

Giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{2} = \frac{(2\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x+2})} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+2}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } M < \frac{2}{3} \text{ khi } M - \frac{2}{3} < 0 \text{ hay } \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+2}} - \frac{2}{3} < 0,$$

$$\text{suy ra } \frac{3(\sqrt{x}+1) - 2(\sqrt{x+2})}{3(\sqrt{x+2})} < 0 \text{ hay } \frac{\sqrt{x}-1}{3(\sqrt{x+2})} < 0.$$

Mà $3(\sqrt{x}+2) > 0$ với $x \geq 0$ nên (1) dẫn đến $\sqrt{x}-1 < 0$ hay $\sqrt{x} < 1$ suy ra $x < 1$. Kết hợp với điều kiện ta có $M < \frac{2}{3}$ khi $0 \leq x < 1$.

$$\text{c) } M > \frac{3}{5} \text{ khi } M - \frac{3}{5} > 0 \text{ hay } \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+2}} - \frac{3}{5} > 0,$$

$$\text{suy ra } \frac{5(\sqrt{x}+1) - 3(\sqrt{x+2})}{5(\sqrt{x+2})} > 0 \text{ hay } \frac{2\sqrt{x}-1}{5(\sqrt{x+2})} > 0.$$

Mà $5(\sqrt{x}+2) > 0$ với $x \geq 0$ nên (2) dẫn đến $2\sqrt{x}-1 > 0$ hay $\sqrt{x} > \frac{1}{2}$ suy ra $x > \frac{1}{4}$.

Kết hợp với điều kiện ta có $M > \frac{3}{5}$ khi $x > \frac{1}{4}, x \neq 4$.

Bài 6. Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm giá trị lớn nhất của M .

c) Tìm các số nguyên x để M có giá trị nguyên.

Giải.

$$\text{a) } M = \left(\frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{2\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ & \frac{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) $M = \frac{\sqrt{x}+1+1}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$. Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0$ do đó $\sqrt{x}+1 \geq 1$ suy ra $\frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1$. Từ đó suy ra $M \leq 1+1=2$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$. Vậy giá trị lớn nhất của M bằng 2 khi $x=0$.

c) $M = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$. M có giá trị nguyên khi $\sqrt{x}+1$ là ước của 1.

Mà $\sqrt{x}+1 > 0$ nên $\sqrt{x}+1=1$ suy ra $x=0$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy M có giá trị nguyên khi $x=0$.

Bài 7. Cho biểu thức $M = \left(\frac{2x+3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Chứng minh $M > \sqrt{M}$.

c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để M có giá trị nguyên.

Giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \left(\frac{2x+3\sqrt{x}+\sqrt{x}+1-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

b) Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x}+5 > 0$, $\sqrt{x}+1 > 0$ do đó $M > 0$, $\sqrt{M}$ xác định.

$$\text{Xét } M-1 = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{\sqrt{x}+5-(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{4}{\sqrt{x}+1}.$$

Do $\sqrt{x}+1 > 0$ nên $\frac{4}{\sqrt{x}+1} > 0$ hay $M-1 > 0$, suy ra $M > 1$ nên $\sqrt{M} > 1$.

Ta có $M - \sqrt{M} = \sqrt{M}(\sqrt{M} - 1) > 0$ nên $M > \sqrt{M}$.

c) Ta có $M = \frac{\sqrt{x}+1+4}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1}$. Mà $\frac{4}{\sqrt{x}+1} > 0$ nên $M > 1$.

Vì $\sqrt{x} > 0$ nên $\sqrt{x}+1 > 1$ do đó $\frac{4}{\sqrt{x}+1} < 4$ suy ra $M < 5$.

Vậy $1 < M < 5$. Để M nhận giá trị nguyên thì $M \in \{2; 3; 4\}$.

- $M = \frac{\sqrt{x}+1+4}{\sqrt{x}+1} = 2$ hay $2(\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}+5$ suy ra $\sqrt{x} = 3$ hay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện).
- $M = \frac{\sqrt{x}+1+4}{\sqrt{x}+1} = 3$ hay $3(\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}+5$ suy ra $2\sqrt{x} = 2$.

Do đó $\sqrt{x} = 1$ hay $x = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

- $M = \frac{\sqrt{x}+1+4}{\sqrt{x}+1} = 4$ hay $4(\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}+5$ suy ra $3\sqrt{x} = 1$.

Do đó $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$ hay $x = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x \in \left\{1; 9; \frac{1}{9}\right\}$.

Bài 8. Cho biểu thức $M = \frac{x+\sqrt[3]{x}-2}{x-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$ với $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm x để $M = \frac{1}{2}$.

Giải.

a) Đặt $a = \sqrt[3]{x}$, khi đó $a^3 = x$ và $a \neq 1$. Ta có

$$M = \frac{a^3+a-2}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{a-1}$$

$$= \frac{a^3+a-2-a+1+a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{a^3+a^2+a}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{a(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{a}{a-1}.$$

Suy ra $M = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$.

b) $M = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{1}{2}$ hay $2\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}-1$ suy ra $\sqrt[3]{x} = -1$.

Do đó $x = -1$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $x = -1$.

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{1-2x}$ với $x \neq \frac{1}{2}$.

Bài 2. Tính:

a) $a = \sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}}$;

b) $b = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$;

c) $c = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

Bài 3. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Bài 4. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x+\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Chứng minh $Q < \frac{1}{3}$.

c) Tìm x để $Q = \frac{1}{2\sqrt{x}+1}$.

Bài 5. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $\frac{1}{P} \geq \frac{\sqrt{x}+9}{8}$.

Bài 6. Cho $(x+\sqrt{x^2+9})(y+\sqrt{y^2+9})=9$. Tính giá trị của biểu thức $M=x+y$.

Bài 7. Tìm x sao cho $x+6\sqrt{x+8}+4\sqrt{6-2x}=27$.

Bài 8. Tìm x sao cho $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

Hướng dẫn - Lời giải - Đáp số

Bài 1. $M = \frac{\sqrt{(2x-1)^2}}{1-2x} = \frac{2x-1}{1-2x} \vee \frac{1-2x}{1-2x}; x \neq \frac{1}{2}$.

- Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì $M = \frac{2x-1}{1-2x} = -1$.
- Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $M = \frac{1-2x}{1-2x} = 1$.

Bài 2. a) $a = \sqrt{7+2\sqrt{7}+1} - \sqrt{7-2\sqrt{7}+1} = \sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}$

$$= \sqrt{7}+1 - (\sqrt{7}-1) = 2.$$

b) Đặt $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}; y = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ thì $x^3+y^3=14, xy=-1$.

Có $b=x+y$ nên $b^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=14-3b$.

Do đó $b^3+3b-14=0$ hay $b^3-8+3b-6=0$.

Suy ra $(b-2)(b^2+2b+4)+3(b-2)=0$, do đó $(b-2)(b^2+2b+7)=0$.

Mà $b^2+2b+7=(b+1)^2+6>0$ nên $b-2=0$ hay $b=2$.

c) $c = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}$

$$= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \dots + \sqrt{100}-\sqrt{99}$$

$$= -1 + \sqrt{100} = 9.$$

Bài 3. a) $P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} (x>0)$.

b) $P = \sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$.

Do đó $P \geq 3$. Dấu " $=$ " xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ hay $x=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 khi $x=1$.

Bài 4. a) $Q = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Xét $\frac{1}{3} - Q = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{x + \sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x}}{3(x + \sqrt{x} + 1)}$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{3(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)}.$$

Với $x \geq 0$, ta có $3(x + \sqrt{x} + 1) > 0$. Mà $x \neq 1$ nên $\sqrt{x} - 1 \neq 0$, do đó $(\sqrt{x} - 1)^2 > 0$. Suy ra $\frac{1}{3} - Q > 0$ hay $Q < \frac{1}{3}$.

c) $Q = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2\sqrt{x} + 1}$ hay $\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1) = x + \sqrt{x} + 1$.

Chuyển vế, rút gọn ta được $x = 1$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy không có giá trị nào của x để $Q = \frac{1}{2\sqrt{x} + 1}$.

Bài 5. a) $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) $\frac{1}{P} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \geq \frac{\sqrt{x} + 9}{8}$ dẫn đến $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 9}{8} \geq 0$

hay $\frac{16\sqrt{x} - (x + 10\sqrt{x} + 9)}{8(\sqrt{x} + 1)} \geq 0$.

Với $x > 0$ ta có $8(\sqrt{x} + 1) > 0$ nên từ (1) suy ra $16\sqrt{x} - x - 10\sqrt{x} - 9 \geq 0$.

Do đó $-x + 6\sqrt{x} - 9 \geq 0$ suy ra $x - 6\sqrt{x} + 9 \leq 0$ hay $(\sqrt{x} - 3)^2 \leq 0$.

Mặt khác, với $x > 0$ ta luôn có $(\sqrt{x} - 3)^2 \geq 0$.

Khi đó $(\sqrt{x} - 3)^2 = 0$, suy ra $\sqrt{x} = 3$, do đó $x = 9$.

Bài 6. Ta có $(\sqrt{x^2 + 9} + x)(\sqrt{x^2 + 9} - x) = x^2 + 9 - x^2 = 9$.

$(\sqrt{y^2 + 9} + y)(\sqrt{y^2 + 9} - y) = y^2 + 9 - y^2 = 9$.

Do đó: $\sqrt{x^2 + 9} + x = \sqrt{y^2 + 9} - y$,

$$\sqrt{y^2+9}+y=\sqrt{x^2+9}-x \quad (1)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được:

$$\sqrt{x^2+9}+x+\sqrt{y^2+9}+y=\sqrt{x^2+9}-x+\sqrt{y^2+9}-y.$$

Suy ra $x+y=-x-y$ hay $2x+2y=0$. Vậy $x+y=0$.

Bài 7. Điều kiện xác định: $-8 \leq x \leq 3$.

Phương trình đã cho có dạng: $-x-6\sqrt{x+8}-4\sqrt{6-2x}+27=0$

$$\text{hay } (x+8-6\sqrt{x+8}+9)+(6-2x-4\sqrt{6-2x}+4)=0,$$

$$\text{suy ra } (\sqrt{x+8}-3)^2+(\sqrt{6-2x}-2)^2=0.$$

Vì $a^2 \geq 0$ với mọi a , dấu "=" xảy ra khi $a=0$ nên

$$\begin{cases} \sqrt{x+8}-3=0 \\ \sqrt{6-2x}-2=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \sqrt{x+8}=3 \\ \sqrt{6-2x}=2 \end{cases}. \text{ Giải hệ phương trình ta được } x=1.$$

Bài 8. Điều kiện xác định: $2 \leq x \leq 4$.

Phương trình đã cho có dạng: $2x^2-12x+22-2\sqrt{x-2}-2\sqrt{4-x}=0$

$$\text{hay } 2(x^2-6x+9)+(x-2-2\sqrt{x-2}+1)+(4-x-2\sqrt{4-x}+1)=0.$$

$$\text{Suy ra } 2(x-3)^2+(\sqrt{x-2}-1)^2+(\sqrt{4-x}-1)^2=0.$$

Lập luận tương tự Bài 7 ta tìm được $x=3$.

Chủ đề 3

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Kiến thức cần nhớ

- Cho phương trình $ax^2+bx+c=0, a \neq 0$ (1) có $\Delta=b^2-4ac$; với $b=2b'$ ta có $\Delta'=b'^2-ac$.
- Nếu $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$) thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$) thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$ ($x_1=x_2=\frac{-b'}{a}$).

- Nếu $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$) thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\left(x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \right).$$
- Định lý Viète: Nếu phương trình $a^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$
- Nếu có hai số u và v sao cho $\begin{cases} u+v=S \\ uv=P \end{cases} (S^2 - 4P \geq 0)$ thì hai số u và v là nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$.
- Phương trình $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:
- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$.
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}$.

2. Bài tập minh họa

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- $2x^2 - 5x + 2 = 0;$
- $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0;$
- $(\sqrt{2} + 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 1) = 0.$

Giải.

- Có $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9, \sqrt{\Delta} = 3.$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{5+3}{4} = 2.$

- Có $\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 1 = 1, \sqrt{\Delta'} = 1.$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1; x_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1.$$

c) Phương trình (3) là phương trình bậc hai có $\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=0$ do đó phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1; x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Bài 2. Một cửa hàng bán một loại ti vi với giá một chiếc là x (triệu đồng), $x \geq 10$ và nhận thấy doanh thu của loại ti vi này được tính theo công thức $S=x(20-x)$ (triệu đồng). Hãy tính giá tiền của một chiếc ti vi nếu doanh thu từ việc bán loại ti vi này của cửa hàng là 96 triệu đồng.

Giải.

Doanh thu từ việc bán loại ti vi này của cửa hàng là 96 triệu đồng nên ta có $x(20-x)=96$ hay $x^2-20x+96=0$.

Giải phương trình này được $x_1=8; x_2=12$.

Do $x \geq 10$ nên $x_2=12$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy giá của một chiếc ti vi là 12 triệu đồng

Bài 3. Cho phương trình $x^2-2x-1=0$. (1) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình (1). Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các tổng sau:

a) $M=x_1^2+x_2^2$;

b) $N=x_1^3+x_2^3$;

c) $K=x_1^5+x_2^5$.

Giải.

Có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-1) = 2 > 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$.

a) $M=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2^2-2 \cdot (-1)=6$.

b) $N=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=2^3-3 \cdot (-1) \cdot 2=14$.

c) Có $(x_1^2+x_2^2)(x_1^3+x_2^3)=6 \cdot 14$

$$\begin{aligned}
 x_1^5 + x_2^5 + x_1^2 x_2^3 + x_2^3 x_1^2 &= 84 \\
 x_1^5 + x_2^5 + x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) &= 84 \\
 x_1^5 + x_2^5 + (-1)^2 \cdot 2 &= 84 \\
 x_1^5 + x_2^5 &= 82.
 \end{aligned}$$

Vậy $K=82$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$.

Biết rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện $x_2 = 2x_1$.

Tính giá trị của tổng $S = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$.

Giải.

Có $\Delta = m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2$. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $(m - 4)^2 > 0$ suy ra $m \neq 4$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m & \text{(a)} \\ x_1 x_2 = 2m - 4 & \text{(b)} \end{cases}$.

Do $x_2 = 2x_1$ nên từ (a) suy ra $x_1 + 2x_1 = 3x_1 = m$.

Do đó $x_1 = \frac{m}{3}$ suy ra $x_2 = \frac{2m}{3}$.

Thay vào (b) ta được $\frac{m}{3} \cdot \frac{2m}{3} = 2m - 4$ hay $2m^2 = 18m - 36$.

Giải phương trình $2m^2 - 18m + 36 = 0$ tìm được $m_1 = 3; m_2 = 6$ (thỏa mãn điều kiện).

Có $S = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = m(2m - 4)$.

- Với $m = 3$ thì $S = 3 \cdot 2 = 6$.
- Với $m = 6$ thì $S = 6 \cdot 8 = 48$.

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$;

b) $\frac{5x - 14}{x^2 - 4} + \frac{1}{x - 2} + \frac{x}{x + 2} = 0$.

Giải.

a) Phương trình (1) có dạng $x^2(x-2)-(x-2)=0$ hay $(x-2)(x^2-1)=0$.

- $x-2=0$ suy ra $x=2$.
- $x^2-1=0$ hay $(x-1)(x+1)=0$ suy ra $x=1, x=-1$.

Vậy $x \in \{-1; 1; 2\}$.

b) Điều kiện xác định: $x \neq \pm 2$. Phương trình (2) có dạng

$$\frac{5x-14+x+2+x(x-2)}{x^2-4}=0 \text{ hay } \frac{x^2+4x-12}{x^2-4}=0$$

Khử mẫu ta được

$x^2+4x-12=0$ có $\Delta'=2^2-(-12)=16, \sqrt{\Delta'}=4$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=2, x_2=-6$.

Kết hợp với điều kiện xác định: phương trình có một nghiệm $x=-6$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-2x+9}=2x-1$;

b) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}$.

Giải.

a) Phương trình (1) dẫn đến $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+9=(2x-1)^2 \end{cases}$

- Từ (a) suy ra $2x \geq 1$ hay $x \geq \frac{1}{2}$.
- Từ (b) suy ra $3x^2-2x-8=0$ có $\Delta'=(-1)^2-3 \cdot (-8)=25, \sqrt{\Delta'}=5$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1=\frac{1-5}{3}=\frac{-4}{3}; x_2=\frac{1+5}{3}=2$.

Kết hợp với (a), phương trình có nghiệm $x=2$.

b) Điều kiện xác định $x \geq -\frac{1}{3}$.

Phương trình (2) có dạng $\sqrt{5x+7}=\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}$.

Bình phương hai vế ta được $5x+7=x+3+3x+1+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}$

hay $2\sqrt{3x^2+10x+3}=x+3$.

Với điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$, bình phương hai vế phương trình (2) ta có:

$$4(3x^2+10x+3)=x^2+6x+9 \text{ hay } 11x^2+33x+x+3=0.$$

Suy ra $(x+3)(11x+1)=0$. Phương trình này có hai nghiệm $x_1=-3; x_2=-\frac{1}{11}$.

Kết hợp với điều kiện xác định, phương trình (2) có một nghiệm $x=-\frac{1}{11}$.

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y+1} = 5 \\ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{y+1} = 1 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} (x+1)(y+2)=xy+5 \\ (x+2)(y+2)=xy+8 \end{cases}.$$

c)
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 4 \\ 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{y}} = 3 \end{cases}.$$

Giải.

a) Điều kiện xác định: $x \neq 1, y \neq -1$.

Đặt $\frac{1}{x-1}=a, \frac{1}{y+1}=b$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 3a+2b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này tìm được $a=1, b=1$.

Suy ra
$$\begin{cases} \frac{1}{x-1}=1 \\ \frac{1}{y+1}=1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=1 \end{cases} \text{ do đó } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Hệ phương trình có nghiệm $(x; y)=(2; 0)$.

b) Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} xy+2x+y+2=xy+5 \\ xy+2x+2y+4=xy+8 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$.

Giải hệ này tìm được $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)=(1; 1)$.

NGỌC ÁNH - ZALO 0889350678