

DẠNG 7**Tỷ số thể tích**

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CD, BD . Cho biết $AB = 4a, AC = 6a, AD = 7a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

- A. $V = 7a^3$. B. $V = 28a^3$. C. $V = 14a^3$. D. $V = 21a^3$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của SB . P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N . Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V

- A. $V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V$. B. $V_{ABCDMNP} = \frac{19}{30}V$. C. $V_{ABCDMNP} = \frac{2}{5}V$. D. $V_{ABCDMNP} = \frac{7}{30}V$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $BAD = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC . Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích là V_1 , khối còn lại có thể tích là V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Câu 4: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và song song với BC cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại D , E . Mặt phẳng $(A'DE)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, tính tỉ số thể tích của chúng.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{23}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{4}{27}$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Xét điểm P thuộc cạnh AB , điểm Q thuộc cạnh BC và điểm R thuộc cạnh BD sao cho $\frac{PA}{PB} = 2$, $\frac{QB}{BC} = 3$, $\frac{RB}{RD} = 4$. Tính thể tích của khối tứ diện $BPQR$.

- A. $\frac{V}{5}$. B. $\frac{V}{4}$. C. $\frac{V}{3}$. D. $\frac{V}{6}$.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A' , C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB , SD lần lượt tại B' , D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là?

- A. $\frac{1}{60}$. B. $\frac{1}{30}$. C. $\frac{4}{15}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm I thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số

$$k = \frac{IA}{IS}?$$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt

tại B', D' và đặt $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của k là?

- A. $\frac{4}{105}$. B. $\frac{1}{30}$. C. $\frac{4}{15}$. D. $\frac{4}{27}$.

Câu 9: Cho tứ diện đều có chiều cao h , ở ba góc của tứ diện người ta cắt đi các tứ diện bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng một nửa thể tích của khối đa diện đều ban đầu. Tìm x .

- A. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$. B. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{3}}$. C. $x = \frac{h}{\sqrt[4]{4}}$. D. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Câu 10: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kA'E, BB' = kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $(C'.A'B'FE)$ có thể tích V_1 và khối đa diện $(ABCEFC')$ có thể tích V_2 . Biết rằng

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}, \text{ tìm } k$$

- A. $k = 4$. B. $k = 3$. C. $k = 1$. D. $k = 2$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tâm O . Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AO . Biết mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}a^3$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. C. $\frac{3}{4}a^3$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$.

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $BAD = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là 45° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm SC . Mặt phẳng (MND) chia khối chóp thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện có đỉnh S có thể tích là V_1 , khối đa diện còn lại có thể tích

$$V_2. \text{ Tính tỉ số } \frac{V_1}{V_2}$$

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 48cm^3 . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh CC', BC và $B'C'$. Tính thể tích của khối chóp $A'.MNP$.

- A. 8cm^3 . B. 12cm^3 . C. 24cm^3 . D. $\frac{16}{3}\text{cm}^3$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông cân ở B , $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SBC$, $mp(\alpha)$ đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S . Tính V .

- A. $\frac{5a^3}{54}$. B. $\frac{2a^3}{9}$. C. $\frac{4a^3}{27}$. D. $\frac{4a^3}{9}$.

Câu 15: Cho tứ diện đều có chiều cao h , ở bốn góc của tứ diện người ta cắt đi các tứ diện đều bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng $\frac{3}{4}$ thể tích của khối đa diện ban đầu. Tìm x .

- A. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{4}}$. B. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{16}}$. C. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{12}}$. D. $x = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Câu 16: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy điểm E thuộc cạnh BB' sao cho $BE = \frac{BB'}{4}$, điểm F thuộc cạnh DD' sao cho $DF = \frac{3DD'}{4}$. Mặt phẳng qua ba điểm A, E, F chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số hai phần ấy.

- A. 2. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 17: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'; NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

- A. Khối $ABB'C'$. B. Khối $A'BCN$. C. Khối $BB'MN$. D. Khối $GA'B'C'$.

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Biết C' là trung điểm SC . Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{9}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{9}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

Câu 19: Cho hình chóp đều $S.ABC$, có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tính thể tích V của khối chóp $A.BCNM$.

- A. $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{32}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{48}$. D. $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{96}$.

Câu 20: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SA , lấy điểm N trên cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A , V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{16}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{18}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{11}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{9}$.

Câu 21: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4a$; $AD = 6a$; $AA' = 7a$. Các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AA'}$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

- A. $V = 168a^3$. B. $V = 672a^3$. C. $V = 336a^3$. D. $V = 1008a^3$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC . Mặt phẳng (P) chứa AC' cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' . Đặt $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng

- A. $\frac{2}{27}$. B. $\frac{4}{27}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{2}{9}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC' cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' . Đặt $m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của m bằng

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{4}{9}$.

Câu 24: Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD, BC, CD, DB . Biết thể tích của khối bát diện đều $MQNPSR$ bằng $9\sqrt{2} \text{ cm}^3$. Tính độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$.

- A. 2 cm. B. 3 cm. C. 6 cm. D. $\sqrt[3]{2} \text{ cm}$.

Câu 25: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB, AC : $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$, $\frac{AN}{CN} = 2$. Mặt phẳng (α) chứa MN , song song với AD chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V

- A. $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{108}$. B. $V = \frac{5\sqrt{2}a^3}{108}$. C. $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{81}$. D. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{342}$

Câu 26: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và E là điểm thuộc tia đối của tia DB sao cho $\frac{BE}{BD} = k$. Tìm k để mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh B có thể tích $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{294}$

A. $k = \frac{6}{5}$.

B. $k = 6$.

C. $k = 4$.

D. $k = 5$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$. Hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ song song với $(ABCD)$ và lần lượt đi qua M, N chia khối chóp đã cho thành ba phần. Nếu phần trên có thể tích bằng 10 dm^3 thì phần ở giữa có thể tích là

A. 70 dm^3 .

B. 80 dm^3 .

C. 180 dm^3 .

D. 190 dm^3 .

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD . Mặt phẳng (α) chứa MN và cắt các tia SB, SC lần lượt tại P và Q . Đặt $\frac{SP}{SB} = x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V = 2V_1$.

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$.

C. $x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$.

D. $x = \sqrt{2}$.

Câu 30: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh $AA', BB', CC', B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}, \frac{CP}{CC'} = \frac{1}{4}, \frac{C'Q}{B'C'} = \frac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{30}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{45}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{22}{45}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm K thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNK) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $t = \frac{KA}{KS}$.

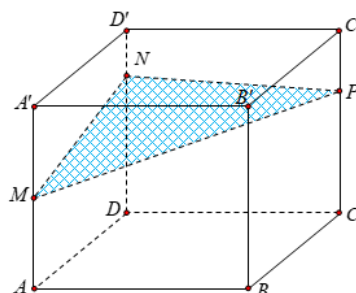
A. $t = \frac{1}{2}$.

B. $t = \frac{3}{4}$.

C. $t = \frac{1}{3}$.

D. $t = \frac{2}{3}$.

Câu 32: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA, DN = 3ND', CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{5275}{6}$.

B. $\frac{5275}{12}$.

C. $\frac{7385}{18}$.

D. $\frac{8440}{9}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, $SA = SB = SC = SD = \sqrt{2}a$. Giả sử E thuộc cạnh SC sao cho $SE = 2EC$, F là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SF = \frac{1}{3}FD$.

Thể tích khối đa diện $SABEF$ bằng:

- A. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{36}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{18}$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{27}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q . Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 35: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với hai đáy là AB và CD , $AB = 2CD$. Gọi E là một điểm trên cạnh SC . Mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SE}{SC}$.

- A. $\frac{\sqrt{10}-2}{2}$. B. $\sqrt{6}-2$. C. $\sqrt{2}-1$. D. $\frac{\sqrt{26}-4}{2}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng song song với đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu của M, N, P trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNP.M'N'P'$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng (P) song song với đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

- A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. B. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S' thỏa mãn $S'D = \frac{1}{2}SA$ và S', S ở cùng phía đối với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{7}{9}$. C. $\frac{7}{18}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a , một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Tính diện tích tam giác MNP biết mặt phẳng (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có diện tích bằng nhau.

A. $S_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. B. $S_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. C. $S_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$. D. $S_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[4]{4}}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên đường thẳng qua D và song song với SA lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{S'D} = k\overrightarrow{SA}$ với $k > 0$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2}$. B. $\frac{3k+2}{2(k+1)^2}$. C. $\frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}$. D. $\frac{k}{k+1}$.

Câu 41: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , biết góc tạo bởi SG và (SBC) bằng 30° . Mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích V_1, V_2 trong đó V_1 là phần thể tích chứa điểm S . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 6. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{6}{7}$. D. 7.

Câu 42: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30° , O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60° sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{16}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{27}{64}$. D. $\frac{9}{64}$.

Câu 43: Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Người ta cưa viên đá theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

A. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. B. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $\frac{a^2}{2\sqrt[3]{2}}$.

Câu 44: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD . Tính thể tích của khối chóp $A.GBC$.

A. $V = 3$. B. $V = 4$. C. $V = 6$. D. $V = 5$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = a\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$. Gọi V_2 là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 47: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA' , BB' lấy các điểm M , N sao cho $AA' = 3A'M$, $BB' = 3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'NM$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{7}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{7}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{7}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P . Tỉ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16}$. B. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$. C. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}$. D. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$.

Câu 49: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 54, gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC , ACD , ADB . Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V = \frac{27}{2}$. B. $V = 4$. C. $V = 9$. D. $V = 16$.

Câu 50: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 6 và góc nhọn bằng 45° , cạnh bên của hình hộp bằng 10 và tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính thể tích khối đa diện $ABCD D'B'$.

A. $V = 180$. B. $V = 60$. C. $V = 90$. D. $V = 120$.

Câu 51: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA' , CC' sao cho $MA = MA'$, $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$. B. Khối $GA'B'C'$. C. Khối $ABB'C'$. D. Khối $BB'MN$.

Câu 52: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 60. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh bên AA' , BB' , CC' sao cho $MA = 2MA'$, $NB = 3NB'$, $PC = 4PC'$. Tính thể tích khối đa diện $BCMNP$.

A. 40. B. 30. C. 31. D. $\frac{85}{3}$.

Câu 53: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , BC và E đối xứng với điểm B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

A. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. B. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$. D. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

- Câu 54:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Kí hiệu M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, CD sao cho $MA = MB, ND = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MBCN$.
- A. $V = 40$. B. $V = 8$. C. $V = 20$. D. $V = 28$.
- Câu 55:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', AC$ và P là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CP = 2C'P$. Tính thể tích khối tứ diện $BMNP$ theo V .
- A. $\frac{2V}{9}$. B. $\frac{V}{3}$. C. $\frac{5V}{24}$. D. $\frac{4V}{9}$.
- Câu 56:** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .
- A. $V = \frac{9\sqrt{2}a^3}{320}$. B. $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{320}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{96}$. D. $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{80}$.
- Câu 57:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$. Biết thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{1}{2}V$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $x + y + z = 1$. B. $x + y + z = 2$. C. $x + y + z = \frac{3}{2}$. D. $x + y + z = \frac{2}{3}$.
- Câu 58:** Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 1, OB = 2, OC = 3$. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh O xuống các cạnh BC, CA, AB . Thể tích khối tứ diện $ODEF$ bằng
- A. $\frac{36}{325}$. B. $\frac{276}{325}$. C. $\frac{289}{325}$. D. $\frac{49}{325}$.
- Câu 59:** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Điểm P trên cạnh CD sao cho $PD = 2CP$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Tính thể tích khối đa diện $BMNPQD$.
- A. $\frac{\sqrt{2}}{16}$. B. $\frac{23\sqrt{2}}{432}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{48}$. D. $\frac{13\sqrt{2}}{432}$.
- Câu 60:** Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Điểm P trên cạnh CD sao cho $PC = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Thể tích khối đa diện $BMNPQD$ bằng
- A. $\frac{11\sqrt{2}}{216}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{27}$. C. $\frac{5\sqrt{2}}{108}$. D. $\frac{7\sqrt{2}}{216}$.
- Câu 61:** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng
- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 62: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện chứa đỉnh S .

A. $V = \frac{15\sqrt{2}a^3}{144}$. B. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{72}$. C. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{144}$. D. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{144}$.

Câu 63: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đường cao bằng 8 và đáy là hình vuông cạnh bằng 6. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm của các mặt $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P, Q , bằng

A. 108. B. 168. C. 96. D. 120.

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm đối xứng với C qua B . N là trung điểm SC . Mặt phẳng (MND) chia hình chóp thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Câu 65: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $B'N = \frac{2}{3}BB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại P và đường thẳng CN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. $\frac{13}{18}$. B. $\frac{23}{9}$. C. $\frac{7}{18}$. D. $\frac{5}{9}$.

Câu 66: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{11}$. B. $\frac{1}{23}$. C. $\frac{1}{47}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 67: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M, N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA, CB sao cho MN song song với AB và $\frac{CM}{CA} = k$. Mặt phẳng $(MNB'A')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 sao cho $\frac{V_1}{V_2} = 2$. Khi đó giá trị của k là

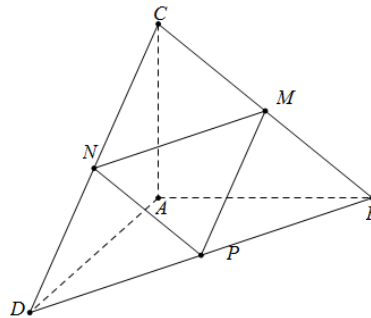
A. $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $k = \frac{1}{2}$. C. $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D. $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.D	4.B	5.A	6.A	7.D	8.A	9.D	10.B
11.B	12.D	13.B	14.A	15.C	16.B	17.B	18.D	19.A	20.C
21.B	22.C	23.B	24.C	25.A	26.C	27.A	28.B	29.B	30.B
31.D	32.A	33.A	34.B	35.A	36.B	37.A	38.C	39.D	40.C
41.B	42.A	43.D	44.B	45.B	46.B	47.B	48.B	49.B	50.D
51.A	52.C	53.D	54.C	55.A	56.A	57.C	58.A	59.B	60.D
61.D	62.B	63.D	64.D	65.D	66.C	67.A			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A



$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{A.MNP} &= \frac{1}{3} \cdot S_{MNP} \cdot d(A, (MNP)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{BCD} \cdot d(A, (MNP)) = \frac{1}{4} V_{ABCD} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD = 7a^3. \end{aligned}$$

Câu 2: Chọn A

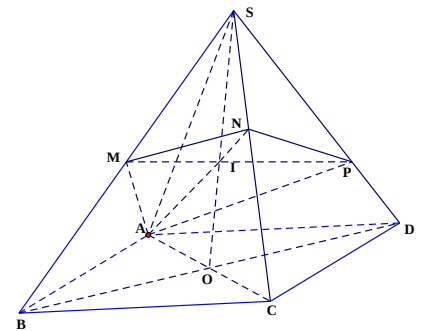
Gọi $O = AC \cap BD$, $I = MP \cap SO$, $N = AI \cap SC$ Khi đó

$$V_{ABCDMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.AMNP}$$

$$\text{Đặt } a = \frac{SA}{SA} = 1, b = \frac{SB}{SM} = 2, c = \frac{SC}{SN}, d = \frac{SD}{SP} = \frac{3}{2} \text{ ta có}$$

$$a + c = b + d \Rightarrow c = \frac{5}{2}.$$

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{1+2+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{7}{30} \Rightarrow V_{ABCDMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.AMNP} = V - \frac{7}{30}V = \frac{23}{30}V.$$



Câu 3: Chọn D

Trong tam giác SMC , SB và MN là hai trung

tuyến cắt nhau tại trọng tâm $K \Rightarrow \frac{SK}{SB} = \frac{2}{3}$.

BI là đường trung bình của tam giác $MCD \Rightarrow I$ là trung điểm AB .

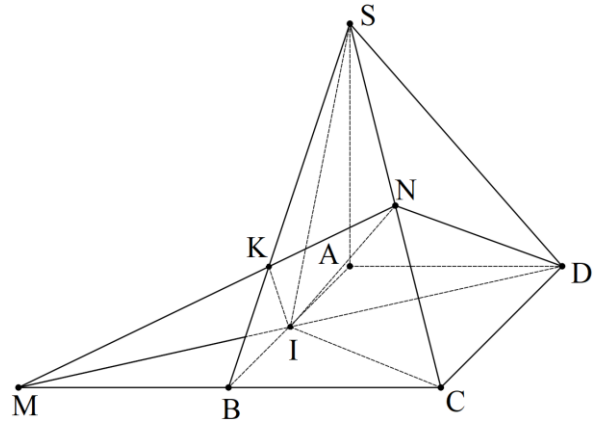
$$V_1 = V_{S.AID} + V_{S.IKN} + V_{S.IND}$$

Đặt: $V_{S.ABCD} = V$. $V_{S.AID} = \frac{1}{4} \cdot V$;

$$V_{S.IKN} = \frac{SK}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.IBC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} V = \frac{1}{12} V ;$$

$$V_{S.IND} = \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ICD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{4} V$$

$$\Rightarrow V_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) \cdot V = \frac{7}{12} \cdot V \Rightarrow V_2 = \frac{5}{12} \cdot V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$$

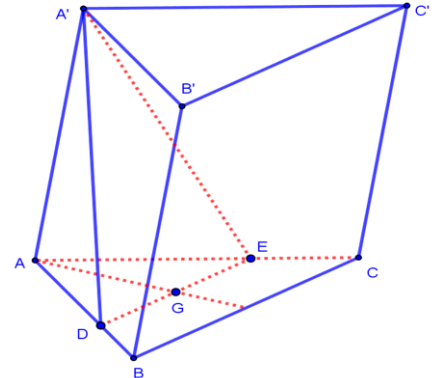


Câu 4: Chọn B

Ta có
$$\begin{cases} \frac{V_{A'.ADE}}{V_{A'.ABC}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \\ V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{A'.ADE} = \frac{4}{27} V_{ABC.A'B'C'}$$

Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{27}}{1 - \frac{4}{27}} = \frac{4}{23}.$



Câu 5: Chọn A

Ta có $\frac{V_{B.PQR}}{V_{B.ACD}} = \frac{BP}{BA} \cdot \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{BR}{BD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow V_{B.PQR} = \frac{1}{5} V.$

Câu 6: Chọn A

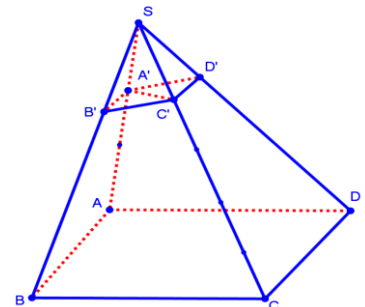
Đặt $\frac{SB}{SB'} = x$, $\frac{SD}{SD'} = y$. Ta có $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} \Rightarrow x + y = 8.$

Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{15x} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{15x} V_{S.ABC} = \frac{1}{30x} V_{S.ABCD}.$

Ta có $\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{1}{15y} \Rightarrow V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{15y} V_{S.ADC} = \frac{1}{30y} V_{S.ABCD}.$

Ta có $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

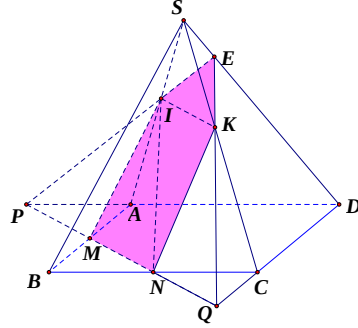
Ta có $(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow k \geq \frac{1}{60}.$



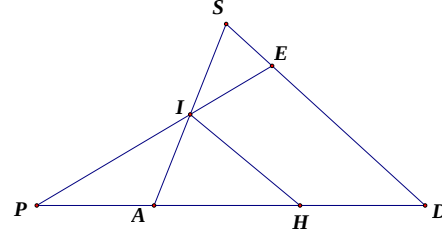
Vậy giá trị nhỏ nhất của k là $\frac{1}{60}$ khi $x = y = 4$.

$$\text{Lại có: } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{V_{S.ABC}}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Câu 7: Chọn C



Hình 1



Hình 2

Mặt phẳng (MNI) cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1. Đặt $V_{S.ABCD} = V$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle APM} = S_{\triangle BMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{8} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{IA}{SA} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{k}{8(k+1)} \Rightarrow V_{I.APM} = \frac{k}{8(k+1)} V.$$

$$\text{Do } MN \parallel AC \Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD) \Rightarrow d(I, (ABCD)) = d(K, (ABCD)).$$

$$\text{Mà } S_{\triangle APM} = S_{\triangle NCQ} \Rightarrow V_{I.APM} = V_{K.NCQ} = \frac{k}{8(k+1)} V.$$

$$\text{Kẻ } IH \parallel SD \text{ (} H \in SD \text{) như hình 2. Ta có: } \frac{IH}{SD} = \frac{AH}{AD} = \frac{AI}{AS} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\frac{IH}{ED} = \frac{PH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{AH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{2AH}{3AD} = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3(k+1)} = \frac{3k+1}{3(k+1)}.$$

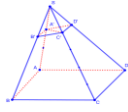
$$\Rightarrow \frac{ED}{SD} = \frac{IH}{SD} \cdot \frac{ID}{ED} = \frac{3k}{3k+1} \Rightarrow \frac{d(E, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{ED}{SD} = \frac{3k}{3k+1}.$$

$$\frac{S_{\triangle PQD}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{27k}{24k+8} \Rightarrow V_{E.PQD} = \frac{27k}{24k+8} V.$$

$$V_{EIKAMNC} = \frac{13}{20} V \Leftrightarrow V_{E.PDC} - V_{I.APM} - V_{K.NCQ} = \frac{13}{20} V$$

$$\Leftrightarrow \frac{27k}{8(3k+1)} V - \frac{k}{8(k+1)} V - \frac{k}{8(k+1)} V = \frac{13}{20} V \Leftrightarrow \frac{27k}{2(3k+1)} - \frac{k}{k+1} = \frac{13}{5} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$$

Câu 8: Chọn A



Đặt $\frac{SB}{SB'} = x, \frac{SD}{SD'} = y$

Ta có $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x.$

Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{15x} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{15x} V_{S.ABC} = \frac{1}{30x} V_{S.ABCD}.$

Ta có $\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{1}{15y} \Rightarrow V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{15y} V_{S.ADC} = \frac{1}{30y} V_{S.ABCD}.$

Ta có $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{4}{15xy} = \frac{4}{15x(8-x)} = \frac{4}{15(-x^2 + 8x)}.$

Ta có $1 \leq x, y < 8 \Rightarrow 8 - x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 7.$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 8x$ trên đoạn $[1; 7]$.

$f'(x) = -2x + 8; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 7] \\ x = 4 \in [1; 7] \end{cases}$

Tính $f(1) = 7; f(7) = 7; f(4) = 32.$

k đạt giá trị lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$\min f(x) = 7 \Rightarrow k_{\max} = \frac{4}{15 \cdot 7} = \frac{4}{105}.$

Câu 9: Chọn D

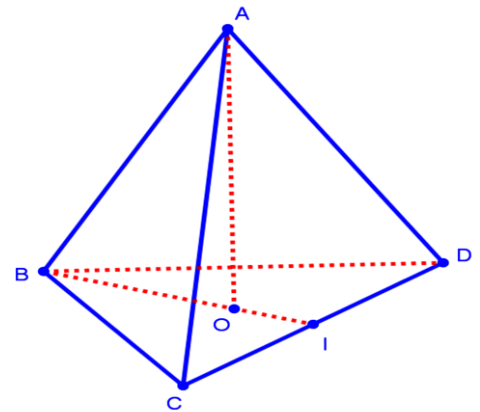
Gọi cạnh của khối tứ diện đều ban đầu là $a.$

Ta có $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a = \frac{3h}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}h}{2}; V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{h^3\sqrt{3}}{8}.$

Thể tích của ba khối tứ diện đều có chiều cao x được cắt ra là $V = 3 \cdot \frac{x^3\sqrt{3}}{8} = \frac{x^3 3\sqrt{3}}{8}.$

Ta có $\frac{x^3 3\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} \frac{h^3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow x^3 = \frac{h^3}{6} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}.$



Câu 10: Chọn B

+) Do khối chóp $C'.A'B'FE$ và khối chóp $C'.A'B'BA$ có chung đường cao hạ từ C' nên

$$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{C'.A'B'BA}} = \frac{S_{A'B'FE}}{S_{A'B'BA}} = \frac{2S_{A'B'E}}{2S_{A'B'A}} = \frac{A'E}{A'A} = \frac{1}{k}$$

+) Do khối chóp $C'.ABC$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chung đường cao hạ từ C' và đáy là

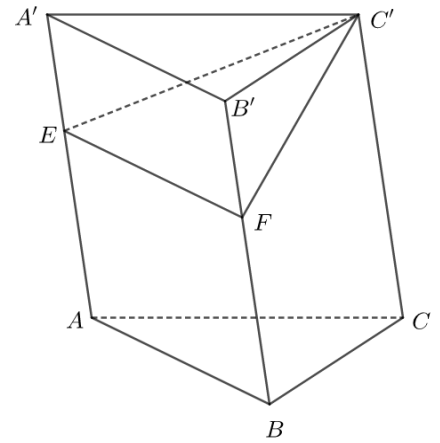
$$\Delta ABC \text{ nên } \frac{V_{C'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{C'.A'B'BA}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3}$$

Từ và suy ra

$$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3k} \Rightarrow \frac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3k} \Rightarrow V_1 = \frac{2}{3k} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$$

$$+) \text{ Đặt } V = V_{ABC.A'B'C'} \text{ Khi đó } \begin{cases} V_1 = \frac{2}{3k} \cdot V \\ V_2 = V - V_1 = V - \frac{2}{3k} \cdot V \end{cases}$$

$$\text{Mà } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7} \text{ nên } \frac{2}{3k} \cdot V = \frac{2}{7} \left(V - \frac{2}{3k} \cdot V \right) \Leftrightarrow \frac{2}{3k} = \frac{2}{7} \left(1 - \frac{2}{3k} \right) \Leftrightarrow \frac{6}{7k} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 2k = 6 \Leftrightarrow k = 3$$

**Câu 11: Chọn B**

Dựng $HM \perp CD$ tại M .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp HM \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHM) \Rightarrow CD \perp SM.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SCD) \supset SM \perp CD \\ (ABCD) \supset HM \perp CD \end{cases} \text{ nên góc giữa}$$

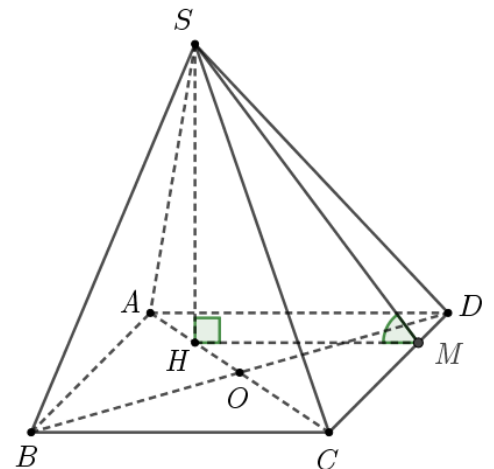
(SCD) và $(ABCD)$ là góc SMH .

Theo giả thiết ta có $SMH = 60^\circ$.

$$\text{Mặt khác ta lại có } \Delta CMH \text{ đồng dạng với } \Delta CDA \text{ nên } \frac{HM}{AD} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow HM = \frac{3}{4} AD = \frac{3}{4} a.$$

$$\text{Xét } \Delta SMH \text{ vuông tại } H \text{ ta có } SH = HM \cdot \tan SMH = \frac{3a}{4} \tan 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4} a.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{3}}{4} a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3.$$



Câu 12: Chọn D

Gọi $O = AC \cap BD$; $F = DM \cap AB$; $K = SB \cap MN$.

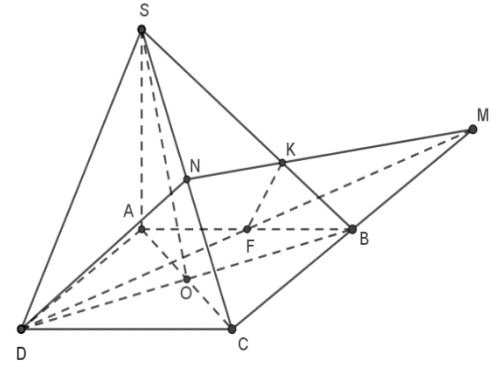
Ta có: $\angle BAD = 60^\circ$ nên tam giác ADB là tam giác đều.

K là trọng tâm $\triangle SCM \Rightarrow \frac{MK}{MN} = \frac{2}{3}$.

Xét:

$$\frac{V_{M.KFB}}{V_{M.NDC}} = \frac{MK}{MN} \cdot \frac{MF}{MD} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{M.KFB} = \frac{1}{6} \cdot V_{M.NDC} \Rightarrow V_{KFBNDC} = \frac{5}{6} V_{M.NDC}.$$

$$\text{Mà: } V_{M.NDC} = 2V_{B.NDC} \text{ và } 2V_{N.BCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} V_{S.BCD}, \text{ vì } d(N, (BDC)) = \frac{1}{2} d(S, (BDC)) = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \\ \Rightarrow V_2 = V_{KFBNDC} = \frac{5}{6} V_{M.NDC} = \frac{5}{12} V_{S.ABCD} \Rightarrow V_1 = V_{SADFKN} = V_{S.ABCD} - V_2 = \frac{7}{12} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$$



Câu 13: Chọn B

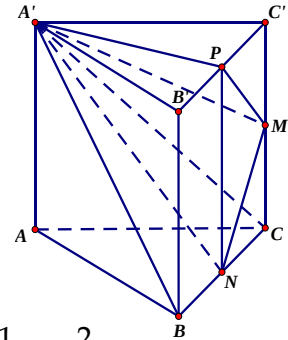
Gọi V là thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có:

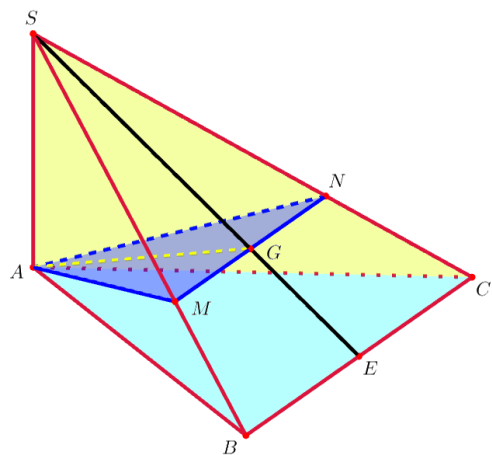
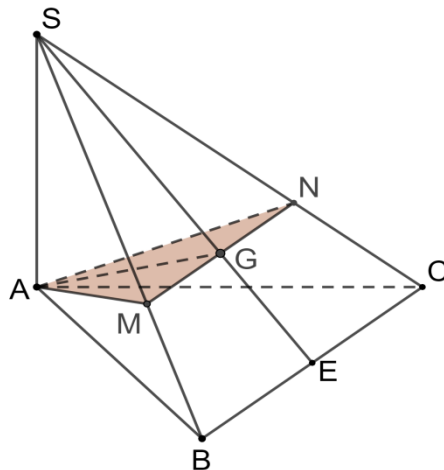
$$\begin{cases} S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4} S_{BCC'B'} \\ d(A', (MNP)) = d(A', (BCC'B')) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{A'MNP} = \frac{1}{4} V_{A'BCC'B'}. \text{ Mặt khác: } V_{A'BCC'B'} = V - V_{A'ABC} = V - \frac{1}{3} V = \frac{2}{3} V$$

$$\Rightarrow V_{A'MNP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 48 = 8 \text{ cm}^3.$$



Câu 14: Chọn A



Trong mặt phẳng (SBC) , qua G kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N . Suy ra $BC \parallel (MAN)$, $AG \subset (MAN)$. Vì vậy $(MAN) \equiv (\alpha)$.

Ta có tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = a$.

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^3}{6}.$$

Gọi E là trung điểm của BC . Ta có $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Khi đó: } \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V}{V_{SABC}} = \frac{5}{9} \Rightarrow V = \frac{5}{9} V_{SABC} = \frac{5}{9} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{54}.$$

Cách tính khác:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Ta chứng minh được $AH \perp (SBC)$ và $BMNC$ là hình thang vuông tại B, M .

$$\text{Khi đó } V_{ABMNC} = \frac{1}{3} AH \cdot \frac{1}{2} BM \cdot (MN + BC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{2a}{3} + a\right) = \frac{5a^3}{54}.$$

Câu 15: Chọn C

Gọi cạnh của khối tứ diện đều ban đầu là a , ta có $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{2}}h$.

$$\text{Thể tích của khối tứ diện ban đầu là } V = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}}h\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{h^3}{8}.$$

Do đó tổng thể tích của ba khối tứ diện đều có chiều cao x được cắt ra là $\frac{3x^3}{8}$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{3x^3}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h^3}{8} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\sqrt[3]{12}}.$$

Câu 16: Chọn B

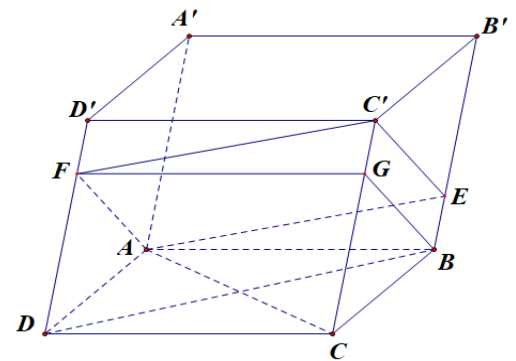
Ta thấy thiết diện của (AEF) và hình hộp là tứ giác $AFC'E$.

$$\text{Ta có } V_{ABCD.AFC'E} = \frac{x+y+z+t}{4} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$\text{trong đó } x = \frac{0}{AA'} = 0; y = \frac{BE}{BB'} = \frac{1}{4}; z = \frac{CC'}{CC'} = 1; t = \frac{DF}{DD'} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_{ABCD.AFC'E} = \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

Vậy tỉ lệ thể tích của hai khối là 1.

Câu 17: Chọn B



Ta có

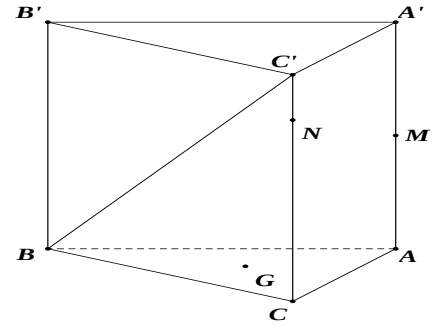
$$V_{GA'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABCA'B'C'}$$

$$V_{BB'MN} = V_{A'BB'N} = \frac{1}{2} V_{A'BCB'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABCA'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABCA'B'C'}$$

$$V_{ABB'C'} = \frac{1}{2} V_{ABCB'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABCA'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABCA'B'C'}$$

$$V_{A'BCN} = \frac{2}{5} V_{A'BCB'C'} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} V_{ABCA'B'C'} = \frac{4}{15} V_{ABCA'B'C'}$$

Do đó thể tích của khối $A'BCN$ nhỏ nhất.



Câu 18: Chọn D

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm H của hình vuông $ABCD$.

C' là trung điểm của SC và H là trung điểm AC nên $I = AC' \cap SH$ là trọng tâm ΔSAC

$$\Rightarrow SI = \frac{2}{3} SH$$

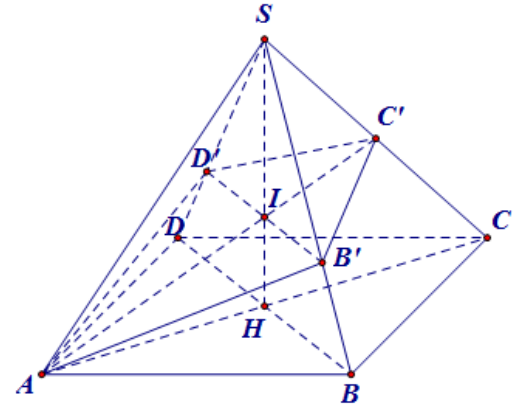
Ta có:

$$BD \perp AC, BD \perp SH \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow BD \parallel (P) \Rightarrow BD \parallel B'D'$$

$$\text{Mặt khác: } (P) \cap (SBD) = B'D', I \in AC' \subset (P), I \in SH \subset (SBD) \Rightarrow I \in B'D'$$

$$\text{Do đó: } \frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SI}{SH} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} V_{S.AB'C'D'}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$



Câu 19: Chọn A

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, MN . Gọi H là trọng tâm ΔABC .

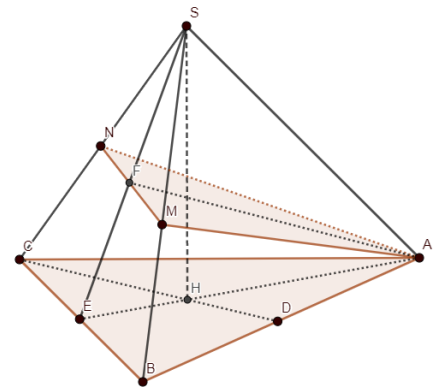
Ta có: ΔSBC cân tại $S \Rightarrow SF \perp MN$.

$$\begin{cases} SF \perp MN \\ MN = (SBC) \cap (AMN) \Rightarrow SF \perp (AMN). \\ (SBC) \perp (AMN) \end{cases}$$

Ta có: ΔASE có AF vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta ASE$ cân tại A .

$$\Rightarrow SA = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}, S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$V_{SAMN} = \frac{1}{4} V_{SABC} \Rightarrow V_{SAMNCB} = \frac{3}{4} V_{SABC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{32}.$$



Câu 20: Chọn C

Kẻ $MQ//SC, NP//SC$ ta được $(MNPQ)$ chính là mặt phẳng (α) .

Ba mặt phẳng $(\alpha), (SAB), (ABC)$ giao nhau theo ba giao tuyến MN, AB, PQ đồng quy tại I .

Xét trong tam giác SAB có $\frac{MS}{MA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{NB}{NS} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{1}{2} = 1$ nên B là trung điểm của IA .

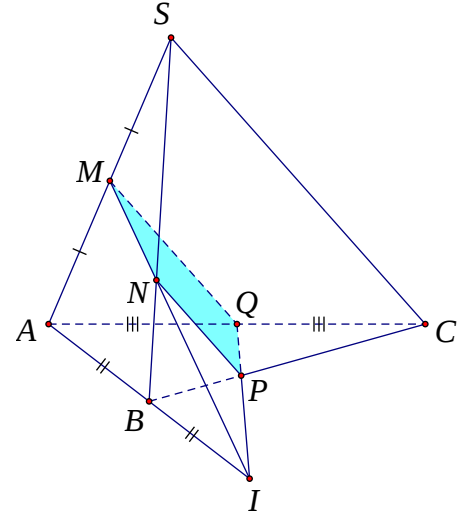
Các tam giác SAI, IAC lần lượt có các trọng tâm là N, P .

Gọi thể tích khối chóp $IAMQ$ là V .

$$\text{Ta có: } \frac{V_{IBNP}}{V_{IAMQ}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IP}{IQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{7}{9} \Rightarrow V_1 = \frac{7}{9}V \quad (1)$$

$$\frac{V_{ABSC}}{V_{AIMQ}} = \frac{AB}{AI} \cdot \frac{AS}{AM} \cdot \frac{AC}{AQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V \Rightarrow V_1 + V_2 = 2V \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } V_2 = 2V - \frac{7}{9}V = \frac{11}{9}V. \text{ Từ đó suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{11}.$$

**Câu 21: Chọn D**

$$\text{Ta có tứ diện } AMNP \text{ vuông tại } A \text{ nên } V = \frac{1}{6} AB \cdot AD \cdot AA' = \frac{1}{6} \cdot 8a \cdot 18a \cdot 28a = 672a^3.$$

Câu 22: Chọn C

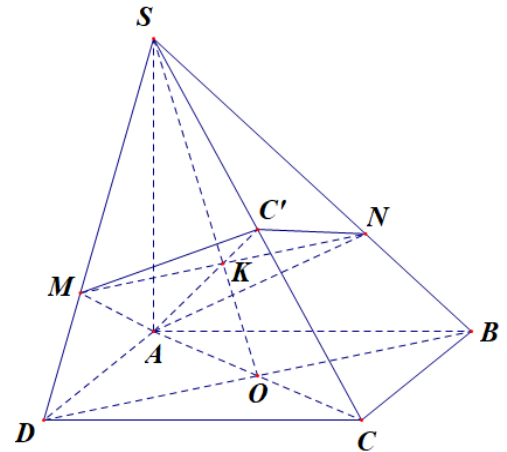
$$\text{Đặt } \frac{SA'}{SA} = 1; x = \frac{SB'}{SB}; \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}; y = \frac{SD'}{SD}. \text{ Ta có}$$

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

Có

$$m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.B'C'D'}}{2V_{S.BCD}} = \frac{1}{2} \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} xy.$$

$$3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9} \Rightarrow m \geq \frac{1}{9}.$$

**Câu 23: Chọn B**

$$\text{Đặt } x = \frac{SA'}{SA} = 1; y = \frac{SB'}{SB}; z = \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}; t = \frac{SD'}{SD}. \text{ Ta có}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 1 + 2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{t} = 3.$$

$$\text{Mà } m = \frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.B'C'D'}}{2V_{S.BCD}} = \frac{1}{2} \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} yt.$$

$$\frac{1}{y} = 3 - \frac{1}{t} \Leftrightarrow y = \frac{t}{3t-1}, \left(\frac{1}{3} < t \leq 1 \right) \Rightarrow m = f(t) = \frac{t^2}{4(3t-1)} \leq \max_{\left[\frac{1}{3}; 1 \right]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}.$$

Câu 24: Chọn C

Gọi $V = V_{A.BCD}$

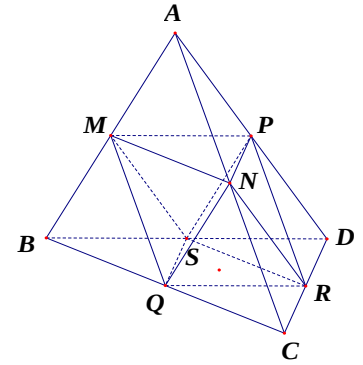
Ta có: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{A.MNP} = \frac{1}{8}V$

Tương tự $V_{B.MQS} = \frac{1}{8}V; V_{C.NQR} = \frac{1}{8}V; V_{D.PRS} = \frac{1}{8}V$

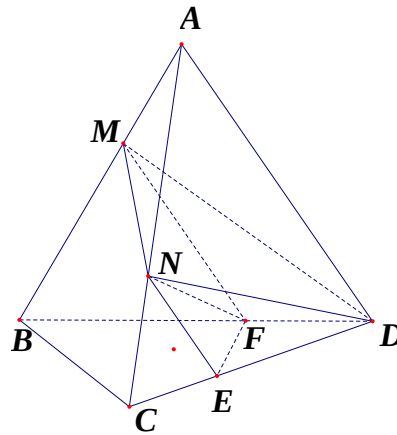
$$V_{MQNPSR} = V - V_{A.MNP} - V_{B.MQS} - V_{C.NQR} - V_{D.PRS} = V - 4 \cdot \frac{1}{8}V = \frac{V}{2}$$

Theo giả thiết $V_{MQNPSR} = 9\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{V}{2} = 9\sqrt{2} \Leftrightarrow V = 18\sqrt{2}.$

Đặt độ dài cạnh của tứ diện là a , ta có: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 6$. Vậy $a = 6$ cm.



Câu 25: Chọn A



Ta có $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (ACD) \\ AD // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = NE // AD \left(E \in CD, \frac{DE}{DC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \right)$

$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABD) \\ AD // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MF // AD \left(F \in BD, \frac{DF}{DB} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \right).$

Như vậy thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (α) là tứ giác $MNEF$.

$$\frac{V_{A.MND}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{A.MND} = \frac{2}{9}V_{A.BCD}.$$

$$\frac{V_{D.MNF}}{V_{D.MNB}} = \frac{DF}{DB} = \frac{1}{3}; \frac{V_{D.MNB}}{V_{D.ABC}} = \frac{S_{MNB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AMN} - S_{BCN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - \frac{2}{9}S_{ABC} - \frac{1}{3}S_{ABC}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow V_{D.MNF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}V_{A.BCD} = \frac{4}{27}V_{A.BCD}.$$

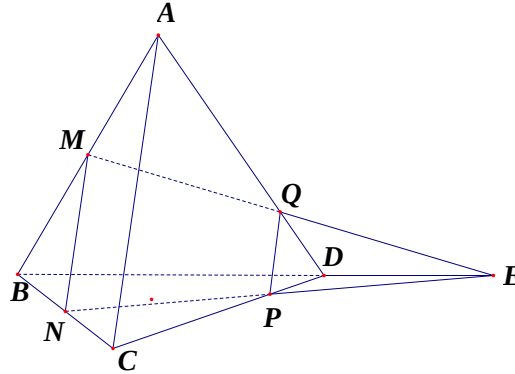
$$\frac{V_{D.EFN}}{V_{D.CBN}} = \frac{DE}{DC} \cdot \frac{DF}{DB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}; \frac{V_{D.CBN}}{V_{D.CBA}} = \frac{S_{CBN}}{S_{CBA}} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{D.EFN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9}V_{A.BCD} = \frac{2}{27}V_{A.BCD}.$$

Cộng theo vế ta được:

$$V_{A.MND} + V_{D.MNF} + V_{D.EFN} = \frac{2}{9} V_{A.BCD} + \frac{4}{27} V_{A.BCD} + \frac{2}{27} V_{A.BCD}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{12}{27} V_{A.BCD} = \frac{12}{27} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{27} = \frac{4a^3 \sqrt{2}}{108}.$$

Câu 26: Chọn C



Gọi $\begin{cases} P = EN \cap CD \\ Q = EM \cap AD \end{cases}$ suy ra thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (MNE) là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.BNM}} = \frac{ED}{EB} \cdot \frac{EP}{EN} \cdot \frac{EQ}{EM}$. Theo giả thiết: $\frac{BE}{BD} = k \Rightarrow \frac{ED}{EB} = \frac{k-1}{k}$;

Ta thấy: $\begin{cases} MN \parallel AC \\ (EMN) \cap (ACD) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel MN \parallel AC \Rightarrow \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN}$

Xét $\triangle EAB$ có EM là trung tuyến

$$\Rightarrow \frac{EB}{ED} + 1 = 2 \frac{EM}{EQ} \Rightarrow \frac{EM}{EQ} = \frac{\frac{k}{k-1} + 1}{2} = \frac{2k-1}{2k-2} \Rightarrow \frac{EQ}{EM} = \frac{2k-2}{2k-1}$$

$$\text{Thay vào: } \frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.BNM}} = \frac{k-1}{k} \cdot \left(\frac{2k-2}{2k-1} \right)^2 \Rightarrow \frac{V}{V_{E.BNM}} = 1 - \frac{k-1}{k} \cdot \left(\frac{2k-2}{2k-1} \right)^2 = \frac{8k^2 - 11k + 4}{k(2k-1)^2}.$$

Lại có:

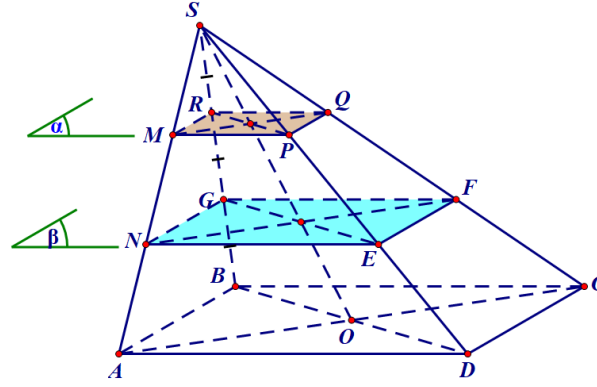
$$\frac{V_{E.BMN}}{V_{D.ABC}} = \frac{d(E, (BMN)) \cdot S_{BMN}}{d(D, (ABC)) \cdot S_{ABC}} = \frac{EB}{DB} \cdot \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{k}{4}$$

$$\text{Từ và suy ra } \frac{V}{V_{A.BCD}} = \frac{8k^2 - 11k + 4}{k(2k-1)^2} \cdot \frac{k}{4} = \frac{8k^2 - 11k + 4}{4(2k-1)^2}$$

$$\text{Nhu vậy } \frac{\frac{11\sqrt{2}a^3}{294}}{\frac{\sqrt{2}a^3}{12}} = \frac{8k^2 - 11k + 4}{4(2k-1)^2} \Leftrightarrow \frac{22}{49} = \frac{8k^2 - 11k + 4}{4(2k-1)^2} \Leftrightarrow 40k^2 - 187k + 108 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k = \frac{27}{40} \end{cases}$$

Vậy $k = 4$.

Câu 28: Chọn A



Gọi $P = (\alpha) \cap SD$, $Q = (\alpha) \cap SC$, $R = (\alpha) \cap SB$, $E = (\beta) \cap SD$, $F = (\beta) \cap SC$, $G = (\beta) \cap SB$ thì theo đề ta có:

$$\bullet V_{S.MPQR} = 10 \text{ dm}^3$$

$$\bullet V_{S.NEFG} = V_{S.NEF} + V_{S.NGF},$$

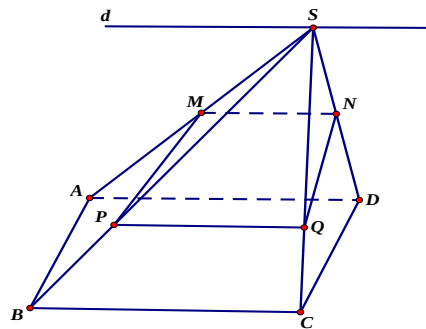
$$\frac{V_{S.NEF}}{V_{S.MPQ}} = \frac{SN}{SM} \cdot \frac{SE}{SP} \cdot \frac{SF}{SQ} = 2.2.2 \Rightarrow V_{S.NEF} = 8V_{S.MPQ},$$

$$\frac{V_{S.NGF}}{V_{S.MRQ}} = \frac{SN}{SM} \cdot \frac{SG}{SR} \cdot \frac{SF}{SQ} = 2.2.2 \Rightarrow V_{S.NGF} = 8V_{S.MRQ}$$

$$\Rightarrow V_{S.NEFG} = V_{S.NEF} + V_{S.NGF} = 8V_{S.MPQ} + 8V_{S.MRQ} = 8(V_{S.MPQ} + V_{S.MRQ}) = 8V_{S.MPQR} = 80 \text{ dm}^3.$$

Vậy thể tích của khối chóp cắt $NEFG.MPQR$ là $V = V_{S.NEFG} - V_{S.MPQR} = 80 - 10 = 70 \text{ dm}^3$.

Câu 29: Chọn B



Ta chứng minh $PQ // BC$.

$$\text{Giải sử } (SBC) \cap (SAD) = d \text{ khi đó ta có: } \begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow d // BC, d // AD.$$

M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD nên ta có $MN // AD$, $MN // d$.

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (\alpha) = PQ \\ (SAD) \cap (\alpha) = MN \\ d // MN \end{cases} \Rightarrow PQ // MN \Rightarrow PQ // BC.$$

$$\text{Xét tam giác } SBC \text{ có } PQ // BC, \frac{SP}{SB} = x \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{SP}{SB} = x.$$

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{V} &= \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP} + V_{S.NQP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.NQP}}{2V_{S.DCB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SM.SN.SP}{SA.SB.SD} + \frac{1}{2} \cdot \frac{SN.SQ.SP}{SD.SC.SB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x+2x^2}{8}.\end{aligned}$$

$$\text{Theo bài ra: } V = 2V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+2x^2}{8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \frac{SP}{SB} = x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}.$$

Cách 2:

Sử dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích của khối chóp tứ giác như sau:

Cho chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của khối chóp tại các điểm

$$M, P, Q, N \text{ với } \frac{SQ}{SC} = \frac{SP}{SB} = x, \quad \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Thì ta có: } \frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 2 + 2 \right) = \frac{x+2x^2}{8}.$$

$$\text{Theo bài ra: } V = 2V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+2x^2}{8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Mà } \frac{SP}{SB} = x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$$

Câu 30: Chọn B

Đặt $BC = a, CC' = b$

Diện tích tam giác NPQ' là:

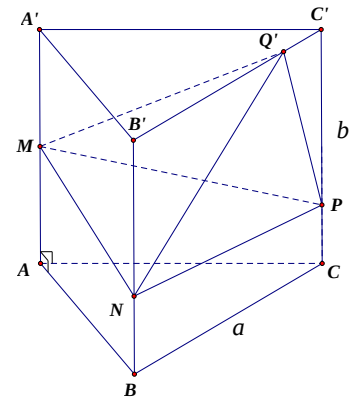
$$S_{NPQ'} = S_{BCC'B'} - (S_{NB'Q'} + S_{PC'Q'} + S_{BCPN}) = \frac{11ab}{30}$$

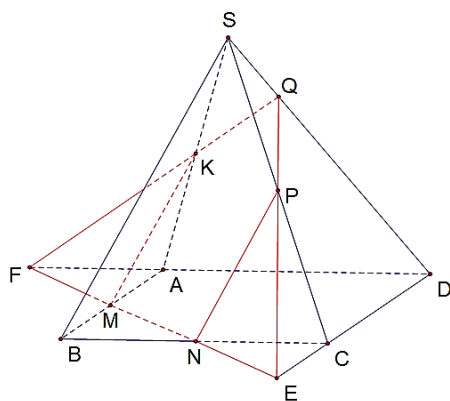
$$\text{Suy ra: } \frac{V_{M.NPQ'}}{V_{A'.BCC'B'}} = \frac{11}{30}. \text{ Tức là: } \frac{V_1}{V_{A'.BCC'B'}} = \frac{11}{30}.$$

$$\text{Mặt khác: } V_{A'.BCC'B'} + V_{A'.ABC} = V_{ABC.A'B'C'} \Leftrightarrow V_{A'.BCC'B'} + \frac{1}{3}V_2 = V_2 \Leftrightarrow V_{A'.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_2$$

$$\text{Do đó: } \frac{V_1}{\frac{2}{3}V_2} = \frac{11}{30} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}.$$

Câu 31: Chọn D





Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài MN cắt DA, DC lần lượt tại F, E .

Trong mặt phẳng (SAD) , gọi $FK \cap SD = Q$. Trong mặt phẳng (SCD) , gọi $QE \cap SC = P$.

Suy ra thiết diện là ngũ giác $MNPQK$ và $MN \parallel AC \parallel PK$.

Đặt $h = d(S, (ABCD))$

$$\frac{KA}{KS} = t \Rightarrow \frac{KA}{SA} = \frac{t}{t+1} \Rightarrow d(K, (ABCD)) = d(P, (ABCD)) = \frac{t}{t+1} .h$$

Ta có: $FA = BN = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \frac{FD}{FA} = 3.$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAD , suy ra

$$\frac{QS}{OD} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{KA}{KS} = 1 \Leftrightarrow \frac{QS}{OD} \cdot 3 \cdot t = 1 \Rightarrow \frac{QS}{OD} = \frac{1}{3t} \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{3t}{3t+1} \Rightarrow d(Q, (ABCD)) = \frac{3t}{3t+1}h$$

Mặt khác: $S_{FAM} = S_{NCE} = S_{BMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{8}S_{ABCD} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{9}{8}S_{ABCD}$

Suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S là

$$V = V_{QDEF} - V_{KAMF} - V_{PECN} = \frac{1}{3} \left(\frac{3t}{3t+1} h \cdot \frac{9}{8} S - \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{8} S - \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{8} S \right)$$

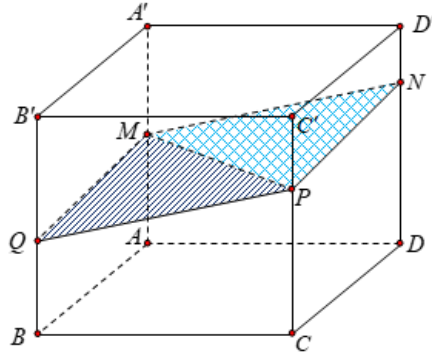
$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} \right) \cdot h \cdot S_{ABCD} \Rightarrow V = \left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} \right) V_{ABCD}$$

Phần thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{7}{13}$ phần còn lại suy ra thể tích của khối

đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{13}{20}$ thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$\Rightarrow \frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} = \frac{13}{20} \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Câu 32: Chọn A



Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB' .

Giả sử $\frac{A'M}{AA'} = x, \frac{C'P}{CC'} = y, \frac{D'N}{DD'} = z, \frac{B'Q}{BB'} = t$. Khi đó $x + y = z + t$.

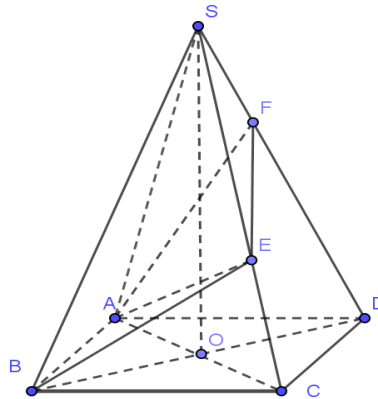
$$\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'D'.ABD}} = \frac{x + z + t}{3} \Rightarrow \frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{x + z + t}{6}.$$

$$\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{C'B'D'.CBD}} = \frac{y + z + t}{3} \Rightarrow \frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{y + z + t}{6}.$$

$$a_{n+1} = -2a_n.$$

$$\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{12} \Rightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'} = \frac{5}{12} \cdot V_{ABCD.A'D'C'B'} = \frac{5275}{6}.$$

Câu 33: Chọn A

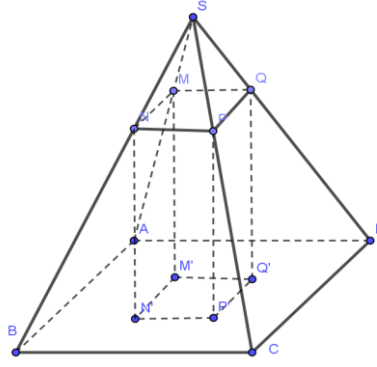


Vì $SA = SB = SC = SD = \sqrt{2}a$ nên hình chiếu vuông góc hạ từ đỉnh S xuống đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, tức là trùng với điểm $O = AC \cap BD$.

$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2 + a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}.$$

$$\text{Ta có: } V_{S.ABEF} = V_{S.ABE} + V_{S.AEF} = \frac{SE}{SC} \cdot V_{SABC} + \frac{SE}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} \cdot V_{SACD} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a^3}{6} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a^3}{6} \right) = \frac{5\sqrt{3}a^3}{36}.$$

Câu 34: Chọn B



Đặt $\frac{SM}{SA} = x (0 < x < 1)$, kí hiệu V, h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho.

Theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} = \frac{SM}{SA} = x$

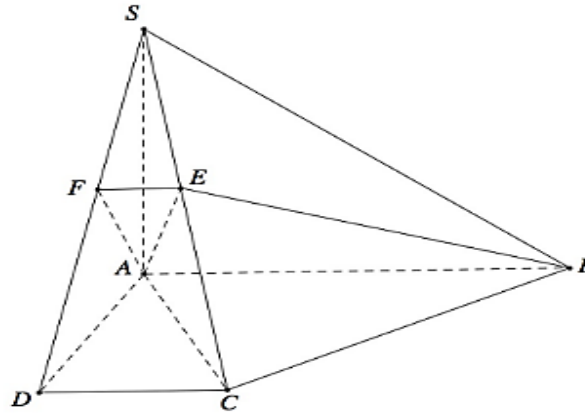
Và $\frac{d(M, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{AM}{SA} = 1 - x \Rightarrow d(M, (ABCD)) = (1 - x)h$.

Vì vậy $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = MN.MQ.d(M, (ABCD)) = x^2.(1 - x)h.AB.AD = 3x^2(1 - x)V$

Theo BDT Co-si, ta có: $x^2(1 - x) = \frac{1}{2}x.x.(2 - 2x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x + x + 2 - 2x}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$.

Do đó, $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} \leq \frac{4}{9}V$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Câu 35: Chọn A



Ta có: $\begin{cases} (ABE) \cap (SDC) = Ex \\ AB \parallel DC \end{cases} \Rightarrow Ex \parallel DC \parallel AB$.

Gọi $F = Ex \cap SD$, $\frac{SE}{SC} = x, (0 < x < 1) \Rightarrow \frac{SF}{SD} = \frac{SE}{SC} = x$.

Do $ABCD$ là hình thang có $AB = 2CD$ nên $S_{\Delta ACB} = 2S_{\Delta ADC} \Rightarrow S_{\Delta ADC} = \frac{1}{3}S_{\square ABCD}; S_{\Delta ACB} = \frac{2}{3}S_{\square ABCD}$.

Ta có:

$$\frac{V_{S.ACD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\square ABCD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ACD} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\square ABCD}} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{2}{3} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Lại có: } \frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ACD}} = \frac{SE}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = x^2 \Rightarrow V_{S.AEF} = x^2 \cdot V_{S.ACD} = \frac{1}{3} x^2 \cdot V_{S.ABCD}.$$

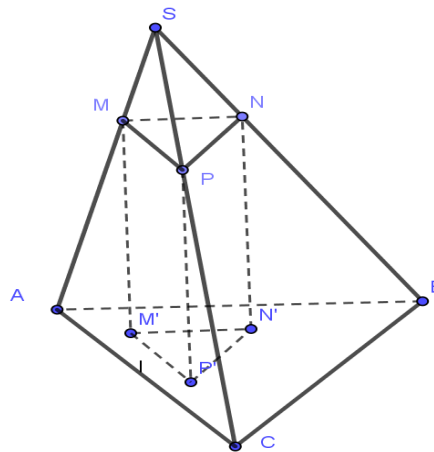
$$\frac{V_{S.ABE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SC} = x \Rightarrow V_{S.ABE} = x \cdot V_{S.ABC} = \frac{2}{3} x \cdot V_{S.ABCD}.$$

Theo bài ra mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau nên $V_{S.ABEF} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$

$$\Leftrightarrow V_{S.AEF} + V_{S.ABE} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} x \right) \cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \end{cases}. \text{ Do } 0 < x < 1 \Rightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}.$$

Câu 36: Chọn B



Đặt $\frac{SM}{SA} = x (0 < x < 1)$, kí hiệu V, h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho.

Theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{SM}{SA} = x$

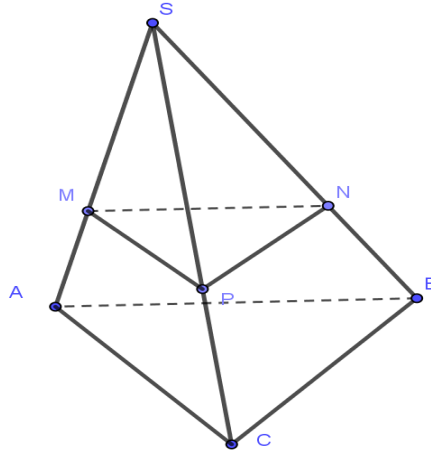
$$\text{Và } \frac{d(M, (ABC))}{d(S, (ABC))} = \frac{AM}{SA} = 1 - x \Rightarrow d(M, (ABC)) = (1 - x)h.$$

$$\text{Vì vậy } V_{MNP.M'N'P'} = S_{MNP} \cdot d(M, (ABCD)) = x^2 \cdot (1 - x)h \cdot S_{ABC} = 3x^2(1 - x)V$$

$$\text{Theo BDT Co-si, ta có: } x^2(1 - x) = \frac{1}{2} x \cdot x \cdot (2 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x + x + 2 - 2x}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.$$

$$\text{Do đó, } V_{MNP.M'N'P'} \leq \frac{4}{9} V. \text{ Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow x = 2 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Câu 37: Chọn A

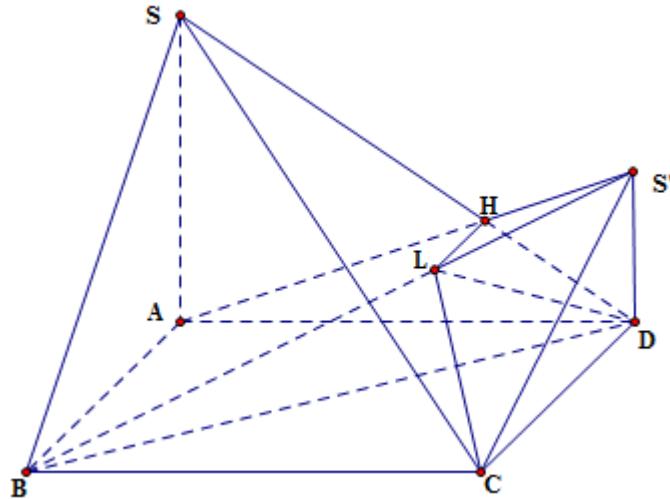


Đặt $\frac{SM}{SA} = x (0 < x < 1)$. Theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = x$

Và $V_{S.MNP} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} V_{S.ABC} = x^3 \cdot V_{S.ABC}$ Theo giả thiết, $V_{S.MNP} = \frac{1}{2} V_{S.ABC}$ nên

$$x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Câu 38: Chọn C



Ta có $V_2 = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}$, $V_{S'.ABCD} = \frac{1}{3} S'D \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} V_2$.

Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap (SCD)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$. Do $AB \parallel CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB .

$$V_1 = V_{HLCDAB} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}; \quad \frac{S'H}{HA} = \frac{S'D}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S'H}{S'A} = \frac{1}{3}$$

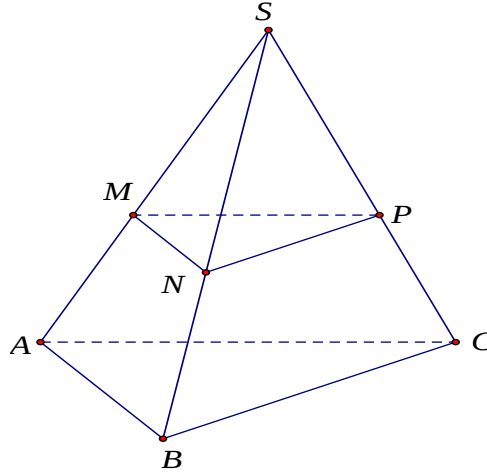
$$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \frac{S'H \cdot S'L}{SA \cdot SB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow V_{S'.HLD} = \frac{1}{9} V_{S'.ABD} = \frac{1}{18} V_{S'.ABCD}$$

$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \frac{S'L}{S'B} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \frac{1}{3} V_{S'.BCD} = \frac{1}{6} V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \frac{1}{18} V_{S'.ABCD} + \frac{1}{6} V_{S'.ABCD} = \frac{2}{9} V_{S'.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \frac{7}{9} V_{S'.ABCD} = \frac{7}{18} V_2. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{18}$$

Câu 39: Chọn D



Mặt phẳng (P) song song với (ABC) và cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P .

Theo Ta-let ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = x > 0$.

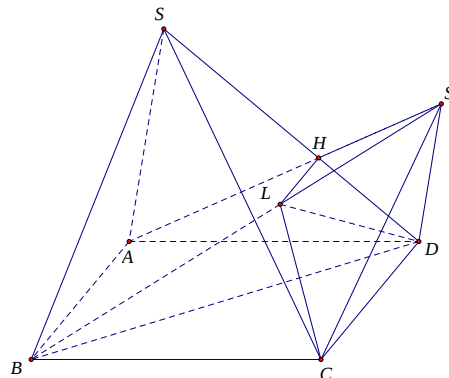
Do đó $\frac{V_{S.MNP}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = x^3 > 0$.

Theo giả thiết: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{SABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow MN = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Vì tam giác ABC đều cạnh a nên tam giác MNP là tam giác đều có cạnh bằng $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

$$\text{Vậy } S_{MNP} = \frac{\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4\sqrt[4]{4}}.$$

Câu 40: Chọn C



$$\text{Ta có } \frac{V_{S'.ABCD}}{V_2} = \frac{S'D}{SA} = k.$$

Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap (SCD)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$. Do $AB // CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB . $V_1 = V_{HLCDAB} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}$.

$$\frac{S'H}{HA} = \frac{S'D}{SA} = k \Rightarrow \frac{S'H}{S'A} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{S'L}{S'B} = \frac{k}{k+1}$$

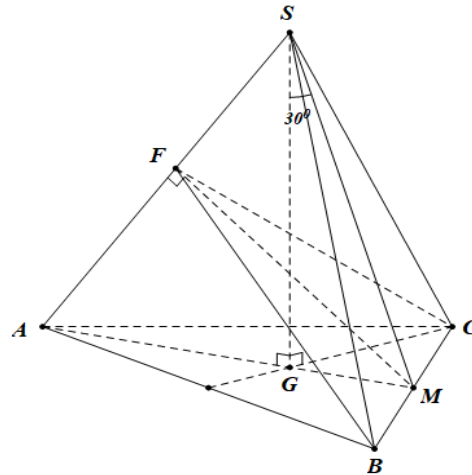
$$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \frac{S'H.S'L}{SA.SB} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \Rightarrow V_{S'.HLD} = \frac{k^2}{(k+1)^2} V_{S'.ABD} = \frac{k^2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD}$$

$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \frac{S'L}{S'B} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \frac{k}{k+1} V_{S'.BCD} = \frac{k}{2(k+1)} V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \frac{k^2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} + \frac{k}{2(k+1)} V_{S'.ABCD} = \frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \frac{3k+2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} = \frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2} V_2. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}.$$

Câu 41: Chọn B



Gọi M là trung điểm BC , $F = SA \cap (\alpha)$, trong đó (α) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA , H là hình chiếu của G lên SM . Ta có: $SA \perp (\alpha)$, $FM \subset (\alpha)$ nên $SA \perp FM$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên SG là đường cao hình chóp ứng với đáy (ABC) và ABC là tam giác đều.

Ta có:

AM vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao trong tam giác đều nên $AM \perp BC$.

$SG \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$ nên $SG \perp BC$.

$AM \cap SG = G$ và $AM, SG \subset (SAM)$.

$$\text{Suy ra } BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH. \text{ Do đó: } \begin{cases} GH \perp SM \\ GH \perp BC \\ SM \cap BC = M \\ SM, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SBC).$$

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} SG \cap (SBC) = S \\ SH \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow SH \text{ là hình chiếu vuông góc của } SG \text{ lên } (SBC).$$

$$\Rightarrow (SG, (SBC)) = (SG, SH) = GSH = 30^\circ.$$

Giả sử cạnh của tam giác đều ABC là a .

$$\text{Xét tam giác } SGM \text{ vuông tại } G, \text{ ta có: } SG = GM \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAG \text{ vuông tại } G, \text{ ta có: } SA = \sqrt{AG^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

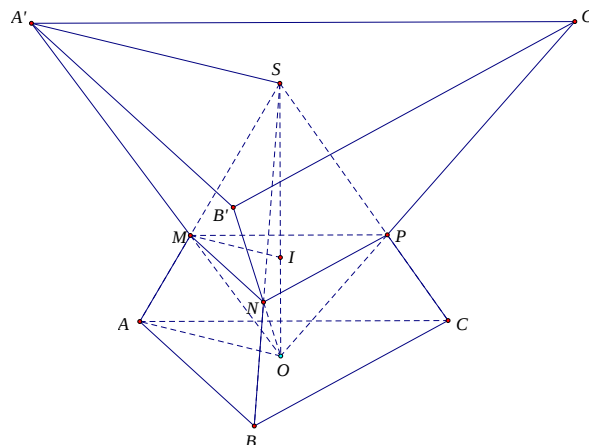
$$\text{Trong tam giác } SAM, \text{ ta có: } MF = \frac{SG \cdot AM}{SA} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

$$\text{Xét tam giác } AFM \text{ vuông tại } F, \text{ ta có: } FA = \sqrt{AM^2 - FM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{SF}{SA} = 1 - \frac{FA}{SA} = 1 - \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}. \text{ Mà } \frac{V_{S.FBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SF}{SA} = \frac{1}{7} \Rightarrow V_1 = V_{S.FBC} = \frac{1}{7} V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{6}{7} V_{S.ABC}. \text{ Do đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{6}.$$

Câu 42: Chọn A



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mỗi cạnh bên SA, SB, SC tương ứng với các cạnh bên OA', OB', OC' . Phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$ là khối đa diện $SMNPO$.

Từ giả thiết ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ mà ta có $MN \parallel AB \parallel A'B', NP \parallel AC \parallel A'C'$ do đó $(ABC) \parallel (MNP), (A'B'C') \parallel (MNP)$ và ΔMNP đều.

Xét các tam giác vuông SMI và OMI ta có $SI = \frac{MI}{\tan 30^\circ} = MI\sqrt{3}$, $OI = \frac{MI}{\tan 60^\circ} = \frac{MI}{\sqrt{3}}$ suy ra

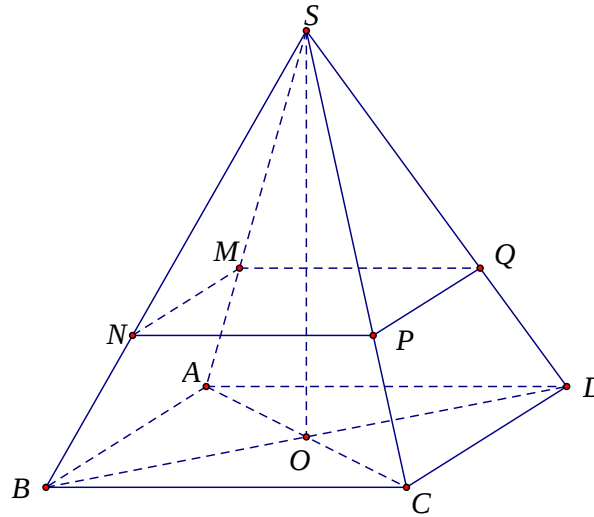
$$\frac{SI}{OI} = 3 \text{ suy ra } \frac{SI}{SO} = \frac{MN}{AB} = \frac{3}{4}, \frac{OI}{OS} = \frac{MN}{A'B'} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{A'B'}{AB} = 3 \text{ hay } \frac{V_{O.A'B'C'}}{V_2} = 3^2 = 9 \Rightarrow V_{O.A'B'C'} = 9V_2$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{S.MNP}}{V_2} = \left(\frac{SI}{SO}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$\frac{V_{O.MNP}}{V_{O.A'B'C'}} = \left(\frac{OI}{OS}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{V_{O.MNP}}{V_2} = \frac{9}{64}. \text{ Từ đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{OMNP} + V_{SMNP}}{V_2} = \frac{27}{64} + \frac{9}{64} = \frac{9}{16}.$$

Câu 43: Chọn D



Giả sử cắt viên đá khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ theo mặt phẳng $(MNPQ)$ song song với $(ABCD)$ như hình vẽ.

Theo Ta-let ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = x > 0$.

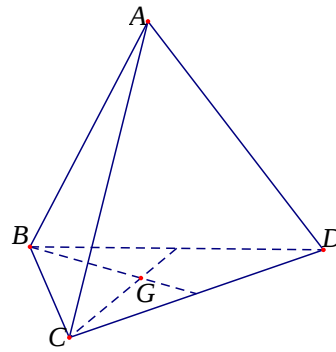
Theo giả thiết ta có:

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{V_{S.MNP} + V_{S.MPQ}}{2V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \left(\frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow MN = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}.$$

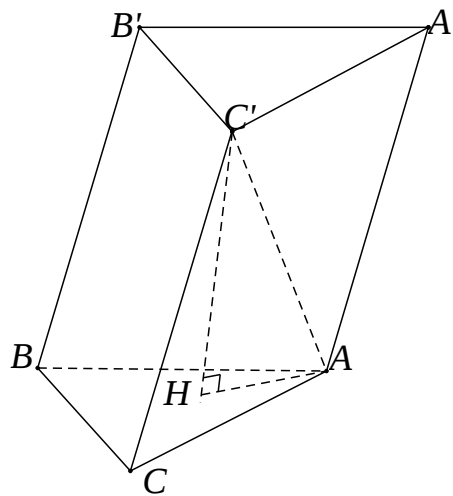
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $MNPQ$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{\sqrt[3]{4}}$. Vậy $S_{MNPQ} = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{4}}\right)^2 = \frac{a^2}{2\sqrt[3]{2}}$.

Câu 44: Chọn B



Ta có $\frac{V_{A.GBC}}{V_{A.BCD}} = \frac{S_{GBC}}{S_{BCD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{A.GBC} = \frac{1}{3} V_{A.BCD} = 4.$

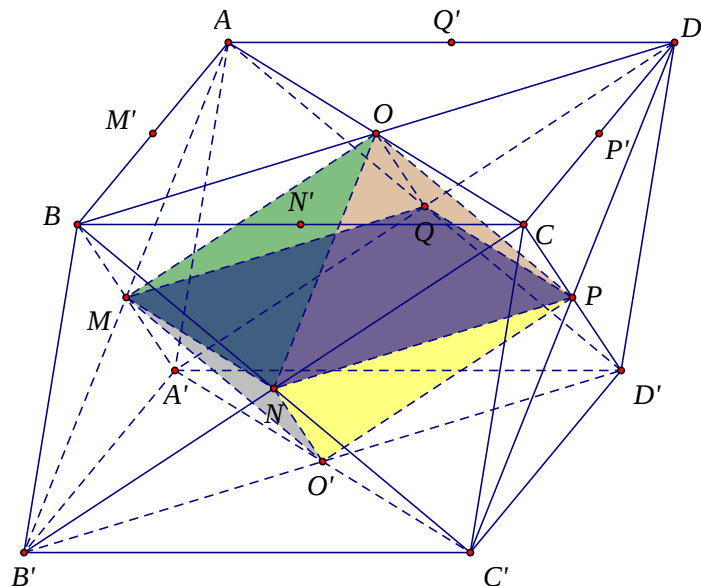
Câu 45: Chọn B



Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 = 4$ và $d(C', (ABC)) = C'H = AC' \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$

Khi đó, $V_{ABC'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Câu 46: Chọn B

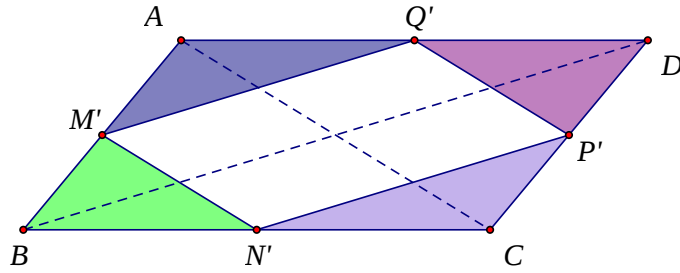


Gọi O, O', M, N, P, Q lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $ABCD, A'B'C'D', A'B'BA, BB'C'C, CC'D'D, AA'D'D$.

Ta có phần chung của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$ là bát diện $OMNPQO'$.

Gọi M', N', P', Q' lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Ta có

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCB}} = \frac{S_{M'N'P'Q'}}{S_{ABCB}} = \frac{S_{ABCB} - S_{AM'Q'} - S_{BM'N'} - S_{CN'P'} - S_{DP'Q'}}{S_{ABCB}} = \frac{S_{ABCB} - 4 \cdot \frac{1}{8} S_{ABCB}}{S_{ABCB}} = \frac{1}{2}$$



Ngoài ra, chiều cao của khối chóp $V_{O.MNPQ}$ bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

$$\text{Suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2V_{O.MNPQ}}{V_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Câu 47: Chọn B

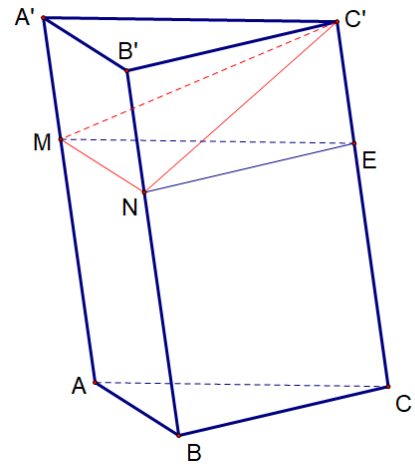
Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$. Lấy điểm E trên CC' sao cho $CC' = 3C'E$.

$$\text{Suy ra } \frac{A'M}{A'A} = \frac{B'N}{B'B} = \frac{C'E}{C'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow (MNE) \parallel (ABC).$$

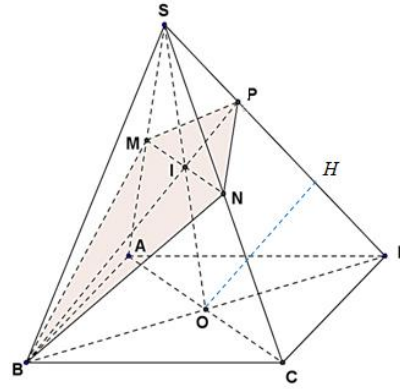
$$\text{Ta có: } V_{C'.MNE} = \frac{1}{3} V_{A'B'C'.MNE}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2}{3} V_{A'B'C'.MNE}. \text{ Mặt khác: } V_{A'B'C'.MNE} = \frac{1}{3} V.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} V = \frac{2}{9} V \Rightarrow V_2 = V - \frac{2}{9} V = \frac{7}{9} V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}.$$



Câu 48: Chọn B



Ta có M, N là trung điểm của SA, SC nên $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}$.

Cách 1: Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSOD ta có :

$$\frac{PS}{PD} \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PD} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{1}{3}.$$

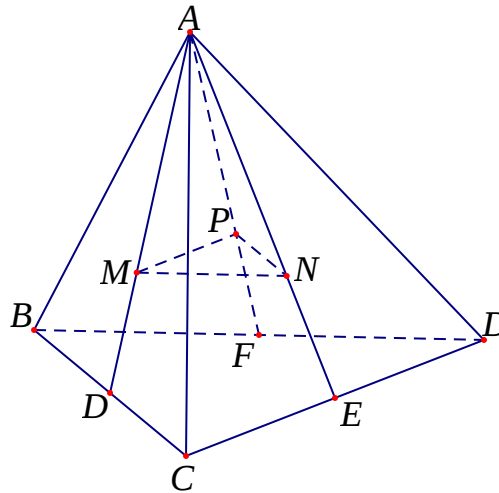
Cách 2: Kẻ $OH \parallel BP$, ta có O là trung điểm của BD nên H là trung điểm của PD .

Ta có $OH \parallel IP$ mà I là trung điểm của SO nên P là trung điểm của SH .

$$\text{Suy ra } SP = PH = HD \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Theo công thức tỉ số thể tích ta có : } \frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.BMP}}{2V_{S.BAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

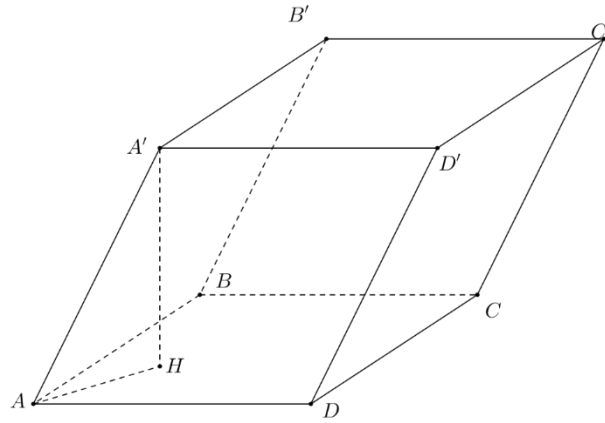
Câu 49: Chọn B



Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, DB .

$$\text{Ta có } V_{AMNP} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 V_{ADEF} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} V_{ABCD} = \frac{2}{27} V_{ABCD} = \frac{2}{27} \cdot 54 = 4.$$

Câu 50: Chọn D



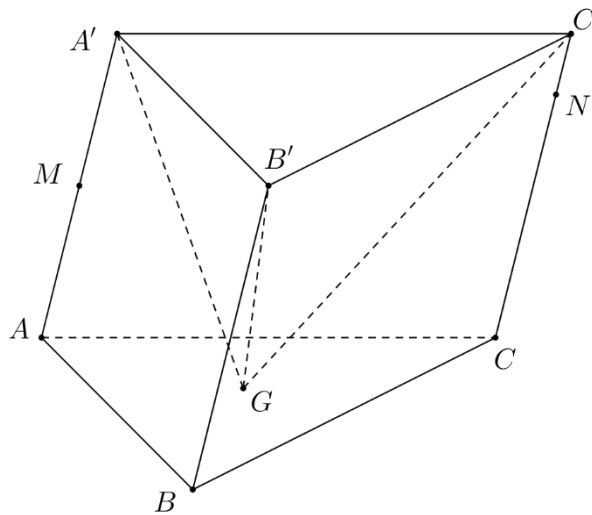
Gọi $A'H$ là đường cao của hình hộp

Khi đó $(AA'; (ABCD)) = A'AH = 45^\circ \Rightarrow A'H = AA' \cdot \sin 45^\circ = 5\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = 6^2 \cdot \sin 45^\circ = 18\sqrt{2}$. Nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = 180$.

$V_{ABCD D'B'} = V_{A.BDD'B'} + V_{C.BDD'B'} = \frac{2}{3} \cdot V_{ABD.A'B'D'} + \frac{2}{3} V_{BCD.B'C'D'} = \frac{2}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 120$.

Câu 51: Chọn A



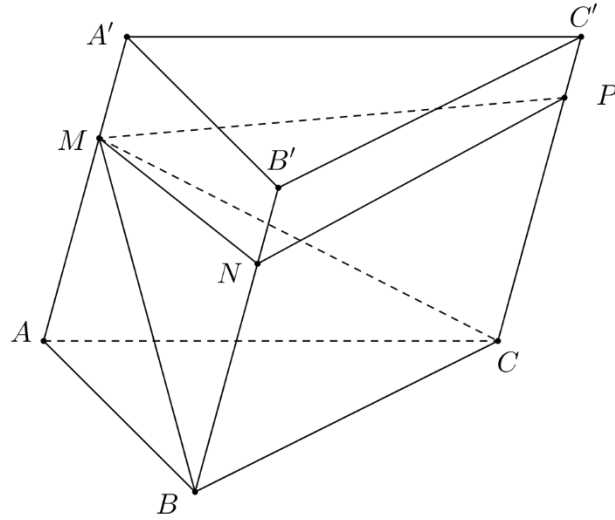
Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$. Ta có $G \in (ABC)$ nên $V_{G.A'B'C'} = \frac{1}{3} V$.

$V_{BB'MN} = V_{M.BB'N} = V_{A.BB'N} = \frac{1}{2} \cdot V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{1}{3} V$; $V_{ABB'C'} = \frac{1}{2} V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{1}{3} V$.

Ta có $\frac{S_{CBN}}{S_{CBC'}} = \frac{CN}{CC'} = \frac{4}{5}$ nên $V_{A'BCN} = \frac{4}{5} V_{A'BCC'} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} V_{A'BCC'B'} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{4}{15} V$

Vậy khối tứ diện $A'BCN$ có thể tích nhỏ nhất.

Câu 52: Chọn C

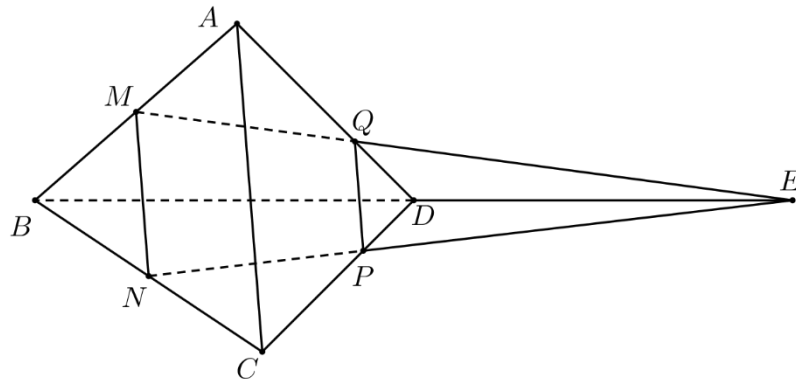


Gọi d là khoảng cách giữa BB' và CC' .

$$\text{Ta có } S_{BCPN} = \frac{1}{2}(CP + BN) \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}BB' + \frac{4}{5}CC' \right) \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{31}{20}BB' \cdot d = \frac{31}{40}S_{BCC'B'}.$$

$$\text{Do đó } V_{BCMPN} = V_{M.BCPN} = \frac{31}{40}V_{M.BCC'B'} = \frac{31}{40} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{31}{40} \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 = 31.$$

Câu 53: Chọn D



Gọi $P = CD \cap NE$, $Q = AD \cap ME$, khi đó (MNE) chia hình chóp là hai khối đa diện gồm $ACMNPQ$ và $BMNDQP$.

Dễ dàng chứng minh được P , Q lần lượt là trọng tâm tam giác EBC và EAB . Khi đó:

$$\frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{2}{3}. \text{ Ta có } V_{E.DQP} = \frac{ED}{EB} \cdot \frac{EQ}{EM} \cdot \frac{EP}{EN} \cdot V_{E.BMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} V_{E.BMN} = \frac{2}{9} V_{E.BMN}$$

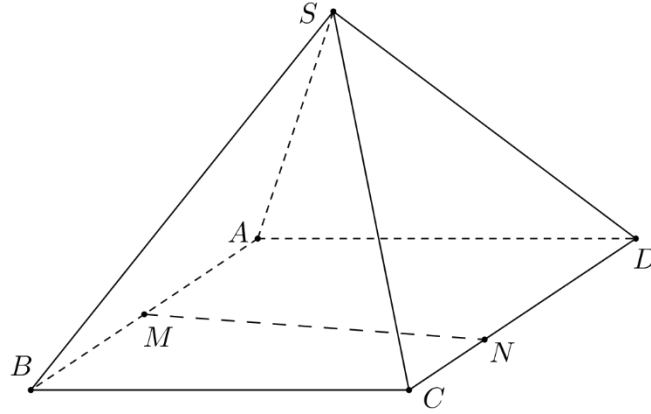
$$\Rightarrow V_{BMNDQP} = V_{E.BMN} - V_{E.DQP} = \frac{7}{9} V_{E.BMN}.$$

$$\text{Lại có } S_{\triangle BMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}, \frac{d(E; (ABC))}{d(D; (ABC))} = \frac{EB}{DB} = 2$$

$$\text{Nên } \frac{V_{E.BMN}}{V_{D.ABC}} = \frac{d(E; (ABC)) \cdot S_{\triangle BMN}}{d(D; (ABC)) \cdot S_{\triangle ABC}} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ suy ra } V_{BMNDQP} = \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{D.ABC} = \frac{7}{18} V_{D.ABC}$$

$$\Rightarrow V = V_{ACMNPQ} = V_{D.ABC} - V_{BMNDQP} = \frac{11}{18} V_{D.ABC} = \frac{11}{18} \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{12} = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}.$$

Câu 54: Chọn C

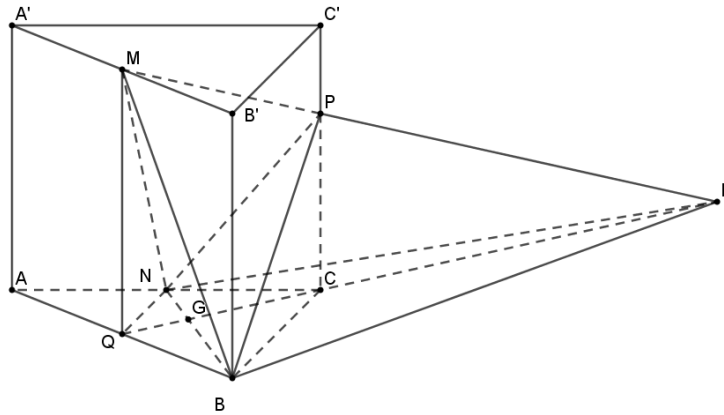


Gọi d là khoảng cách giữa AB và CD .

$$\text{Ta có } S_{MBCN} = \frac{1}{2}(BM + CN).d = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}CD \right).d = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot AB.d = \frac{5}{12} \cdot S_{ABCD}.$$

$$\text{Nên } V_{S.MBCN} = \frac{5}{12} V_{S.ABCD} = \frac{5}{12} \cdot 48 = 20.$$

Câu 55: Chọn A



Gọi B là diện tích tam giác ABC , h là độ dài đường cao của hình lăng trụ, suy ra $V = B.h$. Gọi Q là trung điểm AB , G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi V_1 là thể tích khối chóp $BMNP$, V_2 là thể tích khối chóp $MBNE$ với $E = QC \cap MP$.

$$\text{Ta có } \frac{PE}{ME} = \frac{CE}{QF} = \frac{PC}{MQ} = \frac{2}{3} \text{ do } PC \parallel MQ \text{ và } PC = 2PC' \text{ nên } \frac{PC}{MQ} = \frac{PC}{CC'} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_1}{V_2} = \frac{MP}{ME} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} V_2.$$

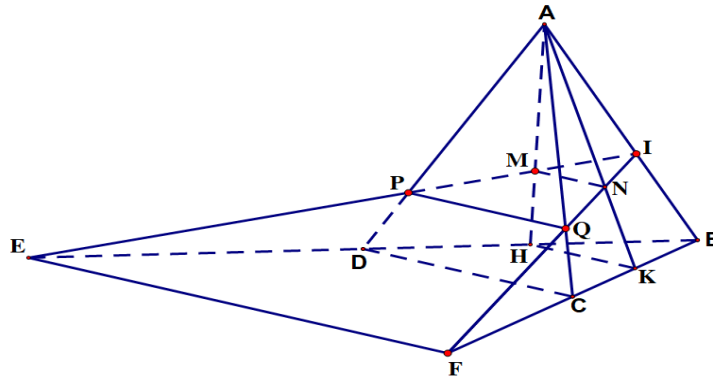
$$\text{Do } GC = \frac{2}{3}QC, CE = 2QC \Rightarrow GE = GC + CE = \frac{8}{3}QC.$$

Ta lại có $V_2 = \frac{1}{3} S_{BNE}.h$. Ta tính diện tích tam giác BNE theo diện tích tam giác ABC ta có

$$S_{BNE} = S_{BGE} + S_{NGE} = \frac{8}{3}(S_{NQC} + S_{BQC}) = \frac{8}{3} S_{QBNC}.$$

$$\text{Mà } \frac{S_{AQN}}{S_{ABC}} = \frac{AQ}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{QBCN} = \frac{3}{4} S_{ABC} \text{ do đó } S_{BNE} = \frac{8}{3} S_{QBNC} = 2B.$$

$$\text{Nên } V_2 = \frac{1}{3} S_{BNE}.h = \frac{1}{3} \cdot 2B.h = \frac{2V}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} V_2 = \frac{2V}{9}.$$

Câu 56: Chọn A

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BD, BC và $I = EM \cap AB$. Áp dụng định lí Menelaus cho

tam giác AHB ta được $\frac{AM}{MH} \cdot \frac{HE}{EB} \cdot \frac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{BI}{IA} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AI = \frac{3}{5} AB$

$\frac{AI}{AB} = \frac{3}{5} \neq \frac{AN}{AK} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Hai đường thẳng IN và BC cắt nhau, gọi giao điểm là F .

Gọi $P = EM \cap AD$. Vì $MN \parallel CD$ nên áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng Ta có $PQ \parallel EF \parallel CD$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ADB ta được

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DE}{EB} \cdot \frac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PD} = 3.$$

Có $ABCD$ là tứ diện đều cạnh bằng $a \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

$$\frac{V_{APQI}}{V_{ABCD}} = \frac{AP}{AD} \cdot \frac{AQ}{AC} \cdot \frac{AI}{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{80} \Rightarrow V_{APQI} = \frac{27}{80} V_{ABCD} = \frac{27}{80} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}. \text{ Vậy } V_{APQI} = \frac{9\sqrt{2}a^3}{320}.$$

Câu 57: Chọn C

Ta có $V_{ABC.MNP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$

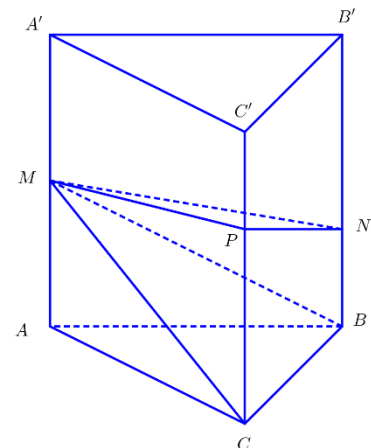
Trong đó $V_{M.ABC} = \frac{1}{3} d(M, (ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{x}{3} V$

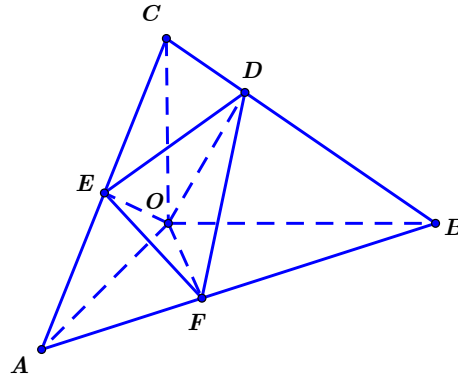
$$V_{M.BCPN} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}} V_{M.BCC'B'} = \frac{BP + CN}{BB' + CC'} V_{A.BCC'B'}$$

$$= \frac{y+z}{1+1} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{y+z}{3} V.$$

$$\text{Khi đó } V_{ABC.MNP} = \frac{x+y+z}{3} V.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.MNP} = \frac{1}{2} V \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{3} V = \frac{1}{2} V \Leftrightarrow x+y+z = \frac{3}{2}.$$

**Câu 58: Chọn A**



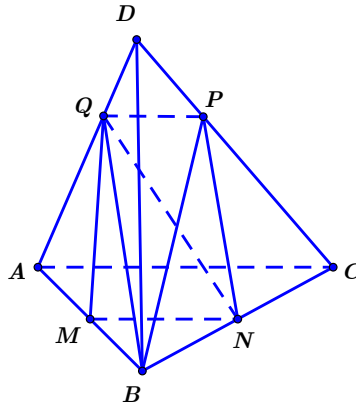
Ta có $\frac{CE}{CA} = \frac{CO^2}{CA^2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{10}, \frac{CD}{CB} = \frac{CO^2}{CB^2} = \frac{9}{13} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{4}{13}, \frac{AF}{AB} = \frac{AO^2}{AB^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{BF}{BA} = \frac{4}{5}.$

Ta có thể tích khối tứ diện $OABC : V_0 = \frac{1}{6}OA.OB.OC = 1.$

Ta có: $V_{A.OEF} = \frac{AO}{AO} \cdot \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AF}{AB} V_0 = \frac{1}{50} V_0, V_{C.OED} = \frac{CO}{CO} \cdot \frac{CE}{CA} \cdot \frac{CD}{CB} V_0 = \frac{81}{130} V_0,$

$V_{B.ODF} = \frac{BO}{BO} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{BF}{BA} V_0 = \frac{16}{65} V_0. \text{ Vậy } V_{ODEF} = \left(1 - \frac{1}{50} - \frac{81}{130} - \frac{16}{65}\right) V_0 = \frac{36}{325} V_0 = \frac{36}{325}.$

Câu 59: Chọn B



Có $MN \parallel AC \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = PQ \parallel MN \parallel AC.$ Ta chia khối đa diện thành các khối tứ diện $V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}.$

Thể tích khối tứ diện đều đã cho là $V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12}.$

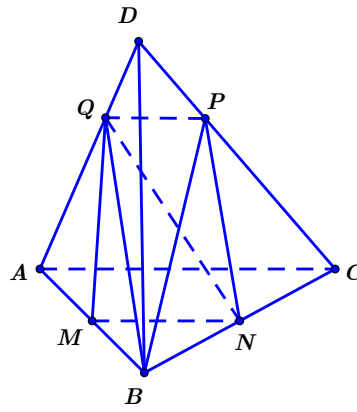
Ta có $V_{D.PQB} = \frac{DP}{DC} \cdot \frac{DQ}{DA} \cdot \frac{DB}{DB} V_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_0 = \frac{4}{9} V_0.$

Và $V_{B.MNQ} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BQ}{BQ} V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}} V_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{AQ}{AD} V_0 = \frac{1}{12} V_0.$

Và $V_{B.PQN} = \frac{BP}{BP} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot \frac{BN}{BC} V_{B.PQC} = \frac{1}{2} V_{B.PQC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{PQC}}{S_{ADC}} V_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} V_0 = \frac{1}{9} V_0.$

Vậy $V_{BMNPQD} = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9}\right) V_0 = \frac{23}{36} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{23\sqrt{2}}{432}.$

Câu 60: Chọn D



*Có $MN \parallel AC \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = PQ \parallel MN$. Ta chia khối đa diện thành các khối tứ diện

$$V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}.$$

*Thể tích khối tứ diện đều đã cho là $V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

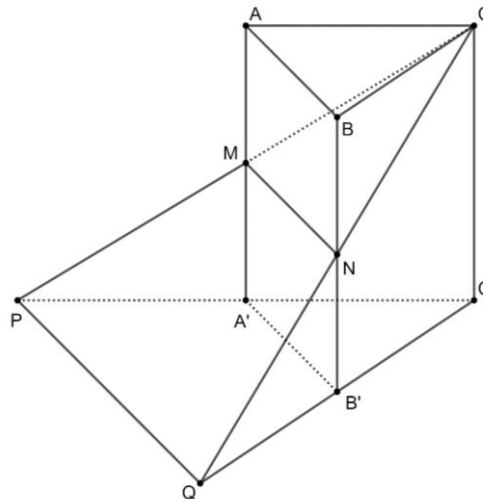
$$\text{Ta có } V_{D.PQB} = \frac{DP}{DC} \cdot \frac{DQ}{DA} \cdot \frac{DB}{DB} V_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 V_0 = \frac{1}{9} V_0.$$

$$\text{Và } V_{B.MNQ} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BQ}{BQ} V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}} V_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{AQ}{AD} V_0 = \frac{1}{6} V_0.$$

$$\text{Và } V_{B.PQN} = \frac{BP}{BP} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot \frac{BN}{BC} V_{B.PQC} = \frac{1}{2} V_{B.PQC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{PQC}}{S_{ADC}} V_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} V_0 = \frac{1}{9} V_0.$$

$$\text{Vậy } V_{BMNPQD} = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) V_0 = \frac{7}{18} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{7\sqrt{2}}{216}.$$

Câu 61: Chọn D



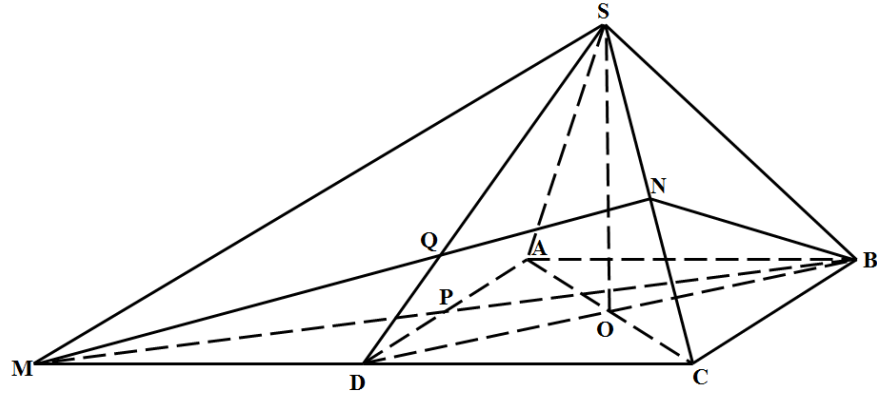
Ta có A' là trung điểm của PC' ; B' là trung điểm của QC' . Do đó

$$V_{C.C'PQ} = \frac{S_{C'PQ}}{S_{C'A'B'}} V_{C.A'B'C'} = 4V_{C.A'B'C'} = 4 \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Mặt khác } V_{A'B'C'.MNC} = \frac{\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'N}{B'B} + \frac{C'C}{C'C}}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó } V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{A'B'C'.MNC} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Câu 62: Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$; $P = MB \cap AD$ và $Q = SD \cap MN$ suy ra Q là trọng tâm của tam giác $SMC \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{d(Q, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Mặt phẳng } (BMN) \text{ chia khối chóp } S.ABCD \text{ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh } S \text{ là } SABPQN.$$

$$\text{Ta có } d(S, (ABCD)) = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

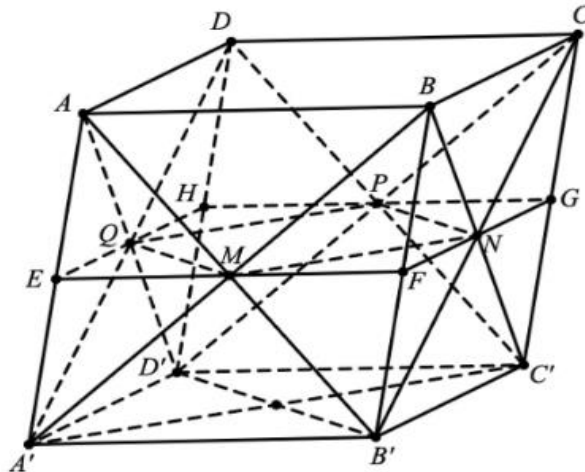
$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot AB^2 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Có } V_{N.BCM} = \frac{1}{3} d(N, (ABCD)) \cdot S_{BCM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S, (ABCD)) \cdot \frac{MD \cdot BC}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Lại có } V_{Q.DMP} = \frac{1}{3} d(Q, (DMP)) \cdot S_{DMP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} d(S, (ABCD)) \cdot \frac{MD \cdot PA}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{72}.$$

$$\text{Mà } V_{SABPQN} = V_{S.ABCD} + V_{Q.DMP} - V_{N.BCM} \quad V_{SABPQN} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} + \frac{a^3 \sqrt{2}}{72} - \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{7a^3 \sqrt{2}}{72}.$$

Câu 63: Chọn D



Thể tích khối hộp đã cho $V = 6^2 \cdot 8 = 288$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', DD'

$$\text{Ta có } V_{ACBDMNPQ} = V_{ABCDGH} - (V_{A.MNQ} + V_{B.MFN} + V_{C.NGP} + V_{D.PHQ})$$

$$V_{ABCDGH} = \frac{1}{2}V, V_{A.MNQ} = V_{B.MFN} = V_{C.NGP} = V_{D.PHQ} = \frac{DH}{DD'} \cdot \frac{DP}{DC'} \cdot \frac{DQ}{DA'} \cdot V_{D.D'C'A'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}V = \frac{1}{48}V$$

$$\text{Vậy } V_{ACBDMNPQ} = \frac{1}{2}V - \left(\frac{1}{48}V + \frac{1}{48}V + \frac{1}{48}V + \frac{1}{48}V \right) = \frac{5}{12}V = 120$$

Câu 64: Chọn D

$$\text{Ta có } V_1 = V_{S.ADQ} + V_{S.PQD} + V_{S.DNP} \text{ mà } \frac{V_{S.ADQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(S, (ABCD)) \cdot S_{\Delta AQD}}{\frac{1}{3} \cdot d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Và } \frac{V_{S.PQD}}{V_{S.BQD}} = \frac{SP \cdot SQ \cdot SD}{SB \cdot SQ \cdot SD} = \frac{SP}{SB}.$$

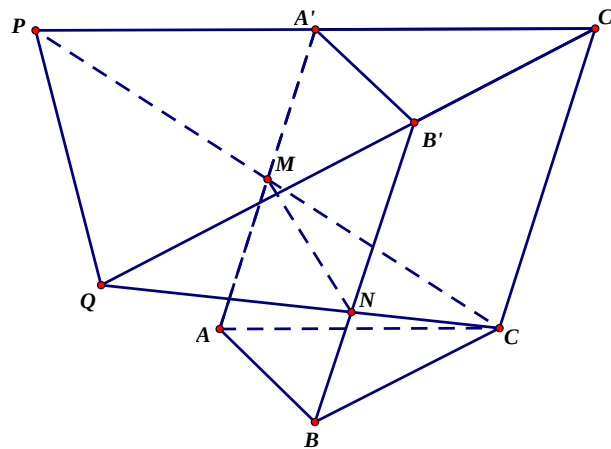
Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SBC với cát tuyến MPN ta có:

$$\frac{MB \cdot PS \cdot NC}{MC \cdot PB \cdot NS} = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PB} = 2 \text{ suy ra } \frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.PQD}}{V_{S.BQD}} = \frac{2}{3} \text{ mà } \frac{V_{S.BQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(S, (ABCD)) \cdot S_{\Delta BQD}}{\frac{1}{3} \cdot d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \text{ nên } \frac{V_{S.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{V_{S.PND}}{V_{S.BCD}} = \frac{SP \cdot SN \cdot SD}{SB \cdot SC \cdot SD} = \frac{1}{3} \text{ mà } \frac{V_{S.BCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(S, (ABCD)) \cdot S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3} \cdot d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.PND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}. \text{ Vậy } V_1 = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} \text{ suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$$

Câu 65: Chọn D

$$\text{Ta có: } \Delta PA'M = \Delta CAM (g.c.g) \Rightarrow PA' = A'C' \Rightarrow C'P = 2C'A'.$$

$$\frac{QB'}{QC'} = \frac{B'N}{C'C} = \frac{2}{3} \Rightarrow QB' = \frac{2}{3}QC' \Rightarrow QC' = 3B'C'$$

$$\text{Ta có: } S_{C'PQ} = \frac{1}{2} C'P \cdot C'Q \cdot \sin C' = \frac{1}{2} \cdot 2C'A' \cdot 3B'C' \cdot \sin C' = 3S_{C'A'B'}$$

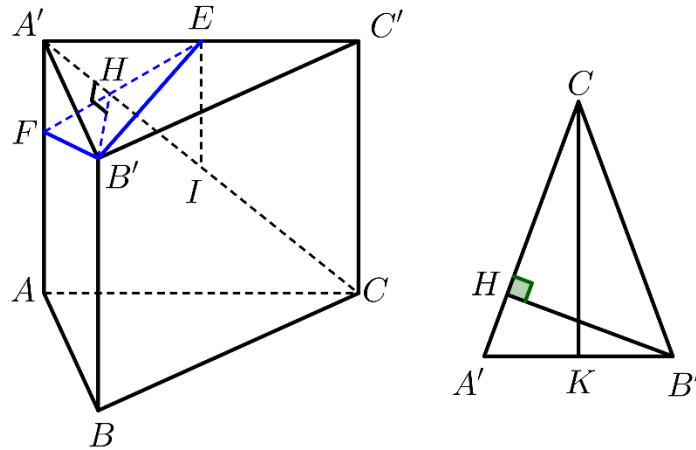
$$\text{Suy ra: } \frac{V_{C.C'PQ}}{V_{C.C'A'B'}} = \frac{S_{C'PQ}}{S_{C'A'B'}} = 3 \Rightarrow V_{C.C'PQ} = 3V_{C.C'A'B'} = V_{ABC.A'B'C'} = 2$$

Mặt khác:

$$\frac{V_{A'B'C'.MNC}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \frac{\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'N}{B'B} + \frac{C'C}{C'C}}{3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 1}{3} = \frac{13}{18} \Rightarrow V_{A'B'C'.MNC} = \frac{13}{9}$$

$$\text{Ta có: } V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{A'B'C'.MNC} = 2 - \frac{13}{9} = \frac{5}{9}. \text{ Chọn D}$$

Câu 66: Chọn C



Gọi E, I, K lần lượt là trung điểm $A'C', A'C$ và $A'B'$.

Ta có: $B'E \perp (ACC'A') \Rightarrow B'E \perp A'C$ (1)

Trong $(A'B'C)$: từ B' kẻ $B'H \perp A'C$ tại H .

Trong $(AA'C'C)$: gọi $F = HE \cap AA'$.

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} B'H \perp A'C \\ B'E \perp A'C \end{cases} \Rightarrow (B'HF) \perp A'C \Rightarrow A'C \perp B'F \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác $B'EF$ là thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) .

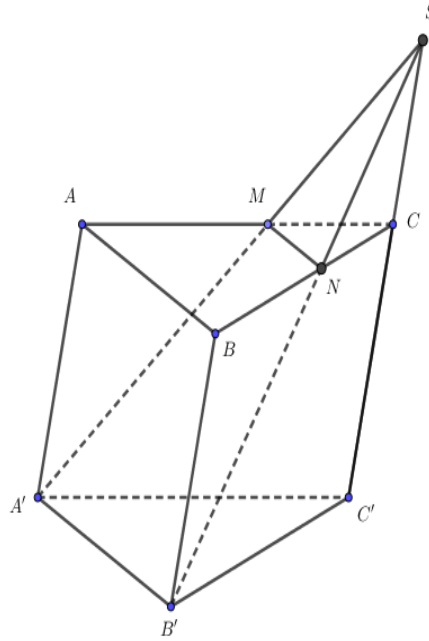
$$\text{Tam giác } CA'B' \text{ cân tại } C, \text{ ta có } CK \cdot A'B' = B'H \cdot A'C \Rightarrow B'H = \frac{CK \cdot A'B'}{A'C} = \frac{\frac{a\sqrt{19}}{2} \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{Tam giác } B'HC \text{ vuông tại } H, \text{ ta có } CH = \sqrt{B'C^2 - B'H^2} = \frac{9a}{2\sqrt{5}} \Rightarrow CH = \frac{9}{10}CA' \Rightarrow A'H = \frac{1}{4}HI$$

$$\Delta HA'F \sim \Delta HIE \Rightarrow \frac{A'F}{IE} = \frac{A'H}{IH} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{A'F}{A'A} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_{A'.B'EF}}{V_{A'.B'C'A}} = \frac{A'B'}{A'B'} \cdot \frac{A'E}{A'C'} \cdot \frac{A'F}{A'A} = \frac{1}{16} \Rightarrow V_{A'.B'EF} = \frac{1}{16} V_{A'.B'C'A} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{48} V_{ABC.A'B'C'}.$$

$$\text{Nên } \frac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{48} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{47}.$$



Vì ba mặt phẳng $(MNB'A'), (ACC'A'), (BCC'B')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt $A'M, B'N, CC'$ và $A'M, CC'$ không song song nên $A'M, B'N, CC'$ đồng quy tại S .

$$\text{Ta có } k = \frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB} = \frac{MN}{A'B'} = \frac{SM}{SA'} = \frac{SN}{SB'} = \frac{SC}{SC'}$$

$$\text{Từ đó } V_{S,MNC} = k^3 V_{S,A'B'C'} \Rightarrow V_1 = V_{MNC.A'B'C'} = (1 - k^3) V_{S,A'B'C'}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{V_{S,A'B'C'}} = \frac{3CC'}{SC'} = \frac{3(SC' - SC)}{SC'} = 3(1 - k) \Rightarrow V_{S,A'B'C'} = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{3(1 - k)}$$

$$\text{Suy ra } V_1 = (1 - k^3) \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{3(1 - k)} = \frac{(k^2 + k + 1) \cdot V_{ABC.A'B'C'}}{3}.$$

$$\text{Vì } \frac{V_1}{V_2} = 2 \text{ nên } V_1 = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow \frac{k^2 + k + 1}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} (k > 0).$$

$$\text{Vậy } k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$