

MỤC LỤC

Thứ tự	Nội dung	Trang
1	Mục lục	1
2	Phần A: Mở đầu	1
3	I. Lí do chọn đề tài	1
4	II. Mục đích, nhiệm vụ nghiên cứu	2
5	III. Phạm vi và đối tượng nghiên cứu	2
6	IV. Phương pháp nghiên cứu	2
7	Phần B: NỘI DUNG	2
8	I. Cơ sở lý luận	3
9	II. Thực trạng của vấn đề	3
10	III. Giải pháp và tổ chức thực hiện	3
11	1. Phương pháp giải	4
12	2. Ví dụ minh họa	4
13	3. Bài tập tương tự	15
14	IV. Kết quả đạt được	16
15	Phần C: KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	17
16	Tài liệu tham khảo	18

PHẦN A: MỞ ĐẦU

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI.

Đảng ta quan niệm “Hiền tài là nguyên khí quốc gia” và đặc biệt coi trọng việc bồi dưỡng nhân tài cho đất nước. Bộ giáo dục và đào tạo cũng có những chú trọng đặc biệt trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi các cấp. Đó là tiếp tục xây dựng và phát triển các trường chuyên toàn diện hơn, khuyến khích và tôn vinh các học sinh xuất sắc đạt thành tích cao trong các kỳ thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế. Vận dụng cách dạy học phân hóa trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi. Các trường chuyên có thể xây dựng phân phối chương trình riêng phù hợp với khả năng của học sinh...

Trong quá trình giảng dạy và bồi dưỡng môn toán cho học sinh giỏi, mục tiêu chính của người dạy là giúp việc học tập những kiến thức về lý thuyết, hiểu và vận dụng vào bài tập và cao hơn là ứng dụng vào khoa học cuộc sống.

Bài tập toán học trong chương trình phổ thông rất đa dạng và có những phần khó, đặc biệt là các bài toán trong đề thi học sinh giỏi tỉnh, quốc gia hàng năm rất khó và đa dạng về phần.

Như chúng ta đã biết trong các đề thi học sinh giỏi hoặc đề thi đại học thường có một bài toán về PT – BPT – HPT – HBPT chứa tham số, đây thường là một câu hỏi khó trong đề thi. Thông thường học sinh khi gặp câu hỏi này thường lúng túng khi định hướng lời giải.

Về vấn đề này, cũng đã có rất nhiều tài liệu, sáng kiến kinh nghiệm (SKKN). Tuy nhiên tài liệu viết chuyên sâu, chỉ ra các dạng toán điển hình thì chưa có. Chính vì vậy tôi đã tiến hành nghiên cứu đề tài “Hướng dẫn học sinh khá giỏi giải một số dạng toán điển hình về PT – BPT – HPT chứa tham số”, với hy vọng có thể để giúp các em học sinh có một tài liệu tham khảo hữu ích, giúp các em có định hướng chính xác khi giải các bài toán PT – BPT – HPT – HBPT chứa tham số.

2. MỤC ĐÍCH, NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU.

- Giúp học sinh nhận dạng được các PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số
- Bồi dưỡng cho học sinh về phương pháp, kỹ năng giải toán. Qua đó học sinh nâng cao khả năng tư duy, sáng tạo.
- Nâng cao khả năng tự học, tự bồi dưỡng và khả năng giải các bài toán trong kỳ thi tuyển sinh vào Đại học và ôn luyện HSG môn Toán.

3. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU.

- Các dạng toán giải PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số trong chương trình toán phổ thông, đặc biệt là trong các kỳ thi tuyển sinh vào Đại học, trong các kỳ thi chọn HSG cấp tỉnh.
- Phân loại các dạng toán thường gặp và phương pháp giải mỗi dạng.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU.

Để thực hiện mục đích và nhiệm vụ của đề tài, trong quá trình nghiên cứu tôi đã sử dụng các phương pháp sau:

- Nghiên cứu các loại tài liệu sư phạm, quản lý có liên quan đến đề tài.
- Phương pháp quan sát (công việc dạy- học của giáo viên và HS).
- Phương pháp điều tra (nghiên cứu chương trình, hồ sơ chuyên môn,...).
- Phương pháp đàm thoại phỏng vấn (lấy ý kiến của giáo viên và HS thông qua trao đổi trực tiếp).
- Phương pháp thực nghiệm.

PHẦN B: NỘI DUNG SKKN

I. CƠ SỞ LÝ LUẬN:

1. Lý luận chung:

Chương trình giáo dục phổ thông phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động sáng tạo của học sinh, phù hợp với đặc trưng môn học, đặc điểm đối tượng học sinh, điều kiện của từng lớp học, bồi dưỡng học sinh phương pháp tự học, khả năng hợp tác, rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn, tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú và trách nhiệm học tập cho học sinh.

Quá trình dạy học với các nhiệm vụ cơ bản là hình thành tri thức, rèn luyện các kỹ năng hoạt động nhận thức, hình thành thái độ tích cực...được xây dựng trên quá trình hoạt động thống nhất giữa thầy và trò, trò và trò, tính tự giác, tích cực tổ chức, tự điều khiển hoạt động học nhằm thực hiện tốt các nhiệm vụ đã được đề ra.

2. Kiến thức vận dụng:

- a) Định nghĩa đạo hàm, các quy tắc tính đạo hàm, các công thức tính đạo hàm của các hàm số thường gặp, công thức tính đạo hàm của hàm hợp.
- b) Để giải các PT, HPT, BPT, HBPT có chứa tham số bằng phương pháp đạo hàm ta cần nắm vững các mệnh đề sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập D

- 1: Số nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

- 2: Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq m \leq \max_{x \in D} f(x)$

- 3: BPT $f(x) \leq m$ có nghiệm $x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \leq m$

- 4: BPT $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \leq m$

- 5: BPT $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in D \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \geq m$

- 6: BPT $f(x) \geq m$, nghiệm đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \geq m$

- 7: Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập D Khi đó
 $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ (với mọi $u, v \in D$)

II. THỰC TRẠNG VẤN ĐỀ:

- Qua thực tiễn học tập và giảng dạy, bản thân nhận thấy các PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số thường rất đa dạng và khó. Nên học sinh thường không mạnh dạn, tự tin để tìm lời giải cho các bài toán này. Đặc biệt tài liệu chuyên sâu về dạng toán này ít, không chỉ rõ các dạng toán thường gặp, các hướng đề thi có thể ra.....

III. GIẢI PHÁP VÀ TỔ CHỨC THỰC HIỆN

Trong thực tiễn giảng dạy cho học sinh, tác giả đã giúp học sinh nhận dạng bài toán và phương pháp giải các dạng toán theo hệ thống bài tập được sắp xếp theo một trình tự logic.

1. Phương pháp giải

Dạng toán thường gặp là tìm giá trị tham số m để PT, BPT có nghiệm (hoặc có nghiệm thỏa mãn điều kiện nào đó). Với dạng toán này ta có thể thực hiện theo các bước như sau:

Bước 1: Biến đổi PT, BPT về dạng $f(x) = g(m)$ (hoặc $f(x) \geq g(m)$, hoặc $f(x) \leq g(m)$). Hay còn gọi là cô lập m).

Bước 2: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)$

Bước 3: Tính $f'(x)$

Bước 4: Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

Bước 5: Xác định $\min_{x \in D} f(x)$ và $\max_{x \in D} f(x)$

Từ đó vận dụng một trong các mệnh đề đã nêu ở phần kiến thức bên trên rút ra kết luận cho bài toán.

Lưu ý: Trường hợp các PT, BPT chứa các biểu thức phức tạp, ta có thể xem xét đặt ẩn phụ để đơn giản chúng. Nếu được ta làm như sau:

- + Đặt $t = \varphi(x)$ ($\varphi(x)$ là một biểu thức trong PT, BPT)
- + Từ điều kiện ràng buộc của ẩn số $x \in D$, tìm điều kiện của ẩn số t , ví dụ $t \in K$ (chú ý là phải tìm được điều kiện chặt của t)
- + Đưa PT, BPT ẩn số x về PT, BPT ẩn số t ta được $f(t) = h(m)$ (hoặc $f(t) \geq h(m)$, hoặc $f(t) \leq h(m)$).
- + Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên tập K .
- + Từ bảng biến thiên rút ra kết luận bài toán.

2. Các dạng toán điển hình.

Dạng 1: Tìm tham số để phương trình có nghiệm.

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{(x+4)(6-x)} + x^2 - 2x = m$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{(x+4)(6-x)} = \sqrt{-x^2 + 2x + 24} = \sqrt{25 - (x-1)^2} \Rightarrow 0 \leq t \leq 5$$

Phương trình trở thành: $-t^2 + t + 24 = m$; $t \in [0; 5]$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + 24$ trên đoạn $[0; 5]$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{1}{2}$	5
$f(t)$	24	$\frac{97}{4}$	4

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $4 \leq m \leq \frac{97}{4}$

Vậy $4 \leq m \leq \frac{97}{4}$

Nhận xét:

Với bài toán trên thì việc đặt ẩn phụ là thích hợp, tuy nhiên các em nhớ là phải tìm điều kiện chính xác của ẩn phụ.

Ví dụ 2 : Tìm tham số m để phương trình.

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \text{ có nghiệm.}$$

Lời giải:

$$\text{ĐK } -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \text{ } (-1 \leq x \leq 1) \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2} \text{ (lập bảng biến thiên)}$$

$$\text{Khi đó phương trình được đưa về dạng } m = \frac{-t^2 + t + 2}{t + 2} \text{ } (0 \leq t \leq \sqrt{2})$$

$$\text{Lập bảng biến thiên hàm số } f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t + 2} \text{ ta tìm được } 1 - \sqrt{2} \leq f(t) \leq 1$$

$$\text{Vậy để PT có nghiệm thì } 1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1$$

Ví dụ 3:

$$\text{Tìm } m \text{ để phương trình sau có nghiệm thực: } 3\sqrt{x-1} + (m-1)\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$$

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } x \geq 1.$$

$$\text{Phương trình đã cho } \Leftrightarrow -3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = m-1 \text{ (1).}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x+1}} \in [0, 1). \text{ Khi đó (1) trở thành } -3t^2 + 2t = m-1 \text{ (2)}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -3t^2 + 2t \text{ trên nửa đoạn } [0; 1)$$

Ta có $f'(t) = -6t + 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$		+	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{3}$	-1

Do đó phương trình đã cho có nghiệm thực (thỏa mãn $x \geq 1$) khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 1) \Leftrightarrow -1 < m - 1 \leq \frac{1}{3}$

Vậy $0 < m \leq \frac{4}{3}$

Nhận xét:

Với ví dụ 2,3 khác với ví dụ 1 ở chỗ là các em phải cô lập ẩn thì phương trình mới có dạng quen thuộc $f(x) = g(m)$. Điểm chung ở cả ba ví dụ này đều dùng công cụ đạo hàm để khảo sát hàm số.

Dạng 2: Tìm tham số để phương trình có số nghiệm cho trước.

Ví dụ 4: (HSG Thanh Hóa 2012).

Tìm số thực a để phương trình: $9^x + 9 = a3^x \cos(\pi x)$, chỉ có duy nhất một nghiệm thực.

Lời giải:

$$9^x + 9 = a3^x \cos(\pi x) \Leftrightarrow 3^x + 3^{2-x} = a \cdot \cos(\pi x) \quad (2).$$

Nhận xét: Nếu x_0 là nghiệm của (2) thì $2 - x_0$ cũng là nghiệm của (2),

suy ra điều kiện cần để (2) có nghiệm duy nhất là $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Với $x_0 = 1$, thì từ (2) suy ra $a = -6$.

Với $a = -6$, thì phương trình (2) trở thành $3^x + 3^{2-x} = -6 \cos(\pi x) \quad (3)$.

$$\text{Ta có } VT(3) \geq 6, VP(3) \leq 6. \text{ Vậy } (3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{2-x} = 6 \\ -6 \cos(\pi x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $a = -6$.

Nhận xét:

Với bài này nếu cô lập ẩn và giải như ba ví dụ trên thì rất khó vì việc khảo sát hàm lượng giác học sinh không được học và nó rất phức tạp.

Ví dụ 5:

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m + 6$$

Lời giải:

Điều kiện $0 \leq x \leq 6$

Đặt $f(x) = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x}$; $x \in [0; 6]$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right)$, $x \in (0; 6)$

Đặt $u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}$; $v(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}$, $x \in (0, 6)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x), v(x) > 0, \forall x \in (0, 2) \\ u(2) = v(2) = 0 \\ u(x), v(x) < 0, \forall x \in (2, 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (0, 2) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (2, 6) \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

(Nghĩa là: $u(2) = v(2) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0$ và $u(x), v(x)$ luôn dương khi $x \in (0; 2)$ và âm khi $x \in (2; 6)$). Do đó ta có bảng biến thiên:

x	0	2	6
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$6 + 3\sqrt{2}$	
	$2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6}$		$\sqrt[4]{12} + 2\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra các giá trị cần tìm là:

$$2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m + 6 < 3\sqrt{2} + 6.$$

Vậy $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} - 6 \leq m < 3\sqrt{2}$

Ví dụ 6: (Khối D 2007)

Tìm m để PT sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ (1)

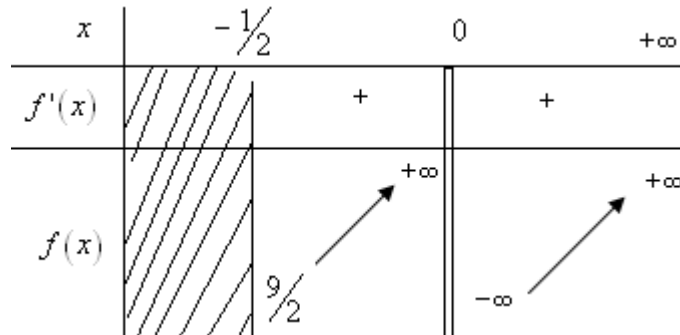
Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 + mx + 2 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{3x^2 + 4x + 1}{x} = m \end{cases} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 1}{x} = 3x + x - \frac{1}{x}$ trên $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$, ta có

$f'(x) = 3 + \frac{1}{x^2} > 0$ nên ta có bảng biến thiên



Vậy, phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. Từ bảng biến thiên, ta có.

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt khi $m \geq \frac{9}{2}$.

Nhận xét:

Đối với các bài toán về Hệ PT chứa tham số thì bước đầu ta phải vận dụng các phương pháp cơ bản để giải Hệ PT (như phương pháp: Biến đổi tương đương; Thế; Đặt ẩn phụ; dùng hàm số; đánh giá...). Rồi sau đó cũng quy về các bài toán PT có chứa tham số như trên. Ta xét ví dụ sau:

Dạng 3: Tìm tham số để hệ có nghiệm.

Ví dụ 7:

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x^2 - x)(2x - y) = m \\ (x^2 - x) + (2x - y) = 1 - 2m \end{cases}$$

Đặt $u = x^2 - x$, $u \geq -\frac{1}{4}$; $v = 2x - y$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} uv = m \\ u + v = 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + (2m - 1)u + m = 0 \\ v = 1 - 2m - u \end{cases} \quad (1)$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm thỏa mãn $u \geq -\frac{1}{4}$

Với $u \geq -\frac{1}{4}$, ta có: $(1) \Leftrightarrow m(2u+1) = -u^2 + u \Leftrightarrow m = \frac{-u^2 + u}{2u+1}$

Xét hàm số $f(u) = \frac{-u^2 + u}{2u+1}$, với $u \geq -\frac{1}{4}$; ta có:

$$f'(u) = -\frac{2u^2 + 2u - 1}{(2u+1)^2}; f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Bảng biến thiên

u	$-\frac{1}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	
$f'(u)$		+	0	-
$f(u)$			$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	$-\infty$

$-\frac{5}{8}$

Suy ra giá trị cần tìm là: $m \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 8: Tìm m để hệ $\begin{cases} \sqrt{x^2+3} + |y| = m \\ \sqrt{y^2+5} + |x| = \sqrt{x^2+5} + \sqrt{3} - m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải:

Nhận thấy nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì hệ cũng có các nghiệm $(-x_0; -y_0)$; $(-x_0; y_0)$; $(x_0; -y_0)$. Vì thế nghiệm duy nhất của hệ chỉ có thể là

$x = y = 0$ từ đó suy ra $m = \sqrt{3}$ (điều kiện cần)

Điều kiện đủ: khi $m = \sqrt{3}$ thì hệ có dạng

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3} + |y| = \sqrt{3} \\ \sqrt{y^2+5} + |x| = \sqrt{x^2+5} \end{cases} \text{ dễ thấy hệ có nghiệm duy nhất } x = y = 0$$

Vậy $m = \sqrt{3}$.

Nhận xét:

Đối với bài toán chứa tham số mà yêu cầu phương trình, hệ có nghiệm duy nhất thì phương pháp giải thường sử dụng điều kiện cần và đủ như ví dụ 4,9 đã trình bày.

Đối với các bài toán về Bất PT chứa tham số thì phương pháp cơ bản cũng tương tự như các bài toán về PT chứa tham số như trên. Tuy nhiên ta cần bám sát và vận dụng các mệnh đề: 3,4,5,6 trong phần kiến thức vận dụng. Ta xét thêm một số dạng toán sau:

Dạng 4: Tìm tham số để bất phương trình có nghiệm

Ví dụ 9: Tìm m để bất phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq m 3^{\sin^2 x}$ có nghiệm.

Lời giải:

$$2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq m \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x - \sin^2 x} \geq m$$

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x - \sin^2 x}, (x \in \mathbb{R})$

$$\sin^2 x \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} \leq 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \leq 1 \Rightarrow 3^{\cos^2 x - \sin^2 x} \leq 3$$

Do đó $f(x) \leq 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Kết luận :BPT có nghiệm khi $m \leq 4$

Nhận xét: Với bài BPT thì hướng giải cũng giống bài PT chỉ khác phần kết luận.

Ví dụ 10: (HSG Thanh Hóa 2010).

Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\sqrt{(x+4)(6-x)} + x^2 - 2x \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 6]$.

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{(x+4)(6-x)} = \sqrt{-x^2 + 2x + 24} = \sqrt{25 - (x-1)^2} \Rightarrow 0 \leq t \leq 5$

Bất phương trình trở thành: $-t^2 + t + 24 \geq m; \quad t \in [0; 5]$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + 24$ trên đoạn $[0; 5]$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{1}{2}$	5		
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$			$\frac{97}{4}$		
	24				4

Từ đó suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 6] \Leftrightarrow m \leq \min_{[0; 5]} f(t) = 4$

Vậy các giá trị cần tìm của m là: $m \leq 4$.

Ví dụ 11:

Tìm m để bất phương trình $(2m+1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1 + x(2-x) \leq 0$ (1) có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$; $t' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

ta có bảng biến thiên

x	0	1	$1 + \sqrt{3}$
t'	-	0	+
t	$\sqrt{2}$	1	2

Từ đó $1 \leq t \leq 2$. Với $1 \leq t \leq 2$, ta biến đổi

$$t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow t^2 = x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow t^2 - 2 = -x(2 - x).$$

Bất phương trình (1) trở thành $(2m + 1)(t + 1) \leq t^2 - 2 \Leftrightarrow (2m + 1) \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1}$

(2)

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1}, (1 \leq t \leq 2)$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)^2} > 0, \forall t \in [1; 2]. \text{ Suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } [1; 2]$$

Bảng biến thiên

t	1	2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên, bất phương trình (1) có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) có nghiệm $t \in [1; 2]$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $2m + 1 \leq \max_{t \in [1; 2]} f(t) = f(2) = \frac{2}{3}$

Vậy $m \leq -\frac{1}{6}$

Nhận xét:

- Để học sinh có thể hiểu và vận dụng tốt các mệnh đề: 3,4,5,6. Ngoài việc chứng minh bằng lập luận thì ta cần minh họa bằng đồ thị để học sinh hiểu rõ bản chất các mệnh đề trên thực chất là dựa vào sự tương giao của hai đồ thị.

- Cũng giống như các ví dụ về PT chứa tham số. Trong phần BPT chứa tham số thì hướng giải chủ đạo cũng là tìm cách đặt ẩn phụ để đơn giản hóa bài toán, sau đó dùng đạo hàm. Tuy nhiên trong một số trường hợp thì vẫn rất cần sự linh hoạt trong cách giải.

Đối với các bài toán về Hệ bất PT chứa tham số thì thông thường trong hệ sẽ có một Bất PT không chứa tham số và có thể giải được. Rồi sau đó cũng quy về các bài toán Bất PT chứa tham số. Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 12:

Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm
$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ x^2 - 2(m+1)x - m + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \quad (1) \\ x^2 - 2(m+1)x - m + 3 \geq 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6$. Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in [1;6]$ thỏa mãn (2).

(2) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 \geq (2x+1)m \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 3}{(2x+1)} \geq m$ (do $x \in [1;6] \Rightarrow 2x+1 > 0$)

Xét $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x+1}; x \in [1;6]$. Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \exists x_0 \in [1;6]: f(x_0) \geq m$

$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 8}{(2x+1)^2} = \frac{2(x^2 + x - 4)}{(2x+1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

Vì $x \in [1;6]$ nên chỉ nhận $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$. Ta có:

$f(1) = \frac{2}{3}, f(6) = \frac{27}{13}, f\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right) = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$

Vì f liên tục và có đạo hàm trên $[1;6]$ nên $\max f(x) = \frac{27}{13}$ tại $x=6$

Do đó $\exists x_0 \in [1;6]: f(x_0) \geq m \Leftrightarrow \max_{x \in [1;6]} f(x) \geq m \Leftrightarrow \frac{27}{13} \geq m$.

Ví dụ 13:

Tìm các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm thực

$$\begin{cases} x^3 - mx + 2 \leq 0 & (1) \\ 4^x - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} - 4^{\sqrt{x}+1} \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

điều kiện: $x \geq 0$

$$\text{Bất phương trình (2)} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 2^{\sqrt{x}}) \cdot (2^x - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}}) \leq 0 \Leftrightarrow 2^x - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{x} + 2$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4. \text{ Đối chiếu ĐK được } 0 \leq x \leq 4 \quad (*)$$

Do đó: Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x^3 + 3mx + 2 \geq 0$ có nghiệm $x \in [0; 4]$

Với $x = 0$ thì (1) không thỏa mãn.

Với $0 < x \leq 4$: (1) có nghiệm thỏa mãn $x \in (0; 4] \Leftrightarrow m \geq x^2 + \frac{2}{x} = g(x)$ có nghiệm $x \in (0; 4] \Leftrightarrow m \geq \min_{(0; 4]} g(x)$.

Xét $g(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x \in (0; 4]$. Có $g'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Bảng biến thiên :

x	0	1	4
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$		
	$\frac{33}{2}$	3	

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min_{(0; 4]} g(x) = g(1) = 3$.

Vậy $m \geq 3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 14: (HSG Thanh Hóa 2016).

Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} |x - 6| \geq |x^2 - 5x + 9| \\ (x^2 - x + 4)(x^4 + 16) \leq mx^3 \end{cases}$ có nghiệm.

Giải: Bất phương trình thứ nhất trong hệ có tập nghiệm là $[1; 3]$

Với $x \in [1; 3]$, bất phương trình thứ hai tương đương với :

$$m \geq \left(\frac{x^2 - x + 4}{x} \right) \left(\frac{x^4 + 16}{x^2} \right) \Leftrightarrow m \geq \left(x + \frac{4}{x} - 1 \right) \left(x^2 + \frac{16}{x^2} \right).$$

Xét hàm số $f(x) = \left(x + \frac{4}{x} - 1 \right) \left(x^2 + \frac{16}{x^2} \right)$, đặt $t = x + \frac{4}{x}$ do $x \in [1; 3]$ suy ra $t \in [4; 5]$

Hàm số $f(x)$ trở thành hàm $g(t) = t^3 - t^2 - 8t + 8$ Để tìm được GTNN của hàm $g(t) = t^3 - t^2 - 8t + 8$ trên $[4; 5]$ là 24.

Do đó hệ có nghiệm khi và chỉ khi .

1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$4^{x^2 - mx + 1} - 2^{x^2 + 1} = -x^2 + 2mx - 1$$

2. Tìm m để BPT

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 2m + 1 = 0$$

$$\text{Có nghiệm thỏa mãn: } x^2 + 6x + 7 \leq 0$$

3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\log_m 11 + \log_{\frac{1}{7}}(\sqrt{x^2 + mx + 10} + 4) \log_m(x^2 + mx + 12) \geq 0$$

4. Tìm m để nghiệm của BPT sau chứa đoạn $[1; 2]$.

$$m|x^2 - 3x + 1| - \frac{2}{|x^2 - 3x + 1|} \leq 0$$

5. Biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases}$$

6. Tìm a để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$.

7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$.

8. Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \geq 0 \end{cases}$

9. Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} 3x^3 + x^2y - 3x^2 - xy = 2m \\ x^2 + 2x + y = 6 - m \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

4. KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC:

Sau khi được rèn luyện hệ thống kiến thức trên, hầu hết các em học sinh khá giỏi khối 12 trong các lớp tôi dạy đã tỏ ra mạnh dạn, tự tin và linh hoạt hơn rất nhiều trong việc giải các bài toán PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số. Mặt khác rất nhiều học sinh tỏ ra rất hứng thú với dạng toán này. Bởi vì phương

pháp này không chỉ nhanh gọn, hiệu quả mà nó còn có tính tổng hợp rất cao, đó là dùng đạo hàm để tìm cực trị, dùng đạo hàm tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số, khảo sát và lập bảng biến thiên của hàm số,...và đó cũng là những bài toán hết sức quen thuộc và cơ bản về ứng dụng của đạo hàm trong phân môn Giải tích 12.

Kết quả thống kê:

Năm	Số HS dự thi HSG tỉnh	Giải được câu tham số
2012	5	0
2013	5	1
2014	5	2
2015	5	3
2016	5	4

Phần C: KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT

Tác giả cho rằng, việc khai thác tốt các kiến thức về đạo hàm để giải các bài toán PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số là một yêu cầu quan trọng cả về kiến thức lẫn kỹ năng đối với các học sinh ôn thi đại học và các học sinh trong đội tuyển HSG các cấp. Khi dạy chủ đề này giáo viên cần chú ý ngoài việc hình

thành cho học sinh một tư duy thuật toán thì còn cần làm cho học sinh có ý thức phân tích nhận dạng bài toán, thói quen đặt ra nhu cầu giải quyết bài toán theo nhiều hướng khác nhau và cuối cùng phải biết tổng hợp lại bằng các đánh giá, nhận xét sâu sắc. Từ đó rút ra những kết luận súc tích nhất.

Cái hay của cách giải này là ngoài việc sử dụng đạo hàm thì còn phải vận dụng linh hoạt các mệnh đề (phần kiến thức vận dụng). Đồng thời với phương pháp mới này (cũng nằm trong xu thế chung trong việc ra đề thi đại học và học sinh giỏi hiện nay là tăng cường ứng dụng đạo hàm, hàm số vào giải toán) học sinh đã hoàn toàn rũ bỏ được các phương pháp đại số kinh điển trước đây. Đặc biệt là các ứng dụng của định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai vốn dĩ là cái xương sống trong hệ thống phương pháp giải các bài toán về tham số, nhưng hiện nay thì đã lỗi thời!

Do khuôn khổ của một sáng kiến kinh nghiệm có hạn và trình độ bản thân còn hạn chế. Nên phần nội dung chính của đề tài này (khoảng 16 trang giấy A4, với 14 ví dụ và 9 bài tập tương tự) chưa thể khai thác hết tất cả các khía cạnh của việc ứng dụng đạo hàm để giải các PT, HPT, BPT, HBPT chứa tham số. Tuy nhiên tác giả tin rằng nó cũng vừa đủ để truyền tải đến học sinh trên tinh thần là một chuyên đề nhỏ (khoảng 15 tiết học). Ngoài ra khi triển khai áp dụng các giáo viên có thể sắp xếp lại các ví dụ theo một trình tự logic khác và bổ sung thêm các ví dụ hoặc nhận xét mới để bài giảng đạt hiệu quả cao hơn. Chính vì vậy tác giả rất mong nhận được sự chia sẻ và góp ý của các bạn đồng nghiệp.

Kiến nghị các nhà trường cần chọn lọc, triển khai ứng dụng các sáng kiến kinh nghiệm đã đạt giải cấp tỉnh để nâng cao hiệu quả dạy học nói chung và của môn Toán nói riêng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Võ Đại Mau, Các phương pháp giải đặc biệt PT-BPT NXB trẻ.
2. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

3. Đề thi và đáp án thi tuyển sinh vào Đại học môn Toán các khối A, B, D từ năm 2002 đến năm 2016 do Bộ Giáo dục và Đào tạo.
4. Đề thi và đáp án thi học sinh giỏi tỉnh Thanh Hóa môn Toán từ năm 2002 đến năm 2016 đưa lên các diễn đàn Toán học.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Triệu Sơn, ngày 25 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết, không sao chép nội dung của
người khác.

(Ký và ghi rõ họ tên)

Nguyễn Trọng Nhật