

Người làm:

Zalo: - số đt zalo:

Email:

CĐ 8: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ

Dạng 1: Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước

Dạng 2: Chứng minh phân số đã cho là tối giản

Câu 1. (HSG 7 huyện Chí Linh năm học 2022 - 2023)

Chứng tỏ phân số có dạng $\frac{n-4}{3n-11}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n .

Lời giải

Gọi ước chung của $n-4$ và $3n-11$ là $d \Rightarrow \begin{cases} n-4:d \\ 3n-11:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n-12:d \\ 3n-11:d \end{cases}$

Do đó $(3n-12)-(3n-11)=-1:d \Rightarrow d=\pm 1$.

Vậy phân số có dạng $\frac{n-4}{3n-11}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n .

Dạng 3: Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản

Dạng 4: Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được

Dạng 5: Một số bài toán có lời văn

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn năm học 2022 - 2023)

Cả ba vòi nước cùng chảy vào một bể nước. Nếu vòi ¹ và vòi ² cùng chảy thì $\frac{6}{5}$ giờ được $\frac{3}{5}$ bể. Nếu vòi ² và vòi ³ cùng chảy thì $\frac{5}{12}$ giờ chảy được $\frac{7}{12}$ bể, nếu vòi ¹ và vòi ³ cùng chảy thì $\frac{9}{4}$ giờ chảy được $\frac{3}{4}$ bể. Thời gian cả ba vòi cùng chảy đầy bể là:

- A. $\frac{6}{3}$ giờ. B. $\frac{10}{3}$ giờ. C. $\frac{20}{3}$ giờ. D. $\frac{3}{3}$ giờ.

Lời giải

Chọn C

Một giờ vòi ¹ và vòi ² cùng chảy được: $\frac{3}{5} : \frac{6}{5} = \frac{1}{10}$ (bể)

Một giờ vòi ² và vòi ³ cùng chảy được: $\frac{7}{12} : \frac{5}{12} = \frac{7}{60}$ (bể)

Một giờ vòi ¹ và vòi ³ cùng chảy được: $\frac{3}{4} : \frac{9}{4} = \frac{1}{12}$ (bể)

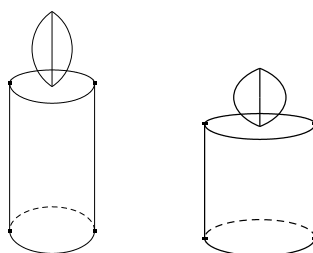
Một giờ cả ba vòi cùng chảy được: $\left(\frac{1}{10} + \frac{7}{60} + \frac{1}{12}\right) : 2 = \frac{3}{20}$ (bể)

Thời gian cả ba vòi cùng chảy đầy bể là: $1 : \frac{3}{20} = \frac{20}{3}$ (giờ)

B. Tự luận

Câu 3. (HSG 7 huyện Quế Võ năm học 2022 - 2023)

Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao. Tìm tỉ lệ chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến.



Lời giải

Gọi chiều cao ban đầu ngọn nến thứ nhất là x cm

Chiều cao ban đầu ngọn nến thứ hai là y cm (Điều kiện: $x > 0, y > 0$)

Giả sử tốc độ tiêu hao của hai cây nến khi cháy là không đổi.

Mỗi giờ cây nến thứ nhất giảm $\frac{x}{6}$ cm

$\Rightarrow$ Sau 3 giờ chiều cao cây nến thứ nhất còn: $x - 3 \cdot \frac{x}{6} = \frac{x}{2}$ cm.

Mỗi giờ cây nến thứ hai giảm $\frac{y}{8}$ cm

$\Rightarrow$ Sau 3 giờ chiều cao cây nến thứ hai còn: $y - 3 \cdot \frac{y}{8} = \frac{5y}{8}$ cm.

Vì sau 3 giờ cháy, hai cây nến có cùng chiều cao nên ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{5y}{8} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

Vậy tỉ lệ chiều cao ban đầu của hai ngọn nến là $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Đồng Xuân năm học 2022 - 2023)

Một người gửi tiết kiệm tại ngân hàng với số tiền là 200 triệu đồng, gửi theo lãi suất 6% kỳ hạn một năm lĩnh lãi mỗi quý (3 tháng). Theo quy định nếu đến hạn mà người gửi không đến lĩnh lãi thì số tiền lãi đó sẽ được nhập vào vốn gửi ban đầu. Do công việc người đó

không đến lĩnh kỳ quý thứ nhất, các quý còn lại thì vẫn được lĩnh lãi bình thường. Vậy tổng số tiền gửi và lãi sau 1 năm là bao nhiêu?

Lời giải

Lãi suất mỗi quý là: $6\% : 4 = 1,5\%$

Tiền lãi quý thứ nhất là: $200.1,5\% = 3$ (triệu)

Tổng số tiền cả vốn và lãi sau quý thứ nhất là: $200 + 3 = 203$ (triệu)

Tiền lãi quý thứ hai là: $203.1,5\% = 3,045$ (triệu)

Tiền lãi quý thứ ba và thứ tư bằng tiền lãi quý thứ hai.

Vậy tổng số tiền cả vốn lẫn lãi sau 1 năm là: $200 + 3 + 3,045.3 = 212,135$ (triệu)

Câu 5. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm học 2022 - 2023)

Hai cửa hàng A và B bán cùng một loại bút với giá 15000 đồng một chiếc, nhưng mỗi cửa hàng áp dụng hình thức khuyến mãi khác nhau:

Cửa hàng A : Nếu mua 3 chiếc trở lên thì được giảm 25% cho tổng số bút mua, nếu mua từ 10 chiếc trở lên thì từ chiếc thứ 10 trở đi thì mỗi chiếc lại được giảm thêm 5% so với giá giảm ban đầu.

Cửa hàng B : Cứ mua 3 chiếc thì được tặng thêm 1 chiếc.

Bạn An cần mua đúng 13 chiếc bút cho hoạt động nhóm thì bạn ấy nên mua ở cửa hàng nào để tiết kiệm và tiết kiệm bao nhiêu tiền so với cửa hàng kia.

Lời giải

Nếu mua ở cửa hàng A thì An phải trả số tiền là:

$$(9.15000).75\% + [(4.15000).75\%] 95\% = 144000 \text{ (đồng)}$$

Nếu mua ở cửa hàng B , cứ 3 chiếc thì được tặng 1 chiếc, nên để có 13 chiếc bút thì An phải trả số tiền là: $9.15000 + 15000 = 150000$ (đồng)

Vậy An mua bút ở cửa hàng A thì sẽ tiết kiệm hơn, và tiết kiệm được:

$$150000 - 144000 = 6000 \text{ (đồng)}, \text{ so với mua ở cửa hàng } B.$$

Dạng 6: Các bài toán về so sánh

Câu 1. (HSG 7 huyện Tiền Hải năm học 2022 - 2023)

Cho $M = \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{53.55}$. Tính M và so sánh M với $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{53.55} \\ &= 3 \left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \dots + \frac{1}{53.55} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots + \frac{2}{53.55} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5-3}{3 \cdot 5} + \frac{7-5}{5 \cdot 7} + \frac{9-7}{7 \cdot 9} + \frac{11-9}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{55-53}{53 \cdot 55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{53} - \frac{1}{55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{55-3}{165} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{52}{165} \\
 &= \frac{26}{55}
 \end{aligned}$$

$$M = \frac{26}{55} < \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Ta có

Câu 2. (HSG 7 huyện Chương Mỹ năm học 2022 - 2023)

Cho tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$. So sánh S với 1.

Lời giải

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}, k > 1)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 &\text{Thay } k = 10; 11; 12; \dots; 2025, \text{ ta có } S < \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} \\
 &\Rightarrow S < \frac{1}{9} - \frac{1}{2025} < 1. \text{ Vậy } S < 1.
 \end{aligned}$$

Câu 3. (HSG 7 Bắc Giang năm học 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 &\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} \\
 &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2024^2 - 2023^2}{2023^2 \cdot 2024^2} \\
 &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} - \frac{1}{2024^2} \\
 &= 1 - \frac{1}{2024^2}
 \end{aligned}$$

Ta thấy $1 - \frac{1}{2024^2} < 1$

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$$

Do vậy

Câu 4. (HSG 7 huyện Mường Lát năm học 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $A < \frac{3}{16}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$

$$3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A + A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

Đặt $B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$

$$3B = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$3B + B = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$4A < \frac{3}{4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$A < \frac{3}{16}$$

Do đó

Câu 5. (HSG 7 huyện Đồng Xuân năm học 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) - \frac{1}{100}$$

$$= \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) - \frac{1}{100} < \frac{5}{6} \quad (1)$$

Mặt khác

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900}$$

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} = \frac{7}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} > \frac{7}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>