Cho a, b là các số tự nhiên lẻ và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng chia hết cho 24.
2. Tìm tất cả các số nguyên dương n để là số nguyên tố.

**Câu 2.**

1. Giải phương trình
2. Giải hệ phương trình

**Câu 3.**

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn x + 3y + 2z = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

**Câu 4.**

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O,R). Trên cung BC không chưa điểm A lấy điểm M bất kì (M không trùng với B và C).

1. Chứng minh MA = MB + MC.
2. Gọi D là giao điểm của AM và BC. Chứng minh
3. Xác định vị trí của M để tổng: đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 5.**

Trên một khu đất hình chữ nhật kích thước 100m x 120m. Người ta muốn xây một sân bóng nhân tạo có nền đất là hình chữ nhật kích thước 25m x 35m và 9 bồn hoa hình tròn đường kính 5m. Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở các vị trí như thế nào thì trên phần đất còn lại luôn tìm được một nền đất kích thước 25m x 35m để xây sân bóng.

***Lời giải.***

**Câu 1.**

+ Do (1)

+ Do a không chia hết cho 2 , do a – 1 và a + 1 là hai số chẵn liên tiếp.

+ Tương tự

Do đó (2)

Từ (1), (2) suy ra .

1. Ta có

Lại có 3n – 5 < 3n + 7,

Suy ra là số nguyên tố thì 3n – 5 = 1

Thử lại ta thấy n = 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 2.**

1. Điều kiện Phương trình đã cho

.

Đặt

Phương trình trên trở thành:

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm x = 1, x =

1. Hệ phương trình đã cho tương đương với

Thay (2) vào (1) ta có:

Thay vào (2) ta thấy:

Khi x = 0 (không thỏa mãn).

Khi x = 1

Vậy nghiệm của hệ đã cho là (x;y) = (1;3).

**Câu 3.**

Ta có:

Lại có

Khi đó,

,

Dấu bằng xảy ra z = 1.

Vậy max P = 11 (x;y;z) = hoặc (x;y;z) = .

**Câu 4.**

****

1. Chứng minh MA = MB + MC

Trên đoạn AM lấy điểm E sao cho ME = MB.

Ta có: AMB = ACB = 60 (cùng chắn cung AB).

Suy ra MBE là tam giác đều MB = BE (1)

Xét và có:

MB = BE; AB = AC, BCM = BAE (cùng chắn cung BM)

(c.g.c) (2)

Từ (1), (2) suy ra MB + MC = ME + EA = MA.

1. Gọi B là giao điểm AM và BC.

Ta có ADB = CDM (đối đỉnh) và BAD = DCM (cùng chắn cung BM)

Tương tự

Lại do AC = AB

Cộng (3) và (4) vế theo vế ta có

1. Xác định vị trí của M để tổng: đạt giá trị nhỏ nhất.

Từ câu b)

Dấu bằng xảy ra khi MB = MC (5)

Khi đó

(do kết quả câu a: MB + MC = MA)

=

Dấu bằng xảy ra khi MA = 2R

**Câu 5.**

Ta chia mảnh đất hình chữ nhật ban đầu thành các mảnh đất hình chữ nhật nhỏ kích thước 30m x 40m (như hình vẽ). Có tất cả 10 hình chữ nhật 30m x 40m.



Theo nguyên lí Dicrichle tồn tại ít nhất một hình chữ nhật 30m x 40m không chứa tâm hình tròn nào trong 9 hình tròn nói trên. Giả sử đó là ABCD.

Ta cắt mỗi cạnh của mảnh đất ABCD này đi 2,5m được một mảnh đất mới MNPQ có:

Chiều rộng MN = 30 – 2.2,5 = 25m  
Chiều dài NP = 40 – 2.2,5 = 35m  
Suy ra MNPQ là mảnh đất đủ để xây sân bóng theo yêu cầu.

Như vậy trong phần đất còn lại sau khi xây 9 bồn hoa ta luôn tìm được mảnh đất có kích thước 25m x 35m để xây sân bóng.