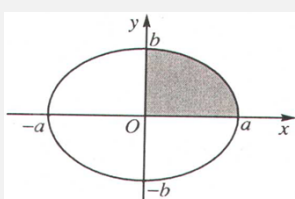
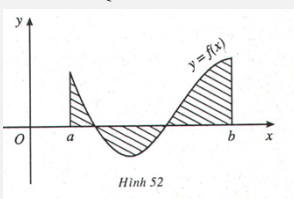
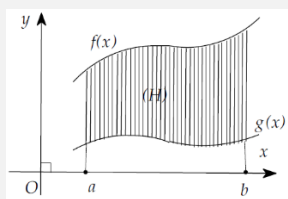


TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

① Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \\ x = a, x = b \quad (a < b) \end{cases}$ thì diện tích là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): Ox: y = 0 \\ x = a, x = b \quad (a < b) \end{cases}$ thì diện tích là $S = \int_a^b |f(x)| dx$.



$$S_{\text{elip}} = \pi ab.$$

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

② Hình thức đề thường hay cho

Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng (H): $\{y = f(x), y = g(x), x = a, x = b \quad (a < b)\}$

→ casio → $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \text{kết quả, so sánh với bốn đáp án.}$

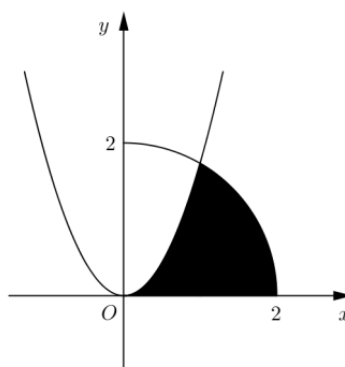
Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng (H): $\{y = f(x), y = g(x)\}$

Giải $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, \dots, x_i$, với x_1 nhỏ nhất, x_i lớn nhất → casio → $\int_{x_1}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx$.

Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xỏ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$ ta nên vẽ hình.

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2018) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$

B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$

D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

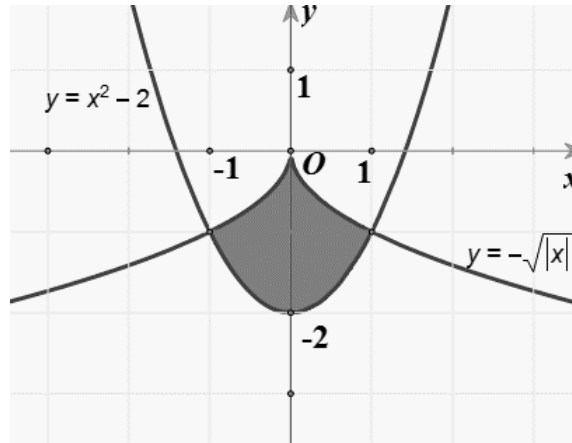
Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \pm 1$ với $0 \leq x \leq 2$ nên ta có $x = 1$

$$\text{Ta có diện tích } S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_0^1 + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$\text{Đặt: } x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$$

Câu 2. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx.$

B. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx.$

C. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx.$

D. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx.$

Lời giải

Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là:

$$\int_{-1}^1 |x^2 - 2 - (-\sqrt{|x|})| dx = \int_{-1}^1 (-\sqrt{|x|} - x^2 + 2) dx \quad (\text{vì } x \in [-1; 1] \Rightarrow -\sqrt{|x|} > x^2 - 2).$$

Câu 3. (Sở Bắc Giang 2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

A. $\frac{e^2 - 1}{2}.$

B. $\frac{e^2 + 1}{2}.$

C. $\frac{e^2 - 1}{4}.$

D. $\frac{e^2 + 1}{4}.$

Lời giải

Phương trình hoành độ của đường cong $y = x \ln x$ và trục hoành là

$$x \ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

$$S = \int_1^e |x \ln x| dx = \int_1^e x \ln x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } S = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Câu 4. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ bằng 10 là

A. $m = \frac{7}{2}$.

B. $m = 5$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Vì $m > 0$ nên $2x + 3 > 0, \forall x \in [0; m]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ là:

$$S = \int_0^m (2x + 3) \cdot dx = \left(x^2 + 3x \right) \Big|_0^m = m^2 + 3m.$$

Theo giả thiết ta có:

$$S = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (do } m > 0 \text{)}.$$

Câu 5. (Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

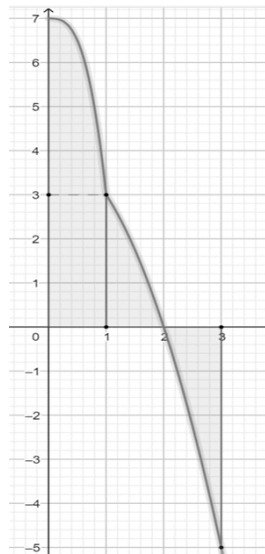
A. $\frac{16}{3}$.

B. $\frac{20}{3}$.

C. 10.

D. 9.

Lời giải



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (7 - 4x^3) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx \\ &= \left(7x - x^4 \right) \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^3 = 6 + 4 - \frac{7}{3} - 3 - \frac{8}{3} + 8 = 10. \end{aligned}$$

Câu 6. (Chuyên Quốc Học Huế 2019) Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \frac{937}{12}$

B. $S = \frac{343}{12}$

C. $S = \frac{793}{4}$

D. $S = \frac{397}{4}$

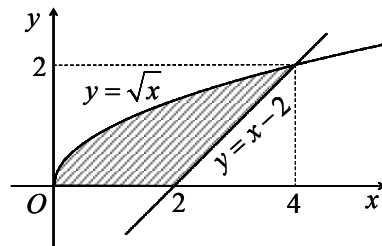
Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

$$-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Diện tích cần tìm là: } S &= \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx \\ &= \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \right|_{-3}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \right|_0^4 \\ &= \left| \frac{-99}{4} \right| + \left| \frac{-160}{3} \right| = \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

Câu 7. (Việt Đức Hà Nội 2019) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{10}{3}$.

D. $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Xét các hình phẳng $(H_1): \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 0 \\ x = 0, x = 4 \end{cases}$ và $(H_2): \begin{cases} y = x - 2 \\ y = 0 \\ x = 2, x = 4 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} (H) = (H_1) \setminus (H_2) \\ (H) \cup (H_2) = (H_1) \end{cases}$.

Do đó $S(H) = S(H_1) - S(H_2) = \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x - 2) dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_0^4 - \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^4 = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$

Cách khác: Ta có $(H): \begin{cases} x = y^2 \\ x = y + 2 \\ y = 0, y = 2 \end{cases}$. Suy ra $S(H) = \int_0^2 |y^2 - (y + 2)| dy = \frac{10}{3}$.

Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là

A. $\frac{8}{15}$.

B. $\frac{7}{15}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{4}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là

$$x^2 + x - 1 = x^4 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^1 |x^2 - x^4| dx = \int_{-1}^0 |x^2 - x^4| dx + \int_0^1 |x^2 - x^4| dx$

$$= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x^4) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}.$$

Câu 9. (THPT Nghĩa Hưng ND- 2019) Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

- A. $S = \ln 2 + 1$. B. $S = 2 \ln 2 + 1$. C. $S = \ln 2 - 1$. D. $S = 2 \ln 2 - 1$.

Lời giải

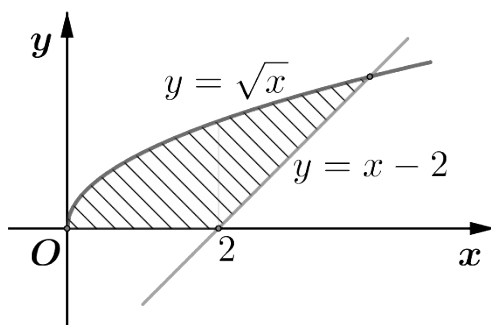
Phương trình trục (Ox) và (Oy) lần lượt là $y = 0$ và $x = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số (H) và trục Ox : $\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có: $S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx$. Vì $\frac{x-1}{x+1} \leq 0, \forall x \in [0; 1]$ nên diện tích cần tìm là:

$$S = - \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{x+1} \right) dx = \left(-x + 2 \ln |x+1| \right) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

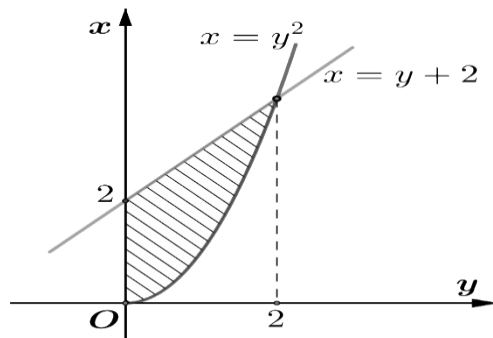
Câu 10. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



- A. $\frac{10}{3}$. B. 4. C. $\frac{13}{3}$. D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Cách 1: Coi x là hàm số theo biến số y .



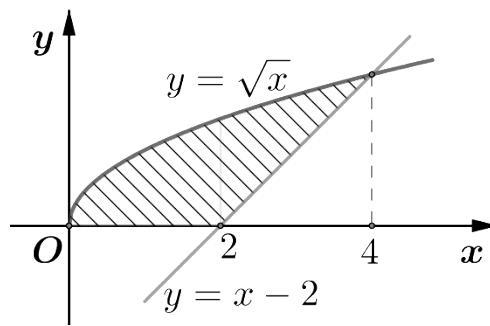
Hình phẳng đã cho giới hạn bởi các đường:

$x = y^2$ (với $y \geq 0$); $x = y + 2$; $y = 0$.

Ta có: $y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 & (\text{loại}) \\ y = 2 & (t/m) \end{cases}$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^2 |y + 2 - y^2| dy = \int_0^2 (y + 2 - y^2) dy = \frac{10}{3}$ (đvdt)

Cách 2:



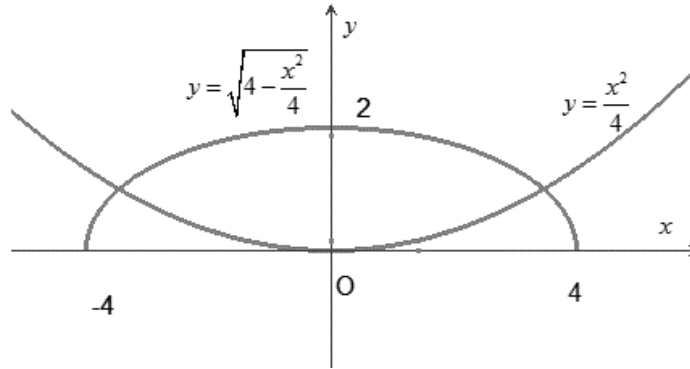
Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x - 2) dx = \frac{10}{3}$ (đvdt)

Câu 11. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{12}$ và đường cong có

phương trình $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ (tham khảo hình vẽ bên)



Diện tích hình phẳng (H) bằng:

A. $\frac{2(4\pi + \sqrt{3})}{3}$

B. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{4\sqrt{3} + \pi}{6}$

Lời giải

Xét phương trình $\frac{x^2}{12} = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow \frac{x^4}{144} = 4 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^4}{144} + \frac{x^2}{4} - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{12} \\ x = -\sqrt{12} \end{cases}$

Diện tích hình phẳng (H) bằng:

$$S = \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{12} \right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{12} \right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \right) dx - 2 \int_0^{\sqrt{12}} \frac{x^2}{12} dx$$

Xét $I_1 = \int_0^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \right) dx$

Đặt $x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \sqrt{12} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$$I_1 = 8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_0^{\sqrt{12}} \frac{x^2}{12} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } S = 2I_1 - 2I_2 = \frac{2(4\pi + \sqrt{3})}{3}$$

Câu 12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x - 1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng?

A. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

B. $\frac{\pi - 1}{2}$.

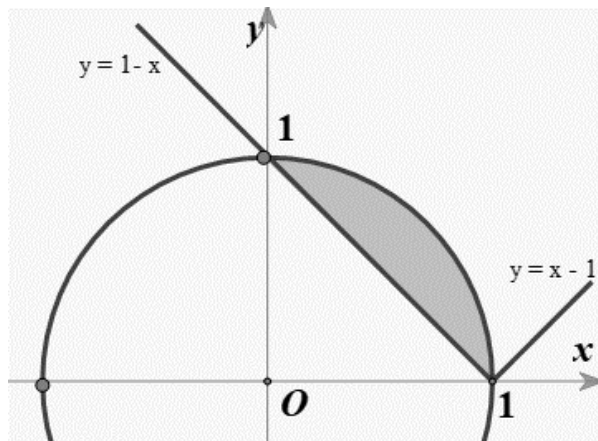
C. $\frac{\pi}{2} - 1$.

D. $\frac{\pi}{4} - 1$.

Lời giải

$$y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ do chỉ tính nửa trên của đường tròn nên ta lấy $y = \sqrt{1 - x^2}$.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x - 1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là phần tô màu vàng như hình vẽ.

Diện tích hình phẳng trên là:

$$S = \int_0^1 [\sqrt{1 - x^2} - (1 - x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx + \int_0^1 (x - 1) dx = I_1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 = I_1 - \frac{1}{2}.$$

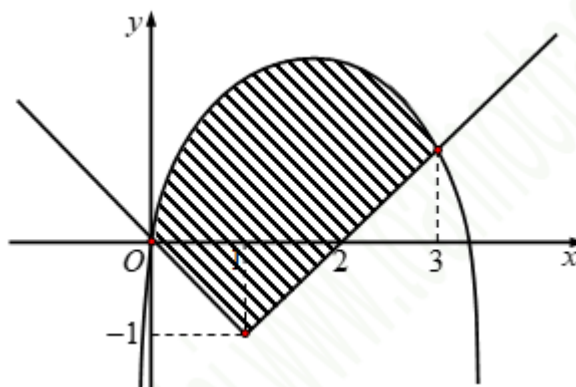
$$\text{Tính } I_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]; dx = \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \text{ Vậy } S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 13. [Kim Liên - Hà Nội - 2018] Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



A. $\frac{11}{6}$.

B. $\frac{13}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -x$ và $y = x - 2$ là: $-x = x - 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

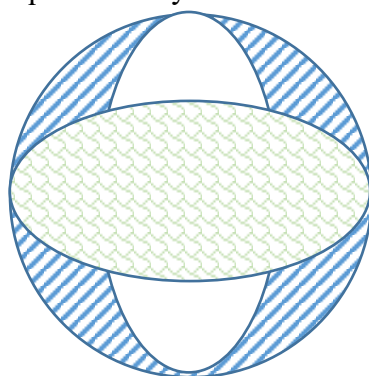
$$S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2 \right) dx.$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2 \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2 \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \left(\frac{13}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{7}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_1^3 = \frac{13}{2}.$$

Câu 14. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018) Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip (phần gạch caro trên hình vẽ) gần với kết quả nào nhất trong 4 kết quả dưới đây?



A. $S = 4,8$.

B. $S = 3,9$.

C. $S = 3,7$.

D. $S = 3,4$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

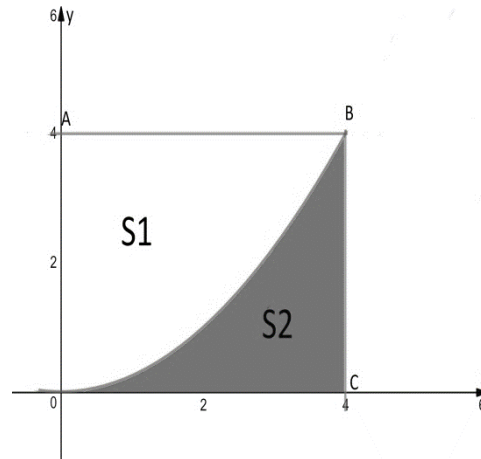
Hai Elip lần lượt có phương trình: $(E_1): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

Tọa độ giao điểm của hai Elip trong góc phần tư thứ nhất là nghiệm phương trình:

$$x^2 + \frac{1 - \frac{x^2}{4}}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 2 \cdot 1 - 4 \int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \left(2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \right) dx = 3,71$

Câu 15. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{2}$.

B. 3.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng $S_1 + S_2$.

$$S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{16 - S_2}{S_2} = \frac{16 - \frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 2$$

Câu 16. (Việt Đức Hà Nội 2019) Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1, y = 0, x = 1, x = t$ ($t > 1$). Tìm t để $S(t) = 10$.

A. $t = 3$.

B. $t = 4$.

C. $t = 13$.

D. $t = 14$.

Lời giải

Cách 1. Ta có: $S(t) = \int_1^t |2x + 1| dx = \int_1^t (2x + 1) dx$.

Suy ra $S(t) = (x^2 + x) \Big|_1^t = t^2 + t - 2$.

Do đó $S(t) = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases} (L)$.

Vậy $t = 3$.

Cách 2. Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng $y(1) = 3$, đáy lớn bằng $y(t) = 2t + 1$ và chiều cao bằng $t - 1$.

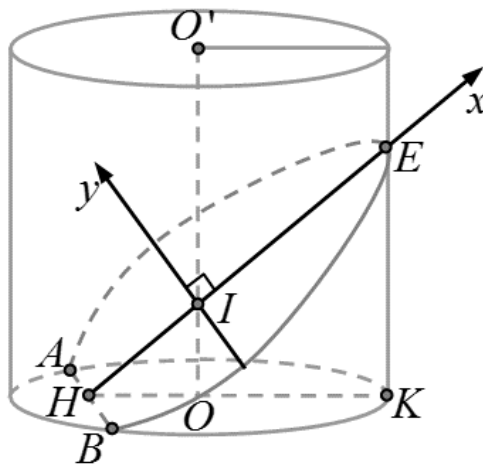
Ta có $\frac{(3 + 2t + 1)(t - 1)}{2} = 10 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$. Vì $t > 1$ nên $t = 3$

Do đó chọn đáp án A.

Câu 17. (Hà Nội - 2018) Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc 60° , (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

- A. $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. B. $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. C. $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. D. $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Lời giải



Cách 1: Gọi I, H, K, E là các điểm như hình vẽ.

* Ta có: $\widehat{IHO} = 60^\circ$

$$OH^2 = OB^2 - BH^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \Rightarrow OI = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}, IH = \frac{OH}{\cos 60^\circ} = R,$$

$$\Delta IOH \sim \Delta EKH \text{ nên ta có: } \frac{IE}{IH} = \frac{OK}{OH} = 2 \Rightarrow IE = 2R.$$

* Chọn hệ trục tọa độ Ixy như hình vẽ ta có elip (E) có bán trục lớn là $a = IE = 2R$ và (E) đi

$$\text{qua } A\left(-R; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) \text{ nên } (E) \text{ có phương trình là } (E): \frac{x^2}{4R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

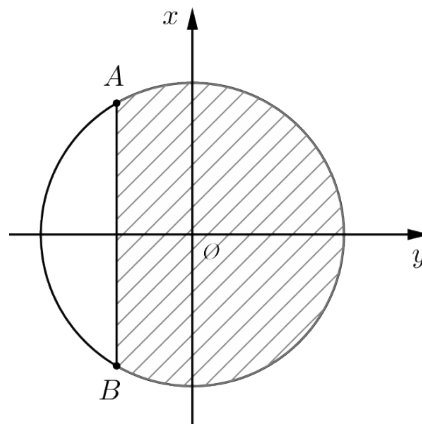
$$* \text{ Diện tích của thiết diện là } S = 2 \int_{-R}^{2R} R \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} dx = 2R \int_{-R}^{2R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} dx$$

$$* \text{ Xét tích phân: } I = \int_{-R}^{2R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} dx, \text{ đặt } x = 2R \cdot \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ ta được}$$

$$I = \frac{R}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{R}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) R \Rightarrow S = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2.$$

$$\textbf{Cách 2: } \cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow OH = \frac{R}{2}.$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn đầy là $x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$.

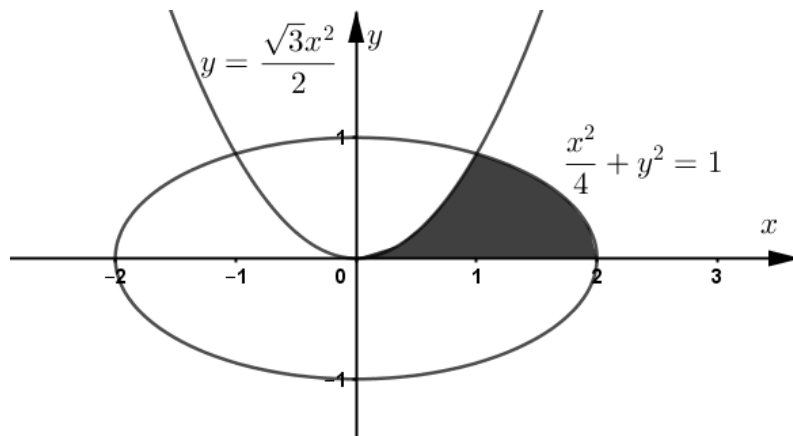
Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S = 2 \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \sqrt{R^2 - x^2} dx$. Đặt $x = R \sin t \Rightarrow S = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S' .

Theo công thức hình chiếu, ta có $S' = \frac{S}{\cos 60^\circ} = 2S = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2$.

Câu 18. (THPT Yên Khánh A - 2018) Cho hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) có diện tích $T = \frac{a}{b}\pi + \frac{c}{d}\sqrt{3}$ (với $a, c \in \mathbb{Z}$; $b, d \in \mathbb{N}^*$; $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $S = a + b + c + d$.



A. $S = 32$.

B. $S = 10$.

C. $S = 15$.

D. $S = 21$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

Hoành độ giao điểm (E') $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ và parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ là

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \Rightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ (theo hình vẽ thì } x > 0 \text{)}$$

$$\text{Vậy } T = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$$

$$\text{Mà } \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 dx = \frac{\sqrt{3} x^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Ta có: $I = \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$. Đặt $x = 2 \cos t$ ta có:

$$\int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sqrt{4 \sin^2 t} \cdot (-2 \sin t) dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

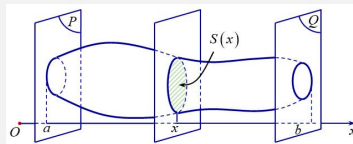
Do đó $T = \frac{1}{3} \cdot \pi + \frac{-1}{12} \cdot \sqrt{3}$ nên $S = 15$

Dạng 2. Ứng dụng tích phân để tìm thể tích

① Thể tích vật thể

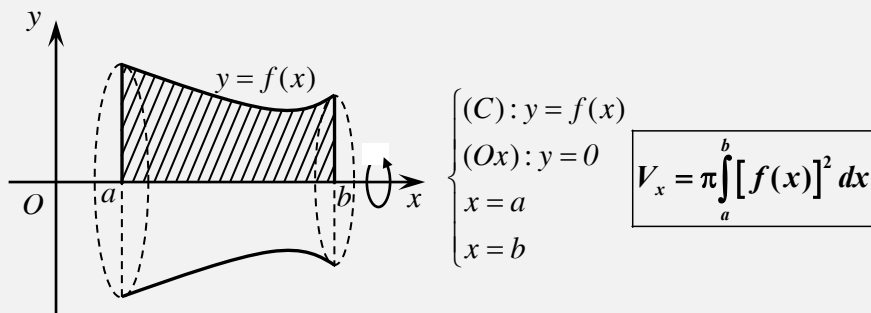
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được

xác định:
$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

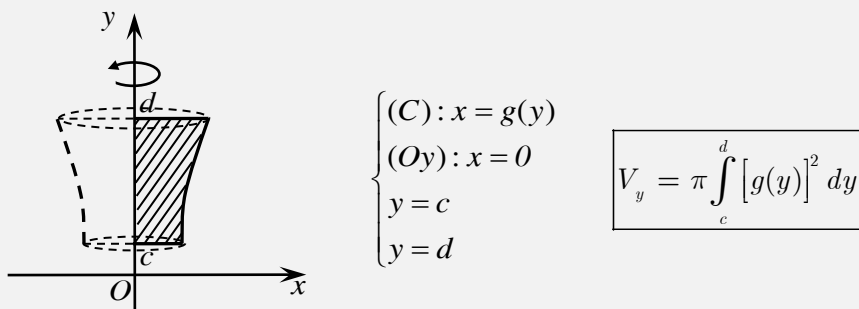


② Thể tích khối tròn xoay

a) Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

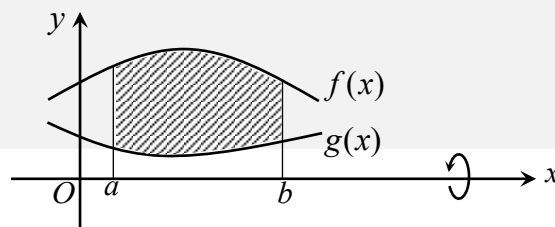


b) Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :



c) Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$



Câu 19. (Đề Minh Họa 2017) Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

- A. $V = (e^2 - 5)\pi$ B. $V = (4 - 2e)\pi$ C. $V = e^2 - 5$ D. $V = 4 - 2e$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^1 [2(x-1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = (x-1)^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x-1)dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 2(x-1) \frac{e^{2x}}{2} dx = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx$$

$$\text{Gọi } I_1 = \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = 4\pi (x-1) \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = 2\pi - \pi e^{2x} \Big|_0^1 = 2\pi - \pi e^2 + \pi = 3\pi - \pi e^2$$

$$\text{Vậy } V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - I_1 = -2\pi - (3\pi - \pi e^2) = \pi(e^2 - 5).$$

Câu 20. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 550 B. 400 C. 670 D. 335

Lời giải

Chọn D

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$$H = \left\{ y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}, y = 0, x = -5, x = 5 \right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_{-5}^5 \left(16 - \frac{16x^2}{25} \right) dx = \pi \left(16x - \frac{16x^3}{75} \right) \Big|_{-5}^5 = \frac{320\pi}{3} \approx 335,1$$

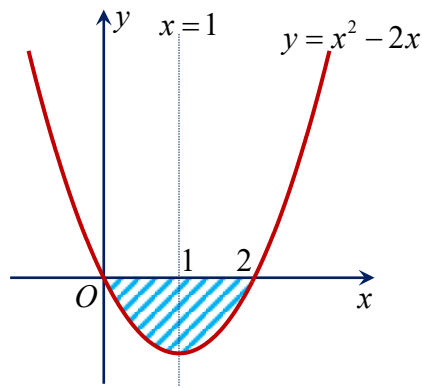
Câu 21. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{4\pi}{3}$. B. $V = \frac{16\pi}{15}$. C. $V = \frac{7\pi}{8}$. D. $V = \frac{15\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề, ta có hình vẽ sau:



Nhận xét: Khi nhìn vào hình vẽ. Đường thẳng $x=1$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường $y = x^2 - 2x$ và trục hoành làm 2 phần. Dễ thấy lúc này hình phẳng (H) không thể xác định vì phần hình giới hạn bởi $x=0$ đến $x=1$ và $x=1$ đến $x=2$ chưa rõ ràng.

Nếu xét phần tròn xoay khi xoay hình phẳng quanh trục Ox khi $x=0$ đến $x=2$ thì không có đáp án trong bài, đồng thời đề cho thêm đường thẳng $x=1$ là không cần thiết.

Do đó để bài toán có đáp án và rõ ràng hơn ta điều chỉnh đề như sau:

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases}$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 - 2x$ và $y = 0$ (trục hoành) là:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi đó thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V_{Ox} = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 22. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1)$; $y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox .

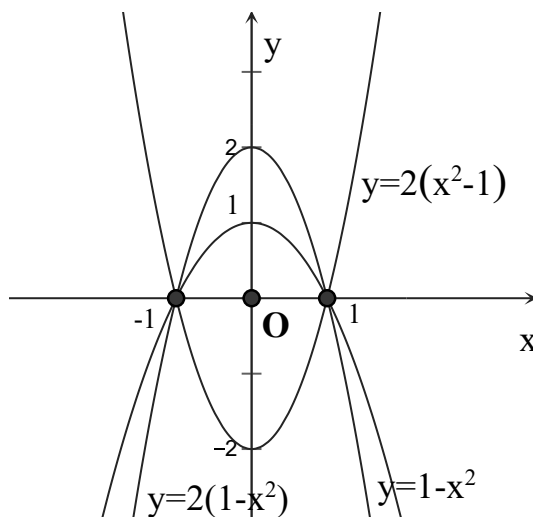
A. $\frac{64\pi}{15}$.

B. $\frac{32}{15}$.

C. $\frac{32\pi}{15}$.

D. $\frac{64}{15}$.

Lời giải



Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ và $y = 1 - x^2$ là $2(x^2 - 1) = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y = 2(1 - x^2)$.

Ta có $2(1 - x^2) \geq 1 - x^2, \forall x \in [-1; 1]$. Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_{-1}^1 [2(x^2 - 1)]^2 dx = \frac{64\pi}{15}.$$

Câu 23. (Chuyên Bắc Giang -2019) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. 5 B. $\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ C. $\frac{3\pi}{2}$ D. $\pi \left(\frac{1}{2} + \pi\right)$

Lời giải

Chọn B

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x d(\tan x) = \pi \int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Câu 24. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2$, $y = 0$ và $x = 9$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

- A. $V = \frac{7}{6}$. B. $V = \frac{5\pi}{6}$. C. $V = \frac{7\pi}{11}$. D. $V = \frac{11\pi}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x} - 2$ và trục hoành:

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_4^9 (\sqrt{x} - 2)^2 dx = \pi \int_4^9 (x - 4\sqrt{x} + 4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{8x\sqrt{x}}{3} + 4x \right) \Big|_4^9 \\ &= \pi \left(\frac{81}{2} - 72 + 36 \right) - \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{64}{3} + 16 \right) = \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

Câu 25. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành.

- A. $\frac{31\pi}{3}$. B. $\frac{32\pi}{3}$. C. $\frac{34\pi}{3}$. D. $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành

$$\sqrt{4x - x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4x - x^2})^2 dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2) dx = \frac{32}{3} \pi.$$

Vậy thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là $\frac{32}{3}\pi$.

Câu 26. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox .

A. $V = \frac{4}{3}\pi$.

B. $V = \frac{16}{15}\pi$.

C. $V = \frac{16}{15}$.

D. $V = \frac{4}{3}$.

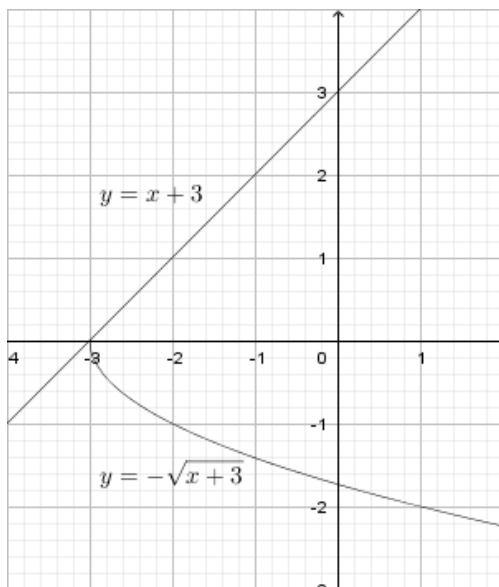
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với trục hoành: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra do (H) quay quanh Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 \cdot dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) \cdot dx = \pi \cdot \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$$

Câu 27. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 3$, $y = -\sqrt{x+3}$, $x = 1$ xoay quanh trục Ox .



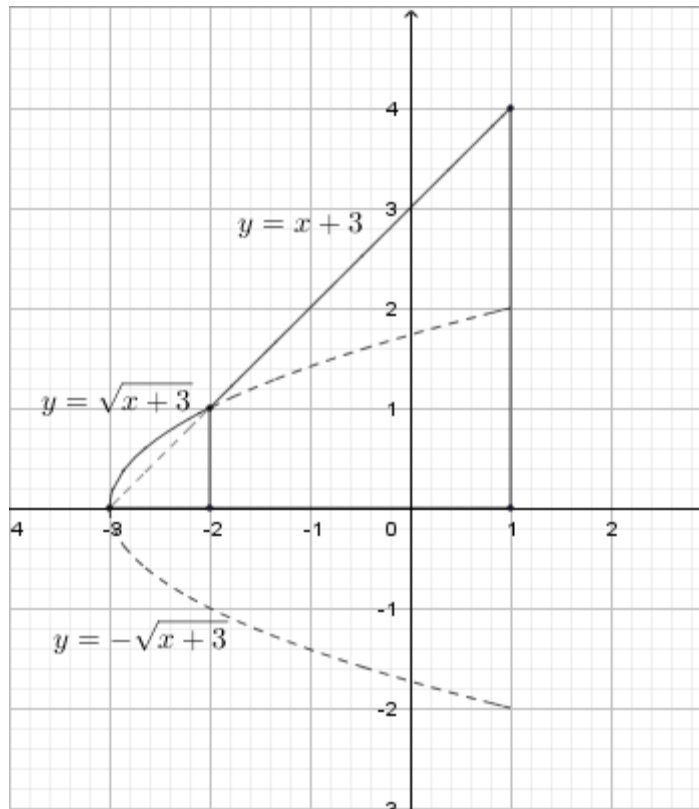
A. $\frac{41}{2}\pi$.

B. $\frac{43}{2}\pi$.

C. $\frac{41}{3}\pi$.

D. $\frac{40}{3}\pi$.

Lời giải



Xét phương trình $x+3 = -\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 0 \\ \sqrt{x+3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$

Xét hình (H) giới bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x+3}$ ($-3 \leq x \leq -2$), $y = x+3$ ($-2 \leq x \leq 1$), $y = 0$ và $x = 1$.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm chính bằng thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay quanh hình (H) quanh trục Ox . Do đó

$$V = \pi \int_{-3}^{-2} [\sqrt{x+3}]^2 dx + \pi \int_{-2}^1 (x+3)^2 dx = \frac{43\pi}{2}.$$

Câu 28. (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019) Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V = e^2 - 1$. B. $V = \pi(e^2 - 1)$. C. $V = \frac{1}{4}\pi e^2 - 1$. D. $V = \frac{1}{4}\pi(e^2 - 1)$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là nghiệm của phương trình $\sqrt{x} \cdot e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Khi đó thể tích của khối tròn xoay được tạo thành là:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} \cdot e^{x^2})^2 dx = \pi \int_0^1 x e^{2x^2} dx = \pi \frac{1}{4} \int_0^1 e^{2x^2} d(2x^2) = \pi \frac{1}{4} e^{2x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}\pi(e^2 - 1).$$

Câu 29. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019) Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0; x = 2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x ($0 \leq x \leq 2$) ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\frac{\pi(13e^4 - 1)}{4}$. B. $\frac{13e^4 - 1}{4}$. C. $2e^2$. D. $2\pi e^2$.

Lời giải

Diện tích thiết diện là $S(x) = (x+1)^2 e^{2x}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 (x+1)^2 e^{2x} dx$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (x+1)^2 e^{2x} \Big|_0^2 - \int_0^2 (x+1) e^{2x} dx = \frac{9e^4 - 1}{2} - \left(\frac{x+1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x} dx \right) \\ &= \frac{9e^4 - 1}{2} - \frac{3e^4 - 1}{2} + \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^2 = 3e^4 + \frac{1}{4} e^4 - \frac{1}{4} = \frac{13e^4 - 1}{4}. \end{aligned}$$

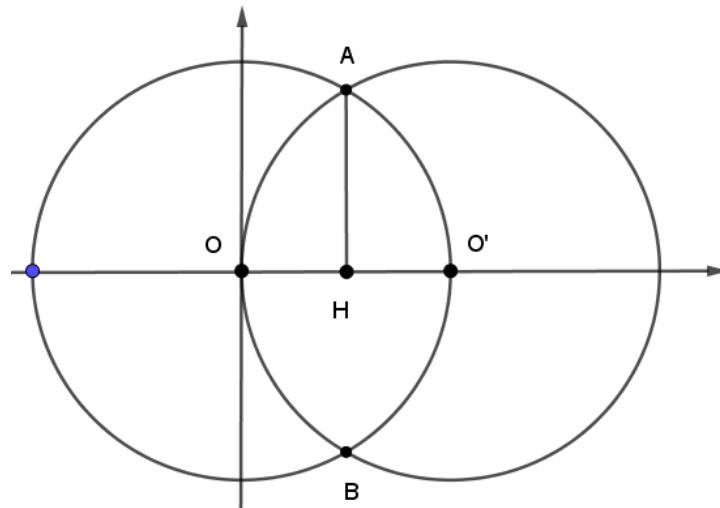
Câu 30. Cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng bán kính $R = 3$ thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1), (S_2)$.

A. $V = \frac{45\pi}{8}$.

B. $V = \frac{45\pi}{4}$.

C. $V = \frac{45}{4}$.

D. $V = \frac{45}{8}$.

Lời giải

Phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1), (S_2)$ là một khối tròn xoay, tương đương phần hình phẳng OAO' quay quanh trục OO' hay bằng hai lần phần mặt phẳng tạo bởi AHO' quay quanh trục OO' .

Đặt hệ trục như hình khi đó phương trình đường tròn (O) là $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$, điểm H có hoành độ bằng $\frac{3}{2}$; O' có hoành độ là 3 nên thể tích:

$$V = \pi \int_{\frac{3}{2}}^3 \left(\sqrt{9 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{\frac{3}{2}}^3 (9 - x^2) dx = \frac{45}{8} \pi.$$

Câu 31. (Toán Học Tuổi Trẻ - 2018) Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

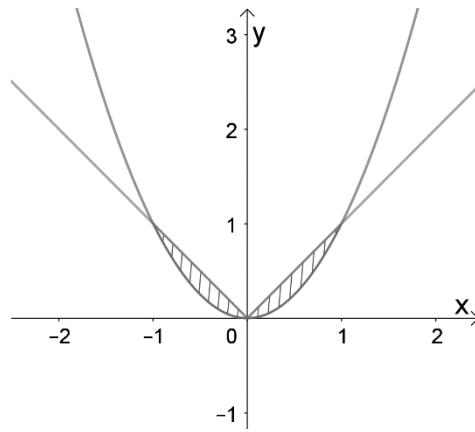
A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{2\pi}{15}$.

D. $\frac{4\pi}{15}$.

Lời giải



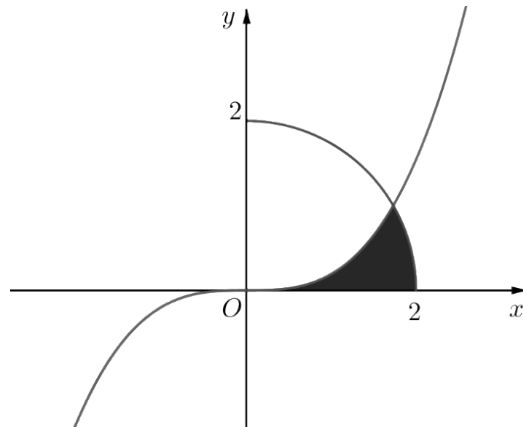
Phương trình hoành độ giao điểm $|x| = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$.

Ta có đồ thị hai hàm số $y = |x|$ và $y = x^2$ đều đối xứng qua Oy nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $x = y$ và $x = \sqrt{y}$ quay xung quanh trục Oy .

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^1 |y - y^2| dy = \pi \int_0^1 (y - y^2) dy = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 32. (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018) Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9} x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\frac{a}{b}\sqrt{3} + \frac{c}{d} \right) \pi$,

trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a + b + c + d$.

A. $P = 52$.

B. $P = 40$.

C. $P = 46$.

D. $P = 34$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{\sqrt{3}}{9} x^3 = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$$V = \pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{9} x^3 \right)^2 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\sqrt{4 - x^2} \right)^2 dx \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{27} x^6 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (4 - x^2) dx \right] \\
&= \pi \left[\frac{1}{27} \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_0^{\sqrt{3}} + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\sqrt{3}}^2 \right] \\
&= \left(-\frac{20\sqrt{3}}{7} + \frac{16}{3} \right) \pi.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 20, b = 7, c = 16, d = 3$$

$$\Rightarrow P = a + b + c + d = 46.$$

Câu 33. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường

$y = x - \pi$, $y = \sin x$ và $x = 0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục hoành và

$V = p\pi^4$, $(p \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

A. 8.

B. 4.

C. 24.

D. 12.

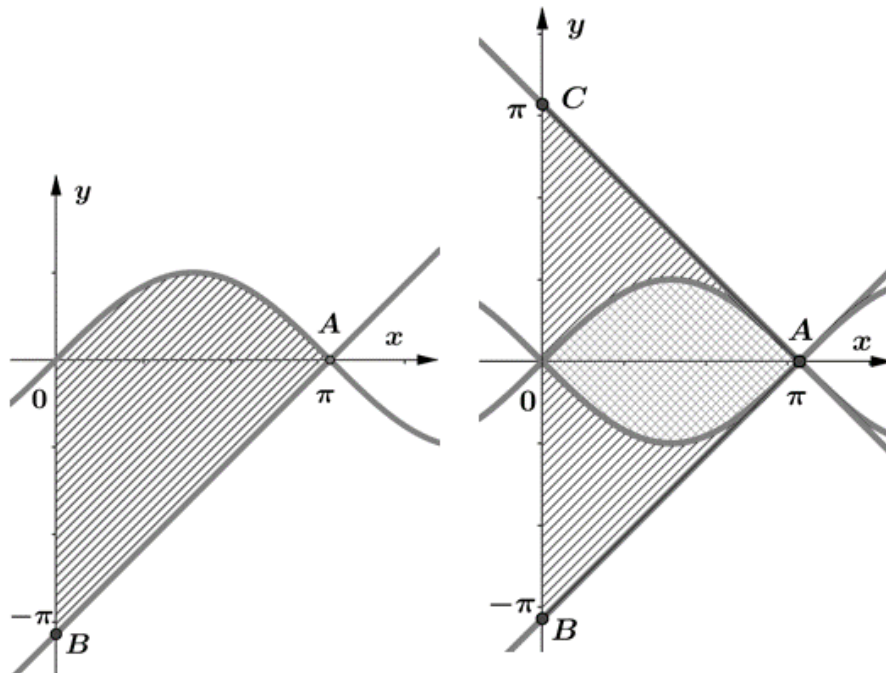
Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - \pi$ và $y = \sin x$:

$x - \pi = \sin x \Leftrightarrow x - \pi - \sin x = 0$ (1). Ta thấy $x = \pi$ là một nghiệm của phương trình (1).

Xét hàm số $f(x) = x - \pi - \sin x \Rightarrow f'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x = \pi$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$.



Cách 1:

Xét hàm số $g(x) = \pi - x - \sin x, x \in (0; \pi)$.

$g'(x) = -1 - \cos x < 0, \forall x \in (0; \pi)$, suy ra hàm số $g(x) = \pi - x - \sin x$ nghịch biến trên $(0; \pi)$.

$\forall x \in (0; \pi): g(x) > g(\pi) \Rightarrow \pi - x - \sin x > \pi - \pi - \sin \pi = 0 \Rightarrow \pi - x > \sin x$ (2).

Do đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành là thể tích của khối nón khi quay tam giác vuông OAB quanh trục hoành.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OB^2 \cdot OA = \frac{1}{3} \pi \cdot \pi^2 \cdot \pi = \frac{1}{3} \pi^4 \Rightarrow p = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } 24p = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8.$$

Cách 2: Từ (2) ta có $V = \pi \int_0^\pi (x - \pi)^2 dx = \pi \int_0^\pi (x - \pi)^2 d(x - \pi)$

$$= \pi \cdot \frac{(x - \pi)^3}{3} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^4}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

Vậy $24p = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8.$

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , $(H_1): \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = -\frac{x^2}{4} \\ x = -4, x = 4 \end{cases}, (H_2): \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x^2 + (y - 2)^2 \geq 4 \\ x^2 + (y + 2)^2 \geq 4 \end{cases}$. Cho

$(H_1), (H_2)$ xoay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt V_1, V_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $V_1 = V_2$. **B.** $V_1 = \frac{1}{2} V_2$. **C.** $V_1 = 2V_2$. **D.** $V_1 = \frac{3}{2} V_2$.

Lời giải

Ta có $V_1 = 8 \cdot (\pi \cdot 4^2) - 2 \left(\pi \int_0^4 (\sqrt{4y})^2 dy \right) = 96\pi$

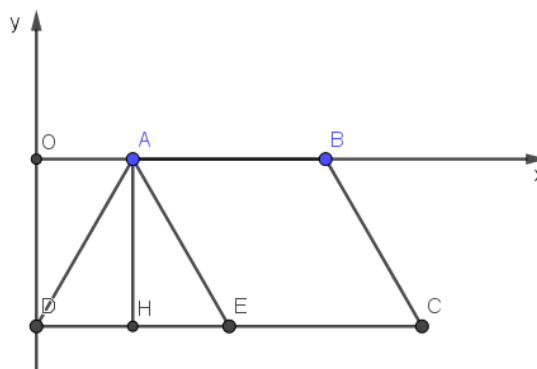
$$V_2 = \frac{4\pi \cdot 4^3}{3} - 2 \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} = 64\pi$$

Suy ra $V_1 = \frac{3}{2} V_2$

Câu 35. (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2018) Cho hình thang $ABCD$ có AB song song CD và $AB = AD = BC = a$, $CD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục là đường thẳng AB .

A. $\frac{5}{4} \pi a^3$. **B.** $\frac{5}{2} \pi a^3$. **C.** $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3} \pi a^3$. **D.** πa^3 .

Lời giải



Để thấy $ABCE$ là hình bình hành nên $AE = BC = a$. Vậy ADE là tam giác đều.

Có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Có phương trình $CD: y = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $x_D = 0, x_C = 2a$; $A\left(\frac{a}{2}; 0\right)$.

Phương trình $AD: y = \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } V = \pi \int_0^{2a} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{4} \cdot 2a - 2\pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(3x^2 - 3ax + \frac{3a^2}{4}\right)$$

$$\frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi \left(x^3 - \frac{3a}{2}x^2 + \frac{3a^2}{4}x\right) \Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{5}{4}\pi a^3.$$

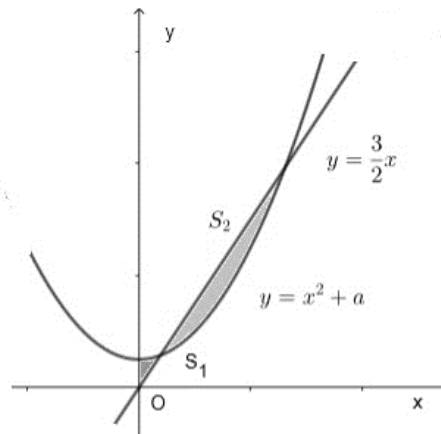
Cách 2: Thể tích khối tròn xoay được tạo ra theo đề bài là thể tích khối trụ có chiều cao $2a$ bán kính đáy bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trừ đi thể tích hai khối nón cùng có chiều cao $\frac{a}{2}$ bán kính đáy $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy

$$V = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 2a - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{5}{4}\pi a^3$$

Dạng 3. Diện tích, thể tích có điều kiện

Câu 36. (Mã 104 - 2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$ (a là tham số thực dương).

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0; \frac{2}{5}\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right)$

C. $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20}\right)$

D. $\left(\frac{9}{20}; \frac{1}{2}\right)$

Lời giải

Chọn C

Giải toán:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + a = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2a = 0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{9}{16} \end{cases}.$

Gọi hai nghiệm đó là $0 < x_1 < x_2$ thì $x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}.$

$$\text{Đề } S_1 = S_2 \text{ khi và chỉ khi } \int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) dx = 0$$

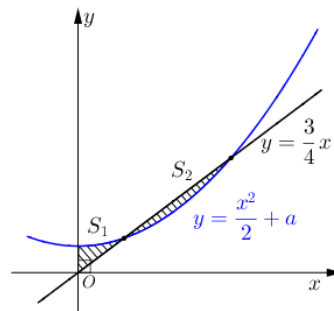
$$\text{Ta có: } \int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3} + ax_2 - \frac{3}{4}x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} \right)^3}{3} + a \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} \right)^2 = 0$$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x = 0,421875$ thuộc khoảng $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20} \right)$.

Câu 37. (Mã 102 - 2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương).

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4} \right)$.

B. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32} \right)$.

C. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32} \right)$.

D. $\left(0; \frac{3}{16} \right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} & (*) \\ x_1 x_2 = 2a & (**) \end{cases}$.

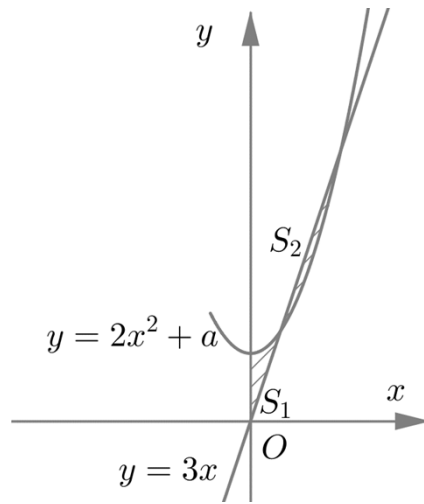
$$S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx + \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + ax \right| \Big|_0^{x_2} = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{8}x_2^2 + ax_2 \right| = 0 \Rightarrow a = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8} \quad (***)$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - x_2, \text{ thay vào } (**) \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - x_2 \right) x_2 = -\frac{x_2^2}{3} + \frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3} - \frac{3x_2}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8}$$

$$\xrightarrow{(***)} a = \frac{27}{128}. \text{ Vậy } a \in \left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32} \right).$$

Câu 38. (Mã 103 - 2019) Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1; \frac{9}{8}\right)$.

B. $\left(\frac{9}{10}; 1\right)$.

C. $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right)$.

D. $\left(0; \frac{4}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 + a = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + a = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ \frac{a}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{9}{8} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{8}.$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8a}}{4}$.

$$\text{Ta có } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx = - \int_{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}}^{\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx + \int_{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}}^{\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 - 3x + a) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax \right) \Big|_0^{\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^3 - \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^2 + a \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) + a \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} = 0 \text{ (vn)} \\ \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) + a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) + a = 0 \xrightarrow[\text{Shift Solve}]{\text{CASIO}} a = \frac{27}{32}$$

Câu 39. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = 3$

D. $m = 4$

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} my = x^2 & (1) \\ mx = y^2 & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được: $mx = \left(\frac{x^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow m^3x - x^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m > 0 \end{cases}$

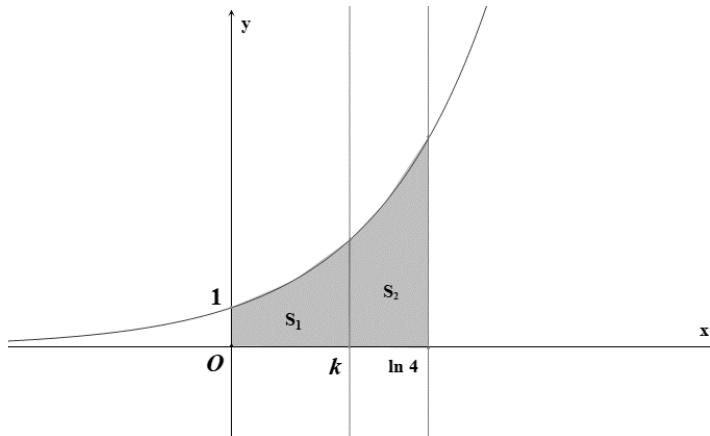
Vì $y = \frac{x^2}{m} > 0$ nên $mx = y^2 \xrightarrow{y>0} y = \sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_0^m \left| \sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right| dx = \left| \int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right) dx \right|$

$= \left| \left(\frac{2\sqrt{m}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3m} \right) \Big|_0^m \right| = \left| \frac{1}{3} m^2 \right| = \frac{1}{3} m^2$

Yêu cầu bài toán $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \xrightarrow{m>0} m = 3$

Câu 40. (THPT Cẩm Giàng 2 -2019) Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{4}{3} \ln 2$.

B. $k = \ln \frac{8}{3}$.

C. $k = \ln 2$.

D. $k = \ln 3$.

Lời giải

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$ là

$$S = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3 \text{ (đvdt)}.$$

Ta có $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{3}{2} S_1$. Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$ (đvdt).

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ nên

$$2 = S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1.$$

Do đó $e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.

Câu 41. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Phương trình giao điểm của AB và (P) là: $x^2 - ax - b = 0$

Để có 2 điểm A, B thì $a^2 + 4b > 0$. khi đó:
$$\begin{cases} A(x_1; ax_1 + b) \\ B(x_2; ax_2 + b) \\ x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = -b \end{cases}$$

Nên $AB = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + 1)}|x_2 - x_1| = 2$

Giả sử $x_2 > x_1$ ta có $|x_2 - x_1| = \frac{2}{\sqrt{(a^2 + 1)}} \leq 2$

Mặt khác: $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{a^2 + 4b}$

Khi đó $S = \int_{x_1}^{x_2} ax + b - x^2 dx = \frac{a}{2}(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)$

$$= (x_2 - x_1) \left[\frac{a}{2}(x_2 + x_1) + b - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2) \right]$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\frac{a}{2} \cdot a + b - \frac{1}{3}(a^2 + b) \right] = (x_2 - x_1) \left[\frac{a^2}{2} + \frac{2b}{3} \right] = \frac{a^2 + 4b}{6}(x_2 - x_1) = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} \leq \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Suy ra: $S_{\max} = \frac{4}{3}$ khi $\begin{cases} a = 0 \\ x_2 - x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn vì (P) có tính đối xứng)

$$\Rightarrow \begin{cases} A(1;1) \\ B(-1;1) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(-1;1) \\ B(1;1) \end{cases}.$$

Câu 42. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Cho Parabol $(P): y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

- A. $(-\sqrt{2}; -\frac{1}{2})$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; \frac{1}{\sqrt{2}})$. D. $(\frac{1}{2}; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ của (P) và d là $x^2 - mx - 1 = 0$ (1).

Dễ thấy (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi a, b ($a < b$) là các nghiệm của (1) thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b |x^2 - mx - 1| dx = \left| \int_a^b (x^2 - mx - 1) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} - x \right) \right|_a^b \\
 &= \left| \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{m(b^2 - a^2)}{2} - (b - a) \right| = |b - a| \cdot \left| \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{m(b + a)}{2} - 1 \right| \\
 &= \sqrt{(b + a)^2 - 4ab} \cdot \left| \frac{(b + a)^2 - ab}{3} - \frac{m(b + a)}{2} - 1 \right|
 \end{aligned}$$

$$\text{Mà } a + b = m, ab = -1 \text{ nên } S = \sqrt{m^2 + 4} \cdot \left(\frac{m^2}{6} + \frac{2}{3} \right) \geq \frac{4}{3}.$$

Do đó $\min S = \frac{4}{3}$ khi $m = 0$.

Câu 43. (Việt Đức Hà Nội -2019) Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 , trong đó $S_1 < S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

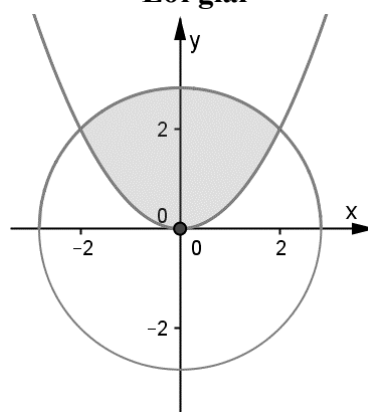
A. $\frac{3\pi + 2}{12\pi}$.

B. $\frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$.

C. $\frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$.

D. $\frac{3\pi + 2}{21\pi - 2}$.

Lời giải



Diện tích hình tròn là $S = \pi R^2 = 8\pi$.

Phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ là $x^2 + y^2 = 8$.

Hoành độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm của phương trình

$$x^2 + \frac{x^4}{4} = 8 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Phương trình nửa phía trên trục Ox của đường tròn là: $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Diện tích miền giới hạn bởi Parabol và nửa phía trên trục Ox của đường tròn là:

$$\int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x^2 dx$$

$$\text{Ta có } \int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \frac{16}{3}.$$

$$I = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = 2\sqrt{2} \sin t \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \Rightarrow dx = 2\sqrt{2} \cos t dt$$

$$+) x = -2 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$$

$$+) x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8-8\sin^2 t} \cdot 2\sqrt{2} \cos t dt = 8 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= 4 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4.$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

$$\text{Diện tích phần còn lại là } 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3} \right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_1 = 2\pi + \frac{4}{3}; S_2 = 6\pi - \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$$

Câu 44. Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^6}$ và $y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^6}$ có diện tích lớn nhất.

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

B. 1.

C. 2.

D. $\sqrt[3]{3}.$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$\frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^6} = \frac{a^2 - ax}{1 + a^6} \Leftrightarrow x^2 + 3ax + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow (x + a)(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ x = -2a \end{cases}$$

□ □ Nếu $a = 0$ thì diện tích hình phẳng $S = 0$.

$$+ \text{ Nếu } a > 0 \text{ thì } S = \int_{-2a}^{-a} \left| \frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{1 + a^6} \right| dx = - \int_{-2a}^{-a} \frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{1 + a^6} dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{1 + a^6}.$$

$$+ \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } S = \int_{-a}^{-2a} \left| \frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{1 + a^6} \right| dx = - \int_{-a}^{-2a} \frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{1 + a^6} dx = -\frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{1 + a^6}.$$

$$\text{Do đó, với } a \neq 0 \text{ thì } S = \frac{1}{6} \cdot \frac{|a|^3}{1 + |a|^6} \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{|a|^3}{2|a|^3} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } |a|^3 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm đã cho có diện tích lớn nhất khi $a = 1$.

Câu 45. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a + b$ là:

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 6x^2 + m = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) (1) trở thành $t^2 - 6t + m = 0$ (2).

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt hay

$$\text{phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (-3)^2 - m > 0 \\ P = m > 0 \\ S = 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 9 \text{ (*)}.$$

Gọi t_1, t_2 ($0 < t_1 < t_2$) là hai nghiệm của phương trình (2). Lúc đó phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt theo thứ tự tăng dần là: $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$.

Do tính đối xứng của đồ thị (C_m) nên có $\int_0^{x_3} (x^4 - 6x^2 + m) dx$

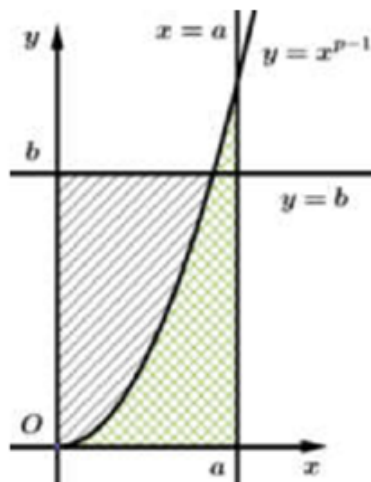
$$= \int_{x_3}^{x_4} (-x^4 + 6x^2 - m) dx \Rightarrow \frac{x_4^5}{5} - 2x_4^3 + mx_4 = 0 \Leftrightarrow x_4^5 - 10x_4^3 + 5mx_4 = 0.$$

$$\text{Từ đó có } x_4 \text{ là nghiệm của hệ phương trình: } \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^4 - 6x_4^2 + m = 0 & (3) \\ x_4^4 - 10x_4^2 + 5m = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (3) - (4)} \Rightarrow x_4^2 = m, \text{ thay } x_4^2 = m \text{ vào (3) có: } m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 5.$$

Đối chiếu điều kiện (*) ta có $m = 5 \Rightarrow a = 5$ và $b = 1$. Vậy $S = 6$.

Câu 46. (Chuyên Hạ Long - 2018) Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b . Xét hàm số: $y = x^{p-1}$ ($x > 0$) có đồ thị là (C) . Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a, y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



- A. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$ B. $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$ C. $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$ D. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Lời giải

Ta có: $S \leq S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_0^a (x^{p-1}) dx = \left(\frac{x^p}{p} \right) \Big|_0^a = \frac{a^p}{p}; \quad S_2 = \int_0^b \left(y^{\frac{1}{p-1}} \right) dy = \left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1} \right) \Big|_0^b = \left(\frac{y^q}{q} \right) \Big|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

$$\text{Vi: } \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q. \text{ Vậy } \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Câu 47. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018) Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{2018^3 + 1}{6}$. B. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$. C. $S_{\max} = \frac{2018^3 - 1}{6}$. D. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$.

Lời giải

Giả sử $A(a; a^2); B(b; b^2) (b > a)$ sao cho $AB = 2018$.

Phương trình đường thẳng d là: $y = (a+b)x - ab$. Khi đó

$$S = \int_a^b \left| (a+b)x - ab - x^2 \right| dx = \int_a^b \left((a+b)x - ab - x^2 \right) dx = \frac{1}{6} (b-a)^3.$$

$$\text{Vi } AB = 2018 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 2018^2 \Leftrightarrow (b-a)^2 (1 + (b+a)^2) = 2018^2.$$

$$\Rightarrow (b-a)^2 \leq 2018^2 \Rightarrow |b-a| = b-a \leq 2018 \Rightarrow S \leq \frac{2018^3}{6}. \text{ Vậy } S_{\max} = \frac{2018^3}{6} \text{ khi } a = -1009 \text{ và } b = 1009.$$

Câu 48. (THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018) Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4 - x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = -2, x = m, (-2 < m < 2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S = \frac{25}{3}$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } S = \int_{-2}^m |4 - x^2| dx = \frac{25}{3}.$$

$$\text{Phương trình } 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Bài ra $-2 < m < 2$ nên trên $(-2; m)$ thì $4 - x^2 = 0$ vô nghiệm.

$$\int_{-2}^m |4 - x^2| dx = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| \int_{-2}^m (4 - x^2) dx \right| = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^m \right| = \frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left| \left(4m - \frac{m^3}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right| = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} \right| = \frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} = \frac{25}{3} \\ 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}m^3 - 4m + 3 = 0 \\ \frac{1}{3}m^3 - 4m - \frac{41}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 12m + 9 = 0 \\ m^3 - 12m - 41 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(m) = m^3 - 12m$, với $m \in (-2; 2)$ có

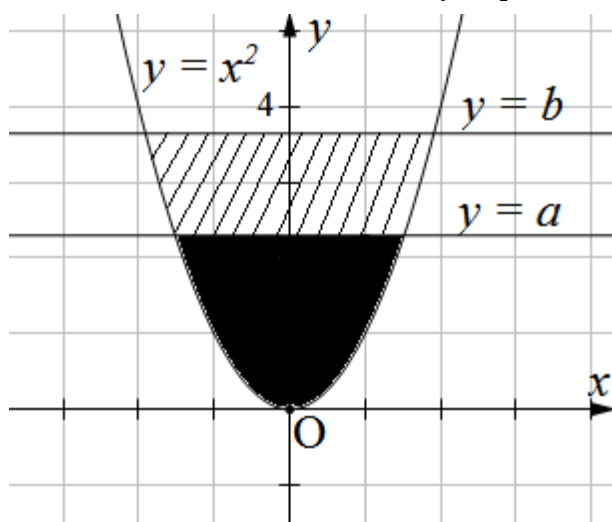
$$f'(m) = 3m^2 - 12 = 3(m^2 - 4) < 0, \forall m \in (-2; 2).$$

Do đó $f(m)$ nghịch biến trên $(-2; 2) \Rightarrow f(m) < f(-2) = 16 \Rightarrow m^3 - 12m - 41 < 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow m^3 - 12m + 9 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m^2 + 3m - 3) = 0 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy chỉ có $m = \frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 49. (THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018) Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ ($0 < a < b$) (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



A. $b = \sqrt[3]{4a}$.

B. $b = \sqrt[3]{2a}$.

C. $b = \sqrt[3]{3a}$.

D. $b = \sqrt[3]{6a}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = b$ là $x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = a$ là $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = b$ là

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{b}} (b - x^2) dx = 2 \left(bx - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{b}} = 2 \left(b\sqrt{b} - \frac{b\sqrt{b}}{3} \right) = \frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = a$ (phần tô màu đen) là

$$S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = 2 \left(ax - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = 2 \left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} \right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

$$\text{Do đó } S = 2S_1 \Leftrightarrow \frac{4b\sqrt{b}}{3} = 2 \cdot \frac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{b})^3 = 2(\sqrt{a})^3 \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4}a.$$

Câu 50. Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

A. $T = 99$.

B. $T = 64$.

C. $T = 32$.

D. $T = 72$.

Lời giải

Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị.

Khi đó, phương trình các parabol mới là $(P_1): y = -x^2 + 4$, $(P_2): y = -\frac{a}{4}x^2 + a$.

Gọi A, B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-2; 0), B(2; 0) \Rightarrow AB = 4$.

Gọi A, B là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M(-\sqrt{4-a}; a), N(\sqrt{4-a}; a)$.

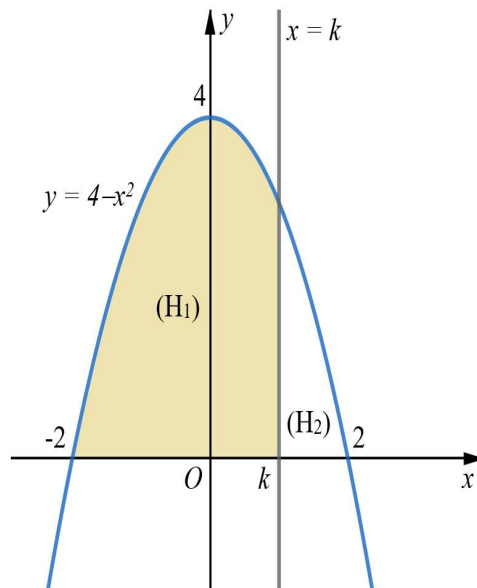
$$\text{Ta có } S_1 = 2 \int_a^4 \sqrt{4-y} \cdot dy = -\frac{4}{3} \left((4-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_a^4 = \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a}$$

$$S_2 = 2 \int_a^2 \left(-\frac{a}{4}x^2 + a \right) \cdot dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{12} + ax \right) \Big|_0^2 = \frac{8a}{3}.$$

$$\text{Theo giả thiết } S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64$$

Vậy $T = 64$.

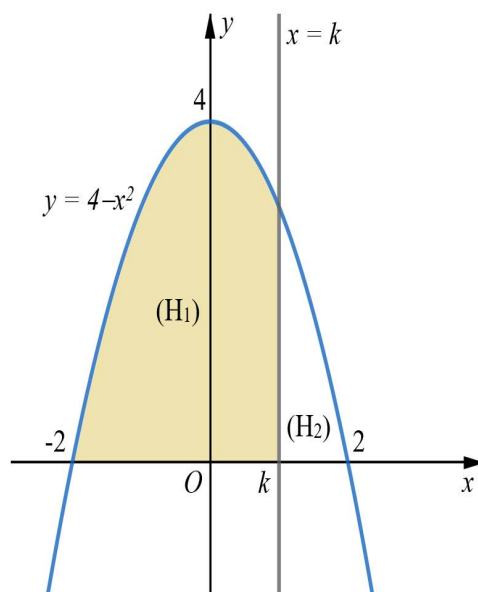
Câu 51. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2021) Trong mặt phẳng Oxy cho là hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = 4 - x^2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k$, ($-2 < k < 2$) chia (H) thành hai phần $(H_1), (H_2)$ như hình vẽ.



Biết rằng diện tích (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích (H_2) , hỏi giá trị k thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$.B. $(0;1)$.C. $(-1;0)$.D. $(1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi S, S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hình phẳng $(H), (H_1)$ và (H_2) .

$$\text{Ta có } S = S_1 + S_2, S_1 = \frac{20}{7} S_2 \Rightarrow S = \frac{27}{7} S_2.$$

$$\text{Mặt khác } S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3} \Rightarrow S_2 = \frac{7}{27} \cdot \frac{32}{3} = \frac{224}{81}.$$

$$\text{Mà } S_2 = \int_k^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_k^2 = \frac{16}{3} + \frac{k^3}{3} - 4k \text{ nên ta được } \frac{16}{3} + \frac{k^3}{3} - 4k = \frac{224}{81}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3}{3} - 4k + \frac{208}{81} = 0$$

$$\Leftrightarrow 27k^3 - 324k + 208 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3k - 2)(9k^2 + 6k - 104) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \text{ (do } k \in (-2; 2) \text{)}.$$

Câu 52. (Mã 101-2022) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^3 f(x) dx = F(3) - G(0) + a \quad (a > 0). \text{ Gọi } S \text{ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường}$$

$y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng:

A. 15.

B. 12.

C. 18.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$F(x), G(x) \text{ là nguyên hàm của } f(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + C$$

$$\Rightarrow S = \int_0^3 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^3 |C| dx = \left| \int_0^3 C dx \right| = |3C| = 15 \Rightarrow |C| = 5 \Rightarrow C = \pm 5$$

$$\int_0^3 f(x) dx = F(3) - F(0) = F(3) - (G(0) + C) = F(3) - G(0) - C = F(3) - G(0) + a$$

$$\Rightarrow a = -C = 5 \text{ (do } a > 0 \text{)}$$

Câu 53. (Mã 102 - 2022) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x) dx = F(5) - G(0) + a, (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bằng?

A. 4.

B. 15.

C. 25.

D. 20.

Lời giải

Chọn A

Đặt $G(x) = F(x) + C$ (C là hằng số).

$$\int_0^5 f(x) dx = F(5) - F(0) = F(5) - (G(0) - C) = F(5) - G(0) + C$$

Suy ra $C = a$.

$$S = \int_0^5 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^5 |a| dx = \int_0^5 a dx = 5a.$$

Theo giả thiết $5a = 20 \Leftrightarrow a = 4$

Câu 54. (Mã 103 - 2022) Biết $F(x); G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^4 f(x) dx = F(4) - G(0) + a \quad (a > 0).$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = F(x); y = G(x); x = 0; x = 4$. Khi $S = 8$ thì a bằng

A. 8

B. 4

C. 12

D. 2

Lời giải

Chọn D

Đặt $F(x) = G(x) + c$

$$S = \int_0^4 |F(x) - G(x)| dx \Rightarrow |F(x) - G(x)| = 2 \text{ hay } |c| = 2$$

$$\int_0^4 f(x) dx = F(4) - G(0) + a$$

$$\Leftrightarrow F(4) - F(0) = F(4) - G(0) + a$$

$$\Leftrightarrow -G(0) - c = -G(0) + a$$

$$\Leftrightarrow a = -c$$

$$\Rightarrow a = \pm 2$$

$$\text{Mà } a > 0 \Rightarrow a = 2$$

Câu 55. (Mã 104-2022) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - G(0) + a \quad (a > 0).$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x),$

$y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 2$, Khi $S = 6$ thì a bằng

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

$F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + C$ (với C là hằng số).

Do đó $F(0) = G(0) + C$ (1).

Lại có $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0)$

$$\Leftrightarrow F(2) - G(0) + a = F(2) - F(0) \Leftrightarrow F(0) = G(0) - a \quad (2).$$

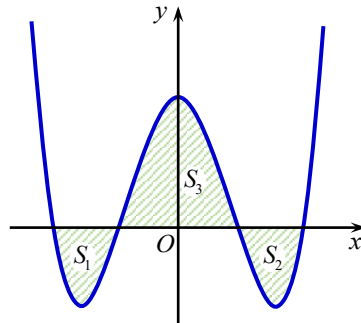
Từ (1) và (2) suy ra $C = -a$.

Khi đó $F(x) = G(x) - a$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |F(x) - G(x)| = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 2$ là

$$S = \int_0^2 |F(x) - G(x)| \cdot dx = \int_0^2 a \cdot dx = 2a = 6 \Rightarrow a = 3.$$

Câu 56. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và Ox có phần phía trên trục hoành là S_1 , phần dưới trục hoành x là S_2 và S_3 thỏa $S_1 + S_2 = S_3$. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a - b$ là



A. 2.

B. 7.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

Gọi m, n, p, q ($m < n < 0 < p < q$) là hoành độ các giao điểm của đồ thị với Ox

Do đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng nên

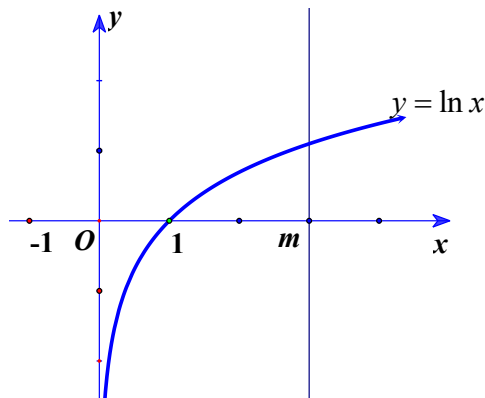
$$S_1 + S_2 = S_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} S_3 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^p (x^4 - 4x^2 + m) dx = \int_p^q -(x^4 - 4x^2 + m) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^q (x^4 - 4x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{q^5}{5} - \frac{4q^3}{3} + mq = 0 \Leftrightarrow \frac{q^4}{5} - \frac{4q^2}{3} + m = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } q^4 - 4q^2 + m = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $m = \frac{20}{9}$. Vậy $a = 20, b = 9 \Rightarrow a - b = 11$

Câu 57. (THPT Nguyễn Tất Thành-Đh-SP-HN-2022) Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = m$, với $m > 1$. Khi hình phẳng D có diện tích bằng 1, giá trị của m thuộc khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(\frac{7}{2}; 4\right)$.

B. $\left(3; \frac{7}{2}\right]$.

C. $\left(\frac{5}{2}; 3\right]$.

D. $\left(2; \frac{5}{2}\right]$.

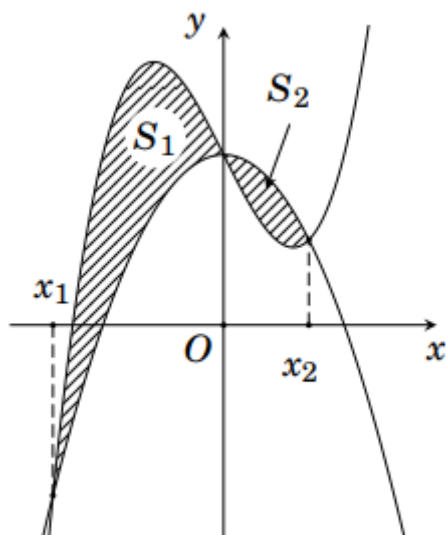
Lời giải

Chọn C

♦ Có $S = \int_1^m |\ln x| dx = \int_1^m \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^m = m \ln m - m + 1 = 1$

$\Leftrightarrow m(\ln m - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln m = 1 \Leftrightarrow m = e \approx 2,72 \in \left(\frac{5}{2}; 3\right]$.

Câu 58. (Sở Hà Tĩnh 2022) Cho đường cong $(C): y = x^3 + kx + 2$ và parabol $P: y = -x^2 + 2$ tạo thành hai miền phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên.



Biết rằng $S_1 = \frac{8}{3}$, giá trị của S_2 bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$x^3 + kx + 2 = -x^2 + 2 \Leftrightarrow x(x^2 + x + k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x + k = 0 \end{cases}$$

Hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt nên phương trình $x^2 + x + k = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ khác } 0 \text{ và thỏa mãn } x_1 < 0 < x_2. \text{ Do đó ta có } \begin{cases} k < 0 \\ x_2 = -1 - x_1 \\ k = -x_1^2 - x_1 \end{cases}$$

Trên đoạn $[x_1; 0]$, $x^3 + kx + 2 \geq -x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + kx \geq 0$. Theo bài ra, diện tích $S_1 = \frac{8}{3}$ nên

$$\int_{x_1}^0 |x^3 + x^2 + kx| dx = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 (x^3 + x^2 + kx) dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{kx^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^0 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow -(3x_1^4 + 4x_1^3 + 6kx_1^2) = 32$$

$$\Leftrightarrow 3x_1^4 + 4x_1^3 + 6(-x_1^2 - x_1)x_1^2 = -32$$

$$\Leftrightarrow 3x_1^4 + 2x_1^3 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 2)(3x_1^3 - 4x_1^2 + 8x_1 - 16) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ (vì } x_1 < 0 \text{)}.$$

Với $x_1 = -2 \Rightarrow k = -2, x_2 = 1$ và $x^3 + x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in [0; 1]$, ta có

$$S_2 = -\int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = -\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

Câu 59. (Sở Ninh Bình 2022) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = (m+1)x + 5$ có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{16}{3}$.
- B. $\frac{48}{3}$.
- C. $\frac{64}{3}$.
- D. $\frac{32}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 + 2x + 1 = (m+1)x + 5 \Leftrightarrow x^2 + (1-m)x - 4 = 0.$$

Với mọi m ta đều có $ac = -4 < 0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$. Theo

định lí Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$ và

$$x_2 - x_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{(m-1)^2 + 16}.$$

Khi đó hình phẳng luôn tồn tại và có diện tích là

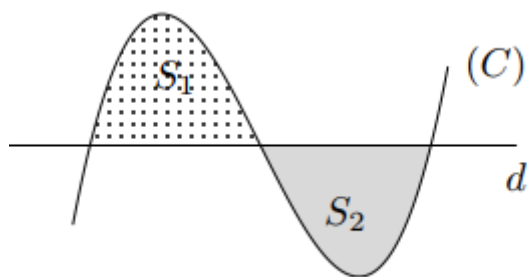
$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} |x^2 + (1-m)x - 4| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + (1-m)x - 4) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^3}{3} + (1-m)\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = \frac{1}{6} \left| (2x^3 + 3(1-m)x^2 - 24x) \Big|_{x_1}^{x_2} \right| \\ &= \left| \frac{m^2 - 2m + 17}{6} (x_2 - x_1) \right| = \frac{(\sqrt{m^2 - 2m + 17})^3}{6} = \frac{(\sqrt{(m-1)^2 + 16})^3}{6} \geq \frac{4^3}{6} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $\frac{32}{3}$.

Câu 60. (Sở Ninh Bình 2022) Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d :

$y = -45m - 2$ cùng với đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + x + 1$ tạo thành hai miền kín có diện tích lần

lượt là S_1, S_2 thỏa mãn $S_1 = S_2$ (xem hình vẽ). Số phần tử của tập X là



- A. 0.
- B. 2.**
- C. 1.
- D. 9.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương đồ thị (C) có hai điểm cực trị và tâm đối xứng I của (C) thuộc d . Ta có $f'(x) = x^2 - 4mx + 1$ nên hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi

$$\Delta' = (2m)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[m > \frac{1}{2} \text{ hoặc } m < -\frac{1}{2} \right].$$

Lại có

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4m \Leftrightarrow x = 2m.$$

Với $x = 2m$ thì $f(x) = \frac{-16}{3}m^3 + 2m + 1$ nên $I\left(2m; \frac{-16}{3}m^3 + 2m + 1\right)$. Suy ra $I \in d$ khi và chỉ khi

$$\frac{-16}{3}m^3 + 2m + 1 = -45m - 2 \Leftrightarrow 16m^3 - 141m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-6 \pm \sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Dễ thấy } m = \frac{-6 + \sqrt{33}}{4} \text{ không thỏa mãn, do đó } X = \left\{ 3; \frac{-6 - \sqrt{33}}{4} \right\}.$$

Câu 61. (THPT Kim Liên - Hà Nội - 2022) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol

$y = x^2 + 2x - 1$ và các đường thẳng $y = m$, $x = 0$, $x = 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số

$m \in [-4040; -3]$ để $S \leq 2021$?

- A. 2019.
- B. 2020.
- C. 2021.
- D. 2018.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2 \geq -2 \forall x \in \mathbb{R}$.

mà $m \in [-4040; -3]$ nên $m < x^2 + 2x - 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } S = \int_0^1 (x^2 + 2x - 1 - m) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - x - mx \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - m.$$

$$\text{Khi đó: } S \leq 2021 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - m \leq 2021 \Leftrightarrow m \geq -\frac{6062}{3}.$$

Vì $m \in [-4040; -3]$, $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2018 số nguyên m .

Câu 62. (HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019) Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000\pi$.

A. 18.

B. 20.

C. 19.

D. 21.

Lời giải

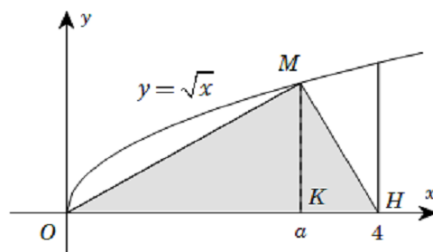
Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V = \pi \int_{-|m|}^{|m|} (m^2 - x^2) dx = \pi \left(m^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-|m|}^{|m|} = \frac{4\pi m^2 |m|}{3}$

Ta có: $V < 1000\pi \Leftrightarrow \frac{4\pi m^2 |m|}{3} < 1000\pi \Leftrightarrow |m|^3 < 750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750} < m < \sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750} \approx 9,08$ và $m \neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của m .

Câu 63. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



A. $a = 2$.

B. $a = 2\sqrt{2}$.

C. $a = \frac{5}{2}$.

D. $a = 3$.

Lời giải

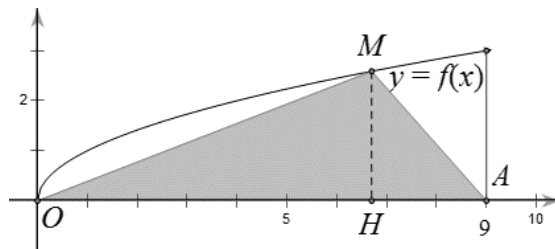
Ta có: $V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$. Mà $V = 2V_1 \Rightarrow V_1 = 4\pi$.

Gọi K là hình chiếu của M trên $Ox \Rightarrow OK = a, KH = 4 - a, MK = \sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK , hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là

$OH = 4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a = 3$.

Câu 64. (Chuyên Lê Hồng Phong - Tphcm - 2018) Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , đường thẳng $x = 9$ và trục Ox . Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox . Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM .



- A. $S = 3$. B. $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. C. $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $S = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $V_1 = \pi \int_0^9 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{81\pi}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên trục Ox , đặt $OH = m$ (với $0 < m \leq 9$), ta có $M(m; \sqrt{m})$, $MH = \sqrt{m}$ và $AH = 9 - m$.

Suy ra $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot OH + \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot AH = \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot OA = 3m\pi$.

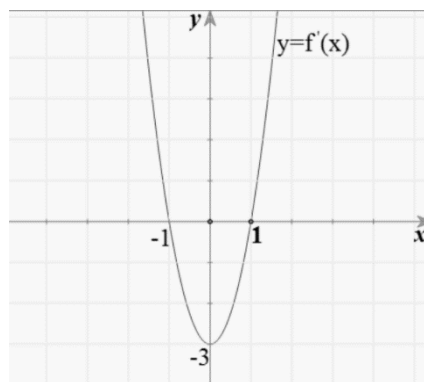
Theo giả thiết, ta có $V_1 = 2V_2$ nên $\frac{81\pi}{2} = 6m\pi \Leftrightarrow m = \frac{27}{4}$. Do đó $M\left(\frac{27}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng OM là $y = \frac{2\sqrt{3}}{9}x$.

Diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM là

$$S = \int_0^{\frac{27}{4}} \left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x \right) dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{9}x^2 \right) \Big|_0^{\frac{27}{4}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox .



- A. $\frac{725}{35}\pi$. B. $\frac{1}{35}\pi$. C. 6π . D. đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 1)$.

Khi đó $f(x) = \int f'(x) dx = x^3 - 3x + C$.

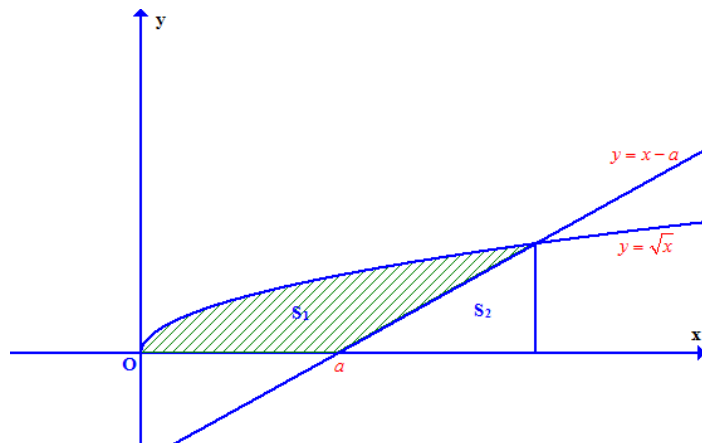
Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ là:

$$\begin{cases} f(x) = 4 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + C = 4 \\ 3(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ C = 2 \end{cases} \text{ suy ra } f(x) = x^3 - 3x^2 + 2(C).$$

$+(C) \cap Ox \Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x = -2; x = 1$.

$$+\text{Khi đó } V = \pi \int_{-2}^1 (x^3 - 3x^2 + 2)^2 dx = \frac{729}{35} \pi.$$

Câu 66. (Chuyên Vĩnh Phúc 2022) Cho đường thẳng $y = x - a$ (a là tham số thực dương) và đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên dưới. Khi $S_1 = \frac{5}{3}S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{5}{2}; \frac{8}{3}\right)$.

B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{5}\right)$.

C. $\left(\frac{9}{5}; \frac{5}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

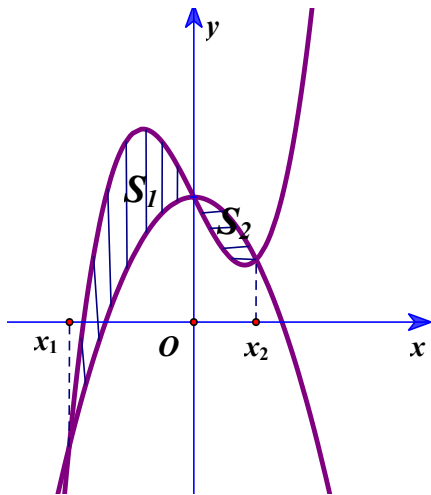
Phương trình hoành độ giao điểm của $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$ và $d: y = g(x) = x - a$ là:

$$\sqrt{x} = x - a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x = (x - a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } S_2 = \frac{1}{2} \cdot (x_0 - a)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2} - a \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2} \right)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_1 &= \int_0^{x_0} \sqrt{x} dx - S_2 \Leftrightarrow \frac{8}{3} S_2 = \int_0^{x_0} \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2} \right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow 2(1 + \sqrt{4a + 1})^4 = (2a + 1 + \sqrt{4a + 1})^3 \Rightarrow a = 2. \end{aligned}$$

Câu 67. (Cụm trường Nam Định 2022) Cho đường cong $(C): y = x^3 + mx + 2$ (với m là tham số thực) và parabol $(P): y = -x^2 + 2$ tạo thành hai miền phẳng có diện tích S_1, S_2 có diện tích như hình vẽ sau



Biết $S_1 = \frac{8}{3}$, giá trị của S_2 bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có: $x^3 + x^2 + mx = (x - x_1)x(x - x_2) \Leftrightarrow x^3 + x^2 + mx = x^3 - (x_1 + x_2)x^2 + x_1x_2x$. Cân bằng hệ

số ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = m \end{cases} \Rightarrow m = -x_1^2 - x_1$.

+ Vì $S_1 = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_{x_1}^0 (x^3 + x^2 + mx) dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_1^3}{3} + \frac{mx_1^2}{2} = -\frac{8}{3} \Rightarrow \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_1^3}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow x_1 = -2$.

+ Do đó: $m = -2, x_2 = 1$ nên $S_2 = -\int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = \frac{5}{12}$.

Câu 68. (Sở Bình Thuận 2022) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số

$y = x^3 + 2x^2 - 2mx - 1$ (m là tham số) và $y = x^3 + x^2 + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{31}{3}$.
B. $\frac{28}{3}$.
C. $\frac{32}{3}$.
D. $\frac{29}{3}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + 2x^2 - 2mx - 1 = x^3 + x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 4 = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2m; x_1x_2 = -4 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4m^2 + 16$.

$$S \int_{x_1}^{x_2} |x^2 - 2mx - 4| dx = \left[\frac{x-m}{3} (x^2 - 2mx - 4) - \frac{8+2m^2}{3} x - \frac{4m}{3} \right] \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{8+2m^2}{3} |x_2 - x_1| = \frac{4}{3} \sqrt{(m^2 + 4)^3} \geq \frac{32}{3}$$

$$\text{Vậy } S_{\min} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 69. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2022) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $d: y = m(x+1)$ cắt nhau tạo thành hai hình phẳng có cùng diện tích. Khi đó giá trị của m thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau?

A. $m \in (4; 5)$.

B. $m \in (-5; -3)$.

C. $m \in (2; 4)$.

D. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn D

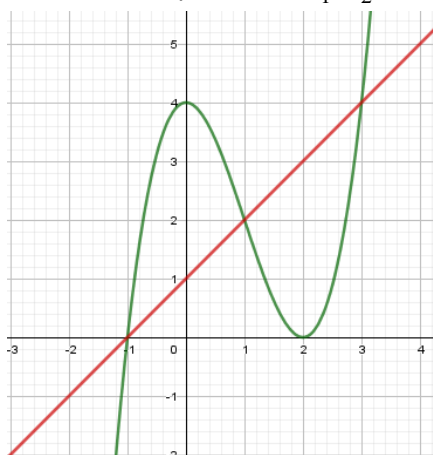
Xét phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 = m(x+1)$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - 4x + 4 - m = 0 \end{cases}$$

Phương trình $x^2 - 4x + 4 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $m > 0$.

Giả sử x_1, x_2 ($-1 < x_1 < x_2$) là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 4 - m = 0$ và hai hình phẳng cần tìm có diện tích là S_1, S_2 .



$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_{-1}^{x_1} (x^3 - 3x^2 + 4 - mx - m) dx = \int_{x_1}^{x_2} (mx + m - x^3 + 3x^2 - 4) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{x_1} (x^3 - 3x^2 + 4 - mx - m) dx + \int_{x_1}^{x_2} (x^3 - 3x^2 + 4 - mx - m) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{x_2} (x^3 - 3x^2 + 4 - mx - m) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2^4}{4} - x_2^3 + 4x_2 - \frac{mx_2^2}{2} - mx_2 - \left(\frac{1}{4} + 1 - 4 - \frac{m}{2} + m \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2^4 - 4x_2^3 + 16x_2 - 2mx_2^2 - 4mx_2 + 11 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2^4 - 4x_2^3 + 4x_2^2 - mx_2^2) + (-4x_2^2 + 16x_2 - 16 + 4m) + (-mx_2^2 + 4mx_2 - 4m + m^2) - 8mx_2 + 27 - 2m - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2^2(x_2^2 - 4x_2 + 4 - m) - 4(x_2^2 - 4x_2 + 4 - m) - m(x_2^2 - 4x_2 + 4 - m) - 8mx_2 + 27 - 2m - m^2 = 0 \quad (1)$$

Mặt khác x_2 là một nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 4 - m = 0$ nên $x_2^2 - 4x_2 + 4 - m = 0$.

Do đó: (1) $\Leftrightarrow -8mx_2 + 27 - 2m - m^2 = 0$

Giải hệ: $\begin{cases} x_2^2 - 4x_2 + 4 = m \\ -8mx_2 + 27 - 2m - m^2 = 0 \end{cases}$ ta được: $x_2 = -1, x_2 = 3$. So với điều kiện $-1 < x_1 < x_2$, ta

nhận $x_2 = 3$.

Suy ra: $m = 1$.

Nhận xét: đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có tâm đối xứng là điểm $I(1; 2)$.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $d: y = m(x+1)$ cắt nhau tạo thành hai hình phẳng có cùng diện tích khi đường thẳng $d: y = m(x+1)$ đi qua điểm $I(1; 2)$. Suy ra: $m = 1$.