# **BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC**

## **A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

**I. KHÁI NIỆM**

**1. Hàm số liên tục tại một điểm**

Cho hàm số  xác định trên khoảng  và . Hàm số  được gọi là liên tục tại  nếu .
*Nhận xét:* Hàm số  không liên tục tại  được gọi là gián đoạn tại .

**2. Hàm số liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn**

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Hàm số  được gọi là liên tục trên khoảng  nếu hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Hàm số  được gọi là liên tục trên đoạn  nếu hàm số đó liên tục trên khoảng  và .

*Chú ý:* Khái niệm hàm số liên tục trên các tập hợp có dạng ,  được định nghĩa tương tự.
*Nhận xét:* Đồ thị hàm số liên tục trên một khoảng là "đường liền" trên khoảng đó.

**II. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN**

**1. Tính liên tục của một số hàm sơ cấp cơ bản**

-Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Các hàm đa thức và hai hàm số lượng giác  liên tục trên .

Các hàm phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác  liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Hàm căn thức  liên tục trên nửa khoảng .

**2. Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục**

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:
Giả sử  và  là hai hàm số liên tục tại điểm . Khi đó:
a) Các hàm số  và  liên tục tại ;
b) Hàm số  liên tục tại  nếu .

## **B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

## **Dạng 1: Hàm số liên tục tại một điểm**

### **1. Phương pháp**

*Ta cần phải nắm vững định nghĩa:*

Cho hàm số  xác định trên khoảng và  Hàm số gọi là liên tục tại  nếu 

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1:**  Cho  với  Phải bổ sung thêm giá trị  bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục tại 

** Lời giải**

**Ví dụ 2:**  Cho hàm số  Giá trị của a để  liên tục tại  là bao nhiêu?

** Lời giải**

**Ví dụ 3:** Cho hàm số  Tìm b để  liên tục tại 

** Lời giải**

**Ví dụ 4:**  Cho hàm số Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại 

** Lời giải**

**Ví dụ 5:** Tìm số a để hàm số sau liên tục tại điểm 

; 

** Lời giải**

**Ví dụ 6:**  Cho hàm số  Tìm giá trị của m để  liên tục tại .

** Lời giải**

**Ví dụ 7:** Cho hàm số  Tìm giá trị của a để  liên tục tại .

** Lời giải**

## **Dạng 2. Hàm số liên tục trên tập xác định**

### **1. Phương pháp**

* Để chứng minh hàm số  liên tục trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các nhận xét để suy ra kết luận.
* Khi nói xét tính liên tục của hàm số (mà không nói rõ gì hơn) thì ta hiểu phải xét tính liên tục trên tập xác định của nó.
* Tìm các điểm gián đoạn của hàm số tức là xét xem trên tập xác định của nó hàm số không liên tục tại các điểm nào
* Hàm số  được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.
* Hàm số  được gọi là liên tục trên đoạn  nếu nó liên tục trên  và 

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) b)

** Lời giải**

**Ví dụ 2.** Tìm các giá trị của  để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

a) b)

** Lời giải**

## **Dạng 3. Số nghiệm của phương trình trên một khoảng**

### **1. Phương pháp**

* Chứng minh phương trình  có ít nhất một nghiệm
* Tìm hai số a và b sao cho 
* Hàm số  liên tục trên đoạn 
* Phương trình  có ít nhất một nghiệm 
* Chứng minh phương trình có ít nhất k nghiệm
* Tìm k cặp số  sao cho các khoảng  **rời nhau** và



* Phương trình có ít nhất một nghiệm 
* Khi phương trình có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :
*  không còn chứa tham số hoặc chứa tham số nhưng dấu không đổi.
* Hoặc còn chứa tham số nhưng tích f(a).f(b) luôn âm.

### **2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1:**  Tìm m để phương trình sau có nghiệm: 

** Lời giải**

**Ví dụ 2:**  Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

a) 

b) 

c) 

** Lời giải**

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) b)

** Lời giải**

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a)  b) 

** Lời giải**

**Ví dụ 5.** Chứng minh rằng phương trình  luôn có nghiệm  với  và .

** Lời giải**

## **C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA**

**Bài 1.** Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số  tại điểm .

** Lời giải**

**Bài 2.** Trong các hàm số có đồ thị ở Hình , hàm số nào liên tục trên tập xác định của hàm số đó? Giải thích.



** Lời giải**

**Bài 3.** Bạn Nam cho rằng: "Nếu hàm số  liên tục tại điểm , còn hàm số  không liên tục tại , thì hàm số  không liên tục tại  ". Theo em, ý kiến của bạn Nam đúng hay sai? Giải thích.

** Lời giải**

**Bài 4.** Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau trên tập xác định của hàm số đó:
a)  b) ;

c) .

** Lời giải**

**Bài 5.** Cho hàm số  

nếu

nếu

a) Với , xét tính liên tục của hàm số tại .
b) Với giá trị nào của  thì hàm số liên tục tại  ?
c) Với giá trị nào của  thì hàm số liên tục trên tập xác định của nó?

** Lời giải**

**Bài 6.** *Hình 16* biểu thị độ cao  của một quả bóng được đá lên theo thời gian , trong đó .



a) Chứng tỏ hàm số  liên tục trên tập xác định.
b) Dựa vào đồ thị hãy xác định .

** Lời giải**

## **D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1.** Tìm giá trị thực của tham số  để hàm số  liên tục tại 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 2.** Tìm giá trị thực của tham số  để hàm số  liên tục tại 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 3.** Tìm giá trị thực của tham số  để hàm số  liên tục tại 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 4.** Biết rằng hàm số  liên tục tại  (với  là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 5.** Hàm số  liên tục tại:

**A.** mọi điểm trừ  **B.** mọi điểm 

**C.** mọi điểm trừ  **D.** mọi điểm trừ 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 6.** Số điểm gián đoạn của hàm số  là:

**A.  B.  C.  D. **

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  để hàm số  liên tục trên ?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 8.** Biết rằng hàm số  tục trên  Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị của tham số  để hàm số  liên tục trên 

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 10.** Biết rằng  liên tục trên đoạn  (với  là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị  là đúng?

**A.**  là một số nguyên. **B.**  là một số vô tỉ. **C.**  **D.** 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 11.** Xét tính liên tục của hàm số  Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.**  không liên tục trên  **B.**  không liên tục trên 

**C.**  gián đoạn tại  **D.**  liên tục trên 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 12.** Tìm giá trị nhỏ nhất của  để hàm số  liên tục tại .

**A. **. **B.**  **C.**  **D. **

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 13.** Tìm giá trị lớn nhất của  để hàm số  liên tục tại 

**A.  B.  C.  D. **

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 14.** Xét tính liên tục của hàm số **** Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  liên tục tại  **B.**  liên tục trên 

**C.**  không liên tục trên  **D.**  gián đoạn tại 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 15.** Tìm các khoảng liên tục của hàm số  Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** Hàm số liên tục tại .

**B.** Hàm số liên tục trên các khoảng 

**C.** Hàm số liên tục tại .

**D.** Hàm số liên tục trên khoảng .

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 16.** Hàm số  có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 17.** Cho hàm số  Hàm số  liên tục tại:

**A.** mọi điểm thuộc . **B.** mọi điểm trừ .

**C.** mọi điểm trừ . **D.** mọi điểm trừ  và .

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 18.** Cho hàm số . Hàm số  liên tục tại:

**A.** mọi điểm thuộc . **B.** mọi điểm trừ .

**C.** mọi điểm trừ . **D.** mọi điểm trừ  và .

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 19.** Số điểm gián đoạn của hàm số  là:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 20.** Tính tổng  gồm tất cả các giá trị  để hàm số  liên tục tại .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 21.** Cho hàm số  Hàm số  liên tục tại:

**A.** mọi điểm thuộc  **B.** mọi điểm trừ 

**C.** mọi điểm trừ  **D.** mọi điểm trừ 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 22.** Cho hàm số  Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

**A.** Hàm số đã cho liên tục trên 

**B.** Phương trình  không có nghiệm trên khoảng 

**C.** Phương trình  có nghiệm trên khoảng 

**D.** Phương trình  có ít nhất hai nghiệm trên khoảng 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 23.** Cho phương trình  Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** Phương trình không có nghiệm trong khoảng 

**B.** Phương trình không có nghiệm trong khoảng 

**C.** Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng 

**D.** Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 24.** Cho hàm số . Số nghiệm của phương trình  trên  là:

**A.  B.**  **C.**  **D. **

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 25.** Cho hàm số  liên tục trên đoạn  sao cho , . Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình  trên đoạn :

**A.** Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm.

**C.** Có đúng một nghiệm. **D.** Có đúng hai nghiệm.

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

 **Câu 26.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  thuộc khoảng  để phương trình  có ba nghiệm phân biệt  thỏa mãn ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

*Lời giải: ........................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*

*...............................................................................................................................*