TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ 6

==================================

Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên)

KỶ YẾU
TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG

MÔN TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 02-04/08/ 2010

Mục lục

Lời nói đầu

Toán học là một môn học đặc biệt quan trọng trong chương trình học ở bậc phổ thông. Trong những năm gần đây, các thầy giáo, cô giáo và học sinh các trường Trung học phổ thông chuyên và năng khiếu có điều kiện hội nhập với các chương trình, các chuyên đề toán quốc tế và khu vực thông qua các hoạt động hợp tác, tham dự các kỳ thi olympic và các phương tiện viễn thông quốc tế. Nhiều dạng toán mới đã hình thành, nhiều chuyên đề toán phổ thông đã được cập nhật với trình độ tiên tiến của các nước phát triển. Đặc biệt, nhiều chuyên đề toán học gắn với ứng dụng và các mô hình thực tiễn làm cho các nội dung giảng dạy và học tập môn Toán học trong trường phổ thông ngày càng phong phú và đa dạng.

Toán học không những nhằm giúp trang bị cho học sinh những kiến thức cụ thể để áp dụng trong cuộc sống thường ngày mà điều quan trọng hơn là cung cấp, rèn luyện cho học sinh các kĩ năng, phương pháp tư duy chặt chẽ, logic. Đó là những điều mà các em sẽ cần thiết trong cả cuộc đời hoạt động thực tiễn sau này.

Năm nay, Trại hè Hùng Vương đã bước sang năm thứ 6, được tổ chức tại trường THPT Chuyên Thái Nguyên. Các cuốn Kỷ yếu trại hè Hùng Vương lần thứ 2-5 ra đời đã đáp ứng được sự mong đợi, kì vọng của các thầy, các cô và các em học sinh trong khối các trường trung học phổ thông chuyên khu vực miền núi và trung du phía bắc. Ngoài các đề thi Olympic Toán Hùng Vương, Olympic Toán Hà Nội mở rộng và Olympic quốc tế Singapore mở rộng, cuốn Kỷ yếu còn giới thiệu các bài của các giáo sư, các nhà khoa học đã qua nhiều năm tâm huyết với chiến lược đào tạo tài năng trẻ của đất nước viết về một số phương pháp giải toán, các kỹ năng vận dụng logic Toán học trong cuộc sống.

Một điều đáng ghi nhận: năm nay, khối các trường tham gia Trại hè Hùng Vương đã có bước tiến dài trên con đường hội nhập. Nhiều kiến thức cập nhật, các bài học kinh nghiệm và các trao đổi semina về học thuật thuộc nhiều lĩnh vực lý thú của toán học, các chuyên đề tự chọn đặc sắc theo chương trình dành cho các lớp chuyên Toán đã được các thầy cô giáo trực tiếp giảng dạy ở các trường THPT Chuyên các tỉnh thành Bắc Giang, Điện Biên, Sơn La, Phú Thọ, Vĩnh Phúc, Lạng Sơn, Hòa Bình, Hà Giang, Tuyên Quang, Lào Cai, Quảng Ninh, Yên Bái, Cao Bằng, Bắc Ninh, Bắc cạn và Thái Nguyên viết thành các chuyên đề.

Ngoài ra, cuốn Kỷ yếu lần này còn bổ sung các đề thi đề thi Olympic Toán Hùng Vương năm 2009, Olympic Toán Hà Nội mở rộng và Olympic quốc tế Singapore mở rộng của năm 2010 và các đề toán dự tuyển do chính các trường đề nghị. Cuốn sách còn trình bày hai phụ lục được viết bằng tiếng Anh để các em có điều kiện làm quen với các thuật ngữ cơ bản, để tiếp cận và tìm hiểu sâu thêm các kiến thức cập nhật qua mạng internet và các sách chuyên đề của các nước.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn Kỷ yếu này sẽ cung cấp thêm cho các em học sinh một số kiến thức bổ sung, giúp các em hiểu sâu hơn Sách giáo khoa và chuẩn bị tốt cho các kì thi học sinh giỏi, Olympic, các kì thi tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh vào đại học.

Thay mặt Hội đồng Cố vấn Khoa học, xin chân thành cám ơn các thành viên seminar của Trại hè Hùng Vương, các đồng nghiệp, các thầy giáo, cô giáo đã đọc và có những đóng góp cho bản thảo Kỷ yếu được hoàn chỉnh.

Mọi ý kiến đóng góp xin được gửi về Ban Tổ Chức Trại hè Hùng Vương lần thứ V, Trường THPT Chuyên Hùng Vương Việt trì, Phú Thọ.

Hà Nội-Thái Nguyên, ngày 1-3 tháng 8 năm 2010

Thay mặt Hội đồng Cố vấn Khoa học

GS Nguyễn Văn Mậu

Chương 1

Đề thi Olympic Toán Hùng vương

1.1 Olympic Toán Hùng vương lần thứ 1, năm 2005

Câu 1. Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số cộng tăng. Hỏi lập được bao nhiêu cấp số cộng thoả mãn điều kiện $a_1 > 50$ và $a_5 < 100$?

Câu 2. Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số nhân tăng. Hỏi lập được bao nhiêu cấp số nhân thoả mãn điều kiện $a_5 < 100$?

Câu 3. Các số dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thoả mãn các điều kiện

$$(i)\quad 2a_1, 2a_2, 2a_3, 2a_4, 2a_5 \text{ là các số nguyên dương,}$$

$$(ii)\quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99.$$

Tìm giá trị lớn nhất của tích $P = a_1a_2a_3a_4a_5$.

Câu 4. Giả sử tam thức bậc hai $f(x)$ luôn luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $f(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai nhị thức bậc nhất.

Câu 5. Giả sử hàm trùng phương $g(x) = x^4 + bx^2 + c$ luôn luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $g(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai tam thức bậc hai.

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$. Tìm quỹ tích các điểm M thuộc hình vuông (phần bên trong và biên của hình vuông) sao cho diện tích các tam giác MAB và MAC bằng nhau.

Câu 7. Cho hình vuông $ABCD$. Giả sử E là trung điểm cạnh CD và F là một điểm ở bên trong hình vuông. Xác định vị trí điểm Q thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{AQE} = \widehat{BQF}$.

1.2 Olympic Toán Hùng vương lần thứ 2, năm 2006

Câu 1. Số đo các góc trong của một ngũ giác lồi có tỷ lệ 2 : 3 : 3 : 5 : 5. Số đo của góc nhỏ nhất bằng

[(A)] 20^0 , [(B)] 40^0 , [(C)] 60^0 , [(D)] 80^0 [(E)] 90^0.

Câu 2. Cho $a \neq 0$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = a^{2005} \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = a^{2006} \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = a^{2007}. \end{cases}$$

Câu 3. Xác định bộ số dương a, b, c sao cho

$$ax^9y^{12} + by^9z^9 + cz^{11}x^8 \geqslant 15x^4y^8z^7, \ \ \forall x > 0, y > 0, z > 0.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc BC. Xét hình bình hành $APMN$, trong đó P thuộc AB và N thuộc AC và hình bình hành $ABDC$ với đường chéo AD và BC. O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\widehat{PMO} = \widehat{NMO}$ khi và chỉ khi $\widehat{BDM} = \widehat{CDM}$.

Câu 5. Cho số dương M. Xét các tam thức bậc hai $g(x) = x^2 + ax + b$ có nghiêm thực x_1, x_2 và các hệ số thoả mãn điều kiện

$$\max\{|a|, |b|, 1\} = M.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|).$$

1.3 Olympic Toán Hùng vương lần thứ 3, năm 2007

Câu 1. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn?

(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Câu 2. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc không tù?

(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Câu 3. Xác định hai chữ số tận cùng của số sau

$$M = 2^3 + 20^{2006} + 200^{2007} + 2006^{2008}?$$

(A) 04; **(B)** 34; **(C)** 24; **(D)** 14; **(E)** Khác các đáp số đã nêu.

Câu 4. Có n viên bi trong hộp được gắn nhãn lần lượt là $1, 2, \ldots, n$. Người ta lấy ra một viên bi thì tổng các nhãn của số bi còn lại là 5048. Hỏi viên bi đó được gắn nhãn là số nào?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4; **(E)** 5.

Câu 5. Cho số tự nhiên $\overline{abc}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng các số $\overline{bca}$ và $\overline{cab}$ cũng chia hết cho 37.

Câu 6. Cho $0 < a \leqslant 2$. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = ay \\ y + \dfrac{1}{y} = az \\ z + \dfrac{1}{z} = ax. \end{cases}$$

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB < BC$. Đường phân giác BP của góc $\angle ABC$ cắt AD ở P. Biết rằng ΔPBC là tam giác cân, $PB = PC = 6$cm và $PD = 5$cm. Tính độ dài các cạnh của hình bình hành.

Câu 8. Chứng minh rằng tam thức bậc hai $g(x) = 3x^2 - 2ax + b$ có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại bộ số α, β, γ sao cho

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha. \end{cases}$$

Câu 9. Cho ba số dương a_1, a_2, a_3. Các số nguyên $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ và $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ cho trước thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} + a_3 x^{\alpha_3} y^{\beta_3}, \ \ x > 0,\, y > 0.$$

Câu 10. Tính

$$M = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}}.$$

1.4 Olympic Toán Hùng vương lần thứ 4, năm 2008

Câu 1. Hai chữ số tận cùng của số $M = 2^{2008}$ là

(A) 16, **(B)** 36, **(C)** 56, **(D)** 76, **(E)** không phải là các đáp số trên

Câu 2. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho số $A = m^2 + 5mn + 9n^2$ có chữ số tận cùng bằng 0. Khi đó hai chữ số tận cùng của A là

(A) 00, **(B)** 20, **(C)** 40, **(D)** 60, **(E)** không phải là các đáp số trên

Câu 3. Hỏi có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 2008 đồng thời không chia hết cho 2, 3 và 5?

Câu 4. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ y + yz + z = 11 \\ z + zx + x = 7 \end{cases}$$

Câu 5. Có thể tìm được hay không năm số nguyên sao cho các tổng của từng cặp trong năm số đó lập thành mười số nguyên liên tiếp?

Câu 6. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên A có 4 chữ số tận cùng là 2008 và chia hết cho 2009.

Câu 7. Xét hình thoi $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$\left(\frac{a}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{a}{r_2}\right)^2$$

luôn luôn không đổi.

Câu 8. Giải phương trình sau

$$4x^2 + 2 = 3\sqrt[3]{4x^3 + x}$$

Câu 9. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 25.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = x^2 + 3y^2 + 9z^2.$$

1.5 Olympic Toán Hùng vương lần thứ 5, năm 2009

Câu 1. Chứng minh rằng từ 2009 số tự nhiên tùy ý đều có thể chọn được một hoặc một số số mà tổng của nó chia hết cho 2009.

Câu 2. Tìm bộ ba số nguyên tố liên tiếp (liền kề) sao cho tổng bình phương của chúng cũng là một số nguyên tố.

Câu 3. Trong 100 học sinh hệ chuyên có 29 em giỏi toán, 30 em giỏi văn, 42 em giỏi nhạc. Trong số đó có 8 em vừa giỏi toán, vừa giỏi văn, 10 em vừa giỏi nhạc vừa giỏi toán, 5 em vừa giỏi nhạc vừa giỏi văn, có ba em giỏi cả ba môn.

Hỏi có bao nhiêu em chỉ giỏi toán, chỉ giỏi văn, chỉ giỏi nhạc và bao nhiêu em không giỏi môn nào?

Câu 4. Cho f, g xác định và thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{1}{2}(x+2) \\ f\Big(\dfrac{x+2}{2}\Big) + g(x+5) = x+4. \end{cases}$$

Hãy xác định $f(x)$ và $g(x)$.

Câu 5. Tìm tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$2(x^2+1)(y^2+1) = (xy+1)(x+1)(y+1).$$

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2cm, M là một điểm di động trên mặt phẳng chứa hình vuông sao cho $MA^2 + MB^2 = MC^2$. Tính khoảng cách lớn nhất từ điểm M tới điểm D.

Câu 7. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Tìm quỹ tích những điểm M trong tam giác ABC sao cho

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3,$$

trong đó A', B', C' lần lượt là giao của MA, MB, MC với đường tròn đã cho.

Câu 8. Tổng của một số các số nguyên dương là 2009. Tìm giá trị lớn nhất của tích các số nguyên dương đã cho.

Câu 9. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số là các số nguyên không âm nhỏ hơn 8 và thoả mãn điều kiện $f(8) = 2009$.

1.6 Đáp án Olympic Toán Hùng vương lần thứ 5-2009

Câu 1. Gọi 2009 số đã cho là $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_{2009}$. Xét 2009 tổng sau:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_{2009} = a_1 + a_2 + a_3 + cdots + a_{2009}$$

Nếu tồn tai một trong các tổng trên chia hết cho 2009 luôn thì ta có luôn điều phải chứng minh.

Nếu trong các tổng trên không tồn tại tổng nào chia hết cho 2009. Ta xét đồng dư của các tổng trên khi chia cho 2009. Lúc này tâp số dư khi chia 2009 của tổng này là: $S = \{1; 2; 3; ...; 2008\}$.

Theo nguyên lí Drichlet ta có ít nhất 2 trong số các tổng trên có cùng số dư khi chia cho 2009. Giả sử 2 tổng đó là S_i và S_j. $\Rightarrow |S_i - S_j| \vdots 2009$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. Gọi 3 số nguyên tố liên tiếp là p, q, r với $2 \leq p < q < s$.

Bộ ba số nguyên tố liên tiếp đầu tiên là 2,3,5 có $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$ không là số nguyên tố nên không thỏa mãn.

Bộ ba số nguyên tố liên tiếp tiếp theo là 3,5,7 có $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ là số nguyên tố nên là bộ ba thỏa mãn đề bài.

Xét $p > 3$, thì hiển nhiên $q, r > 3$. Nhận xét rằng các số nguyên tố này đều có dạng $\pm 1 (\mod 6)$ vì không chia hết cho 2 và 3. Vì thế nên tổng bình phương của chúng luôn chia hết cho 3, không phải là số nguyên tố.

Vậy bộ ba số nguyên tố liên tiếp tiếp (3,5,7) là bộ ba số nguyên tố duy nhất thỏa mãn đề bài.

Câu 3. Dùng sơ đồ Ven ta thu được:

- Số em chỉ giỏi Toán là 14.
- Số em chỉ giỏi Văn là 20.
- Số em chỉ giỏi Nhạc là 30.
- Số em không giỏi môn nào là 19.

Câu 4. Ta có

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{1}{2}(x+2) & (1) \\ f(\dfrac{x+2}{2}) + g(x+5) = x+4. & (2) \end{cases}$$

Trong (2) thay x bởi $2x + 10$ ta có $f(x+6) + g(2x+15) = 2x + 14$. Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{1}{2}(x+2) \\ f(x+6) + g(2x+5) = 2x + 14. \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được

$$\begin{cases} f(x+6) = \dfrac{7x+54}{2}(x+2) & (3) \\ g(2x+15) = \dfrac{-3x-26}{2}. & (4) \end{cases}$$

Trong (3) thay x bởi $x - 6$ ta tìm được $f(x) = \dfrac{7x+12}{2}$, trong (4) thay x bởi $\dfrac{x-15}{2}$ ta tìm được $g(x) = \dfrac{-3x-7}{4}$.

Câu 5. Theo bất đẳng thức Cauchy (Bunhiacopski), ta có

$$2(x^2+1) \geq (x+1)^2,\ \ 2(y^2+1) \geq (y+1)^2,\ \ (x^2+1)(y^2+1) \geq (xy+1)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. Suy ra

$$[2(x^2+1)(y^2+1)]^2 \geq [(x+1)(y+1)(xy+1)]^2,$$

hay

$$2(x^2+1)(y^2+1) \geq |(x+1)(y+1)(xy+1)| \geq (x+1)(y+1)(xy+1).$$

Vậy để có đẳng thức, ta phải có $(x, y) = (1, 1)$.

Câu 6. Không giảm tính tổng quát ta giả thiết hình vuông $ABCD$ có các đỉnh A, B, C, D theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ. Lập hệ trục tọa độ Oxy có đỉnh $O(0; 0), A(2; 0), C(0; 2), B(2; 2)$, gọi $M(x; y)$.
Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = MC^2 \Leftrightarrow & (x-2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = x^2 + (y-2)^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 8x + 8 + y^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-4)^2 + y^2 = 8. \end{aligned}$$

Phương trình (1) là phương trình của đường tròn có tâm $I(4; 0)$ thuộc trục Ox bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Suy ra khoảng cách lớn nhất từ M tới D là $d = MI + R = 4 + 2\sqrt{2}$.

Câu 7. Ta có $MA.MA = MB.MB = MC.MC = R^2 - MO^2$. Suy ra

$$\begin{aligned} \mu = \frac{MA}{MA} + \frac{MB}{MB} + \frac{MC}{MC} &= \frac{MA^2}{MA.MA} + \frac{MB^2}{MB.MB} + \frac{MC^2}{MC.MC} \\ &= \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - MO^2}. \end{aligned}$$

Mà

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 - 3GO^2 = 3MG^2 + 3R^2 - 3GO^2.$$

Do vậy $\mu = 3$ và $MG^2 + MO^2 = OG^2$, tức quỹ tích M là đường tròn đường kính OM.

Câu 8. Ta có một số nhận xét sau:

- Nhận xét 1: với $x_1, x_2, \cdots, x_k$ là các số nguyên dương thì

$x_1+x_2+\cdots+x_k+1 = x_1+x_2+\cdots+(x_k+1)$ và $x_1.x_2\cdots x_k.1 < x_1.x_2\cdots(x_k+1)$.

Do đó tích của các số nguyên có tổng bằng 2009 là lớn nhất khi các số nguyên đó lớn hơn hoặc bằng 2.

- Nhận xét 2: với số $n > 4$, ta có $2(n-2) > n$, do đó trong các số phải tìm không thể có số lớn hơn 4, vì nếu có số n như thế thì ta tách thành hai số 2 và $n-2$ thì tổng của chúng vẫn là 2009, trong khi tích của chúng lớn hơn, mâu thuẫn với điều kiện lớn nhất của tích.

- Nhận xét 3: Do $2^3 < 3^2$, nên trong các số cần tìm không thể có nhiều hơn hai số 2, vì khi đó ta thay ba số 2 bởi hai số 3 để được một tích lớn hơn.

- Nhận xét 4: Trong các số cần tìm không thể vừa có số 2 vừa có số 4, vì khi đó ta có thể thay số 2 và số 4 bởi hai số 3 để thu được một tích lớn hơn. Từ các nhận xét trên ta suy ra các số cần tìm sẽ gồm các chữ số 3 và một hoặc hai số 2 hoặc một số 4. Nhưng ta có $2009 = 669.3 + 2$, do đó các số cần tìm có một số 2 và 669 số 3, khi đó tích của chúng đạt giá trị lớn nhất là 2.3^{669}.

Câu 9. Ta có $MA.MA' = MB.MB' = MC.MC' = R^2MO^2$.

Suy ra

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = \frac{MA^2}{MA'.MA} + \frac{MB^2}{MB'.MB} + \frac{MC^2}{MC'.MC}$$

$$\frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - MO^2}$$

mà Do vậy quỹ tích của M là đường tròn đường kính OM.

Câu 10. Xét đa thức $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số nguyên không âm và nhỏ hơn 8. Do $f(8) = 2009$ nên $a_0 8^n + a_1 8^{n-1} + \cdots + a_n = 2009$. Thực hiện phép chia 2009 cho 8 được dư $a_0 = 1$. Lại lấy thương của phép chia này cho 8 ta được $a_1 = 3$, liên tiếp thực hiện phép chia như thế ta được đa thức cần tìm là: $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + 3x + 1$.

Chương 2

Đại cương về lịch sử môn giải tích toán học

2.1 Tóm lược lịch sử môn giải tích

2.1.1 Hy Lạp và La mã cổ đại

Pythagoras (580-500 trước công nguyên)

Định lí Pythagoras về tam giác vuông; số vô tỷ $\sqrt{2}$.

Euclid (300 trước Công nguyên)

Có quyền lực nhất trong các nhà toán học cùng thời với ông. Định lý Euclid về số hoàn hảo và vô hạn các số nguyên tố.

Arcgimedes (287-212 trước Công nguyên)

Xác định được tiếp tuyến, diện tích và thể tích chủ yếu bằng phép tính vi phân; tìm thể tích và diện tích mặt của một hình cầu; trọng tâm đối với trọng lực; đường xoắn ốc Arcgimedes; tính được sốπ.

Pappus (Thế kỷ thứ tư sau Công nguyên)

Trọng tâm của trọng lực đối với các vật thể và mặt cong tròn xoay.

2.1.2 Trung cổ

Descartes (1596-1650)

Được coi là ông tổ của hình học giải tích; đưa ra một vài khái niêm tuyệt vời.

Mersenne (1588-1648)

Chứng minh lại các ý tưởng; đường cycloid; số nguyên tố Mersenne.

Fermat (1601-1665)

Thực sự tìm ra hình học giải tích; tính toán và sử dụng đạo hàm và tích phân; sáng lập ra giải tích số hiện đại; xác suất.

Pascal (1623-1662)

Phép quy nạp toán học; hệ số nhị thức; cycloid; Định lý Pascal trong hình học; xác suất; được ảnh hưởng từ Leibnitz.

Huygens (1629-1695)

Dãy số, cycloid; sự vận động vòng tròn; Dạy học toán của Leibnitz (ai là giáo viên; ai là học sinh).

2.1.3 Cận đại

Newton (1642-1727)

Ông sáng tạo ra phép tính vi phân; tìm ra Định lý cơ bản; sử dụng chuỗi số; gần như là người sáng tạo ra thiên văn học và vật lý như là một ngành khoa học Toán.

Leibnitz

Các sáng tạo của ông là các dạng tốt nhất của phép tính vi phân; tìm ra định lý cơ bản; sáng tạo ra một vài khái niệm quý; dạy anh em nhà Bernoulli.

Anh em nhà Bernoulli (James 1654-1705, John 1667-1748)

Học được phép tính vi phân từ Leibnitz và phát triển áp dụng nó một cách tổng quát; chuỗi số; John là thầy giáo của Euler

Euler (1707-1783)

Làm việc trên phép tính vi phân và phát triển nó rất tổng quát; hệ thống hoá hình học giải tích và lượng giác; đưa ra các ký hiệu $e, \pi, i, f(x), \sin x, \cos x$; chuỗi và các tính chất; phép tính vi phân đối với sự biến thiên.

Lagrange (1736-1813)

Phép tính vi phân đối với sự biến thiên; cơ học giải tích.

Laplace (1749-1827)

Cơ học vũ trụ, lý thuyết xác suất và sự tiến bộ của con người.

Fourier (1768-1830)

Chuỗi Fourier; phương trình truyền nhiệt.

2.1.4 Hiện đại

Gauss (1777-1855)

Khởi xướng toán học chính xác với chứng minh hội tụ của chuỗi; lý thuyết số; số phức trong giải tích; đại số và lý thuyết số; hình học vi phân; hình học phi Euclid; v.v. . .

Cauchy (1789-1857)

Xử lý một cách kỹ lưỡng về giới hạn, liên tục, đạo hàm, tích phân, chuỗi, giải tích phức.

Abel (1802-1829)

Chuỗi nhị thức, phương trình bậc năm; phép tính tích phân; hàm elliptic.

Dirichlet (1805-1859)

Một người có rất nhiều đóng góp trong việc xây dựng những giá trị bền vững cho giải tích và lý thuyết số.

Liouville (1809-1882)

Tích phân của những hàm cơ bản, số siêu việt.

Riemann (1826-1866)

Tích phân Rimann; định lý hoán vị Riemann; hình học Riemann; hàm zeta Riemann; giải tích phức.

2.2 Đại cương về lịch sử môn giải tích toán học thời Hy Lạp và La mã cổ đại

2.2.1 Pythagoras (580-500 trước Công nguyên)

Ba phần năm thiên tài và hai phần năm là những điều vớ vẩn

J.R.Lowell

Nền văn minh phương Tây như một dòng sông lớn chảy theo thời gian, được nuôi dưỡng và làm giàu bởi nhiều cống hiến phong phú từ các nền văn hóa khác. Hãy để cho trí tưởng tượng của chúng ta ngược dòng thời gian quay lại vài ngàn năm trước, ở đầu nguồn của nền văn minh Hy Lạp cổ đại. Nơi đây, tới đầu nguồn của dòng sông, đứng trong mây mù bức tượng Pythagoras hiện lên huyền ảo. Cho đến bây giờ hầu hết mọi người đều nghĩ Pythagoras là một nhà toán học nhưng với những người cùng thời, ông được coi như một người thầy của sự thông thái, một nhà tín ngưỡng, một vị thánh. Một thầy phù thuỷ, một lang băm, hay một nhà chính trị tiên phong tuỳ theo từng quan điểm. Trong các tổ chức sùng bái ông, các môn đồ của ông đã phát triển các ý tưởng của ông trong suốt thời kỳ văn minh Hy Lạp.

Toán học bắt đầu với ông bằng quan niệm đầu tiên của ông rằng nó là một hệ thống có tổ chức và có thể liên kết với nhau bởi sự chứng minh chặt chẽ. Ông là người đầu tiên sử dụng từ "mathemtike" có nghĩa là toán học. Trước ông chỉ có từ "mathemata" nghĩa là kiến thức hoặc việc học nói chung.

Trong cảm nhận của ông, mọi thứ trong khoa học đều có thể dự đoán được, có thể hiểu được và có thể đưa ra các bằng chứng chặt chẽ. Ông là người đầu tiên áp dụng từ kosmos - hài hoà theo một trật tự - cho hầu hết các lĩnh vực.

Cảm nhận đầu tiên của ông về triết học phương Tây là những ý kiến của ông về tự nhiên mà hai thế kỷ sau chính là cội nguồn cho học thuyết Plato và tất cả các tư tưởng của ông được nhắc lại rất nhiều một cách có hệ thống trong học thuyết. Thậm trí ông được coi như là ông tổ của nền triết học. Ông đã từng dùng từ "philosophia" - tình yêu đối với khoa học thay cho "Sophia" (sự thông thái) giống như sự khoe khoang những hiểu biết của con người.

Bất cứ ai bắt đầu sự nghiệp của mình cũng muốn có những thành công để công bố với mọi người. Liệu chúng ta có nên tin rằng 3 phẩm chất sau đây cùng tồn tại trong một con người? Hãy xem chúng diễn ra như thế nào.

Đầu tiên có thể nói gì về cuộc đời ông? Ông là người cùng thời với Confucius, Budda và Zoroaster. Cũng như những nhân vật nổi tiếng này, từ thời sơ khai của loài người, Pythagoras được chúng ta biết đến chỉ qua truyền thuyết và những ghi chép còn lại hàng trăm năm sau khi ông chết.

Theo truyền thuyết, ông sinh ra ở đảo Samos, ngoài khơi bờ biển phía Tây Tiểu á. Thời thanh niên, ông là một người rất ham học và đã đi chu du suốt 30 năm ở Ai Cập, Babylon, Phoenicia, Syria và có lẽ cua Persia và ấn Độ. Trong suốt cuộc hành trình của mình, ông đã thu được những kinh nghiệm ban đầu về thiên văn học và toán học nguyên thuỷ. Khi trở về Samos ông không hài lòng với những gì chứng kiến ở đây - một bạo chúa có tài những thiếu sự đồng cảm - và ở tuổi 50 ông cư trú ở Hy Lạp - thuộc địa của Crotana ở phía nam nước ý.

Ở đây cuộc đời chính trị của ông bắt đầu. Ông làm thầy giáo và lập ra trường Pythagorean nổi tiếng trong đó kết hợp hàng trăm môn học với những đòi hỏi danh dự như một trường đại học đầu tiên trên thế giới. Ban đầu trường học này dường như là một giáo hội với mục tiêu cải tiến đạo đức xã hội và là nơi tập trung các hoạt động trí thức. Tuy nhiên xã hội không phải lúc nào cũng hoan nghênh những cải tiến đạo đức, và những người khác coi hội

Pythagorean như là một đảng chính trị xúc phạm đến các nguyên tố đạo đức và tôn giáo. Thậm trí những hoạt động chính trị ngày càng tăng của họ đã khuấy động sự giận dữ của công chúng, đến một chừng mực nào đó họ đã bị đàn áp mạnh mẽ, trường học bị đốt phá. Pythagoras chạy trốn đến gần thuộc địa của Metapontum, ông chết ở đây khi tuổi đã cao. Những người trong hội Pythagorean còn sống sót dù sống dải rác khắp Địa Trung Hải vẫn giữ lòng trung thành và tiếp tục trường phái triết học ấy hơn một thế kỷ sau.

Đấy là sự trung thành với cái gì vậy? Quan điểm mở đầu là thuyết Pythagoras về linh hồn và thực thể vật chất - lòng tin được đúc kết từ những kinh nghiệm của ông khi đã ở Ai Cập và châu á. Ông tin vào thuyết luân hồi hay sự đầu thai của mỗi linh hồn sau cái chết từ thể xác này sang thể xác khác của con người cũng như loài vật. Mỗi linh hồn tiếp tục quá trình đầu thai một cách không hạn định, lên hoặc xuống thành động vật cao hơn hoặc thấp hơn tuỳ theo những phẩm chất xứng đáng được khen thưởng hay những lỗi lầm khuyết điểm của mình. Chỉ có một cách duy nhất để thoát khỏi guồng quay của số phận này được sự siêu thoát là thông qua sự sám hối cả thể xác và tâm hồn. Những ý kiến này, dù là kỳ quái đối với suy nghĩ hiện thời vẫn lan rộng trong người đời xưa đóng vai trò nghi thức trong nhiều giáo giới.

Các môn đồ Pythagorean được gắn bó với nhau bởi lời thề trung thành với người khác trong hội và tuân theo một thủ lĩnh, sự sám hối được thể hiện theo nhiều cách khác nhau. Họ chia sẻ với nhau mọi thứ về vật chất. Họ ăn mặc giản dị, hành xử khiêm tốn, không cười hoặc thì thầm. Họ bị cấm ăn hạt đỗ và thịt. Lệnh cấm ăn đỗ có lẽ là điều kỳ quặc nhất trong điều cấm kỵ nguyên thuỷ và chủ nghĩa ăn chay là một biện pháp phòng ngừa tự nhiên chống lại những điều ghê tởm trong ăn uống của tổ tiên. Cũng như vậy, uống nước thay rượu đã được khuyến khích - đó cũng là lời khuyên của những nhà thông thái hoài nghi ở miền nam nước ý hiện nay.

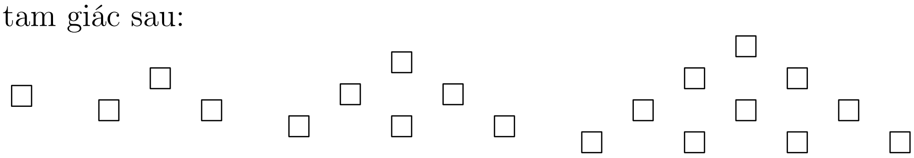
Truyền thuyết miêu tả rằng Pythagoras hơn hẳn tất cả các học trò của ông về sự thành công và hoàn hảo trong cuộc sống theo những tiêu chuẩn này. Uy tín về tri thức uyên thâm và đạo đức của ông lớn đến nỗi nhóm từ mà ông sử dụng "autuspha" - " tự chịu trách nhiệm với chính hành động của mình" đã trở thành khẩu hiệu cho quyết định cuối cùng trong bất kỳ vấn đề nào của họ. Đó cũng là thói quen để đưa ra tất cả các ý tưởng và khám phá cho người thủ lĩnh, chính điều đó làm cho chúng ta khó có thể phân biệt những thành quả của ông với những thành công của ông có sự đóng góp của các môn đồ.

Như chúng ta đã nói ở trên, hội Pythagoras thể hiện sự sám hối của thể xác qua sự khắc khổ, sự tiết chế và sự điều độ. Đây là sự phổ biến và đến bấy giờ vẫn phổ biến ở nhiều vùng của miền Đông. Điều đặc biệt ở Pythagoras nằm trong khoa học mà ông nghiên cứu nhằm đạt tới sự sám hối về tinh thần thông qua việc nghiên cứu tích cực về môn toán học và khoa học khác. Đây là sự chống đối kịch liệt việc bị động trong suy nghĩ bị chi phối bởi hầu hết những sự thờ cúng thần bí. Khoa học của Pythagoras tạo nguồn cho ảnh hưởng to lớn của ông tới nền văn minh phương Tây và ghi dấu một phần trong đặc trưng riêng biệt của nền văn minh này như là nó đã phát triển suốt 2500 năm qua.

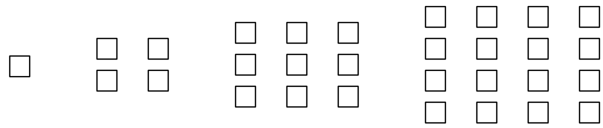
Khoá học mà Pythagoras yêu cầu bốn môn học: hình học, số học, nhạc và thiên văn học. Trong thời kỳ trung đại, nhóm các môn học này được biết đến như là "quadrivium" và sau đó được mở rộng thêm thành "trivium" gồm ngữ pháp, tu từ học và logic. Đó là bảy môn nghệ thuật rộng rãi được coi là phần chủ yếu của giáo dục bất kỳ một con người có văn hoá nào.

Toán học Hy Lạp gần như là một trong những thành tựu tri thức lớn nhất của lịch sử nhân loại. Pythagoras đã bắt đầu tất cả, không phải chỉ là trong suy đoán thực tế của viên thư ký người Babylon hay viên kiểm soát người Ai Cập, mà là chính ông, theo như một môn đồ thân cận, ông là người có tài năng ý nghĩ lên cao hơn mức bình thường. Trước ông chỉ có một vài quy tắc tách biệt về hình học có được nhờ vào kinh nghiệm thực tiễn và dường như là người sáng tạo ra các mô hình về định nghĩa, tiêu đề, định lý và chứng minh, theo đó các cấu trúc phức tạp của hình học được sinh ra từ một số ít các giả thiết được đặt ra một cách rõ ràng từ những suy diễn chặt chẽ. Truyền thuyết cho rằng ông đã nghĩ ra các ý tưởng chứng minh toán học. Ông đã phát minh ra nhiều định lý: tổng các góc trong một tam giác bất kỳ bằng hai góc vuông và định lý Pythagoras nổi tiếng về bình phương cạnh huyền của một tam giác vuông. Theo truyền thuyết kể lại rằng ông rất vui khi phát minh ra định lý tuyệt vời này đến nỗi ông đã hiến dâng một con bò đực để cảm tạ, mà đây là một hành động vi phạm lớn đến đức tin của hội Pythagorean. Người cùng hội ông cũng đã biết những tính chất của những đường thẳng song song và những tam giác đồng dạng và đã sắp xếp tất cả những điều này trong một hệ thông logic được gắn kết chặt chẽ gần như tương đương với hai cuốn sách đầu tiên "Cơ sở " của Euclid (300 năm trước Công nguyên). Điều đó chứng tỏ rằng, bắt đầu từ những điều đầu tiên mà họ đã phát minh ra môn hình học nhiều bằng chương trình học của nửa đầu chương trình học phổ thông hiện nay.

Hội Pythagorean cũng mở lối cho môn Số học - không những cho khả năng tính toán hữu ích mà còn về lý thuyết số trừu tượng. Có lẽ họ là những người đầu tiên chia các số thành các lớp chẵn và lẻ, nguyên tố và không nguyên tố. . . Biểu diễn bằng hình ảnh các số là niềm say mê của họ, việc này được nảy sinh bằng sự sắp xếp các dấu chấm theo một mô hình hình học thông dụng. Chúng ta hãy xem tam giác số: $1, 3, 6, 10 \ldots$ là số lượng các dấu chấm ở dãy hình tam giác sau:



Hiển nhiên đây là những số có dạng $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Cũng có thể biểu diễn các số chính phương $1, 4, 9, 16, \ldots$ như sau:



Tóm lại, mỗi số chính phương được tạo ra từ những số trước đó bằng cách thêm vào đường biên hình L gọi là “glomon” nghí là thước vuông của người thợ mộc. Hội Pythagorean đã đưa ra nhiều thực tế thú vị về ký hiệu số chỉ dùng hình ảnh. Ví dụ, từ những thước vuông của người thợ mộc đặt liên tiếp, lập tức suy ra một cách rõ ràng rằng tổng của n số lẻ đầu tiên bằng n^2:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2.$$

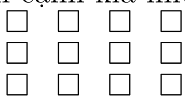
Hoàn toàn tương tự, công thức:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Suy từ tam giác số có thể chứng minh cho công thức hiển nhiên:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n(n + 1).$$

Vế trái của đẳng thức là tổng của n số chẵn đầu tiên và đẳng thức được hình dung ngay khi tổng này biểu diễn ở dạng dình chữ nhật với n dấu chấm. Trên một cạnh và n+1 dấu chấm trên cạnh kia như sau:



Có ý kiến cho rằng hội Pythagorean coi toán học là chìa khoá để giải thích về các cấu trúc tự nhiên, và có lẽ với bản thân Pythagoras cũng vậy. Phát hiện này nảy sinh ra từ một thí nghiệm thông thường với âm nhạc. Pythagoras kéo căng dây cho cây đàn lia giữa hai cái móc trên con thuyền. Khi dậy đàn được gảy lên nó phát ra âm thanh rất chuẩn. Ông nhận ra rằng khi dây đàn bị chặn bởi một vật di động được gài vào giữa dây và thuyền thì nếu phần dây dùng để gây giảm chỉ còn một nửa so với độ dài ban đầu của nó thì nó phát ra âm thanh có trường độ bằng 1/8 (quãng 8) âm thanh ban đầu; và nếu giảm 2/3 độ dài dây thì âm thanh phát ra bằng 1/5 âm thanh ban đầu; và nếu giảm 3/4 độ dài dây thì âm thanh phát ra bằng 1/4 âm thanh ban đầu. Quãng 8,5,4 là ý niệm mở đầu và sự du dương mà sau này chúng ta đã quen thuộc. Trường phái Pythagorean gây ấn tượng sâu sắc trong việc nhấn mạnh mối liên hệ rõ rệt giữa các phân số $1/2, 2/3, 3/4$ và trường độ của nốt nhạc mà người sáng tác dựa trên những suy xét hoàn toàn mang tính thẩm mĩ. Hơn nữa, như là hệ quả tiếp theo, họ cho rằng mỗi người di chuyển trong không gian phát ra một âm thanh có cường độ tỷ lệ với tốc độ di chuyển. Do vậy các hành tinh chuyển động với những tốc độ khác nhau trong các quỹ đạo riêng của chúng xung quanh Trái đất phát ra bản hoà âm của bầu trời, còn gọi là âm nhạc của bầu khí quyển. Đóng góp thêm cho thiên văn học, Pythagoras cũng xác nhận rằng Trái đất hình cầu - có lẽ vì lý do đơn giản bởi hình cầu là một khối chất rắn đẹp đẽ nhất.

Quy luật về trường độ âm nhạc được miêu tả ở đây là sự định lượng đầu tiên được khám phá về thế giới tự nhiên. Cùng với nó "triết lý hiển nhiên" được mở rộng trên các hành tinh, điều đó khiến Pythagoias tin chắc rằng các số, gồm các số nguyên và phân số đều đại diện cho tất cả mọi thứ. "Mọi thứ đều là số" trở thành khẩu hiệu của họ, không chỉ có ý nghĩa cơ bản mà còn là bản chất bất biến của bất kỳ một sự vật nào.

Nhưng học thuyết này trở nên đối lập với hình học. Bởi vì mọi thứ đều là số - nghĩa là các số hữu tỷ, và không có số nào khác - bằng chứng là chiều dài của bất kỳ một đoạn cắt nào cũng phải là chiều dài của bất kỳ một đoạn cắt nào khác với một số hữu tỷ. Không may rằng điều này là sai, vì ngay sau đó họ đã phát hiện ra rằng từ đinh lý Pythagoras suy ra hình vuông có cạnh bằng một có đọ dài đường chéo là $\sqrt{2}$, và theo những gì đã biết Pythagoras đã chứng minh rằng không có số hữu tỷ nào bình phương lên bằng 2. Sai lầm này dẫn đến sự đối đầu giữa hai nhóm học trò trong hội: một bên không tin và bên kia là không chấp nhận sai lầm này. Một bên nghĩ rằng đường chéo hình vuông cạnh bằng 1 thì không có dộ dài, còn bên kia cho là không đúng vì mọi thứ đều là số. Sự sụp đổ của các học thuyết truyền thống vì một số “không hữu tỷ ” đã là một cú sốc đối với họ và họ đã giữ kín điều này. Tuy nhiên việc phát hiện ra số vô tỷ là một thành tựu xuất sắc nhất của toán học Hy Lạp cổ đại.

Dù với sai lầm trên, Pythagoras và các môn đồ của ông vẫn giữ đức tin với số. Nếu thực sự phủ nhận các số thì toàn bộ công lao của họ sẽ mất. Họ cấm tất cả các môn đồ nghiên cứu về vấn đề này và giữ các vấn đề này trong bức màn huyền bí.

Giống như bất kỳ một giáo lý nào, trong đức tin của trường phái Pythagoras thật khó để những điều không quen trở nên đáng tin. Khái niệm cốt lõi trong hệ thống của họ là bộ tứ linh thiêng, gồm các số 1, 2, 3, 4 mà tổng 10 số linh thiêng - linh thiêng bởi 1 là điểm, 2 là đường thẳng, 3 là mặt, 4 là khối và do đó $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ là tất cả, là số của vạn vật. Điều đó khẳng định rằng tất cả các phân số mà họ được học $1/2, 2/3, 3/4$ đều là tỷ số liên tiếp của các số $1, 2, 3, 4$ và được liên kết chặt chẽ với sự hoà âm trong âm nhạc, kể cả hệ thống thập phân của chúng ta cũng là số hữu tỷ. Họ cũng chỉ ra rằng số lẻ (trừ 1) là giống đực và số chẵn là giống cái. Hơn nữa họ tin rằng một số đều có dấu hiệu riêng của chúng, ví như số 1 là số tạo ra tất cả các số, là đức Chúa trời, 2 thì đa dạng và là số giống cái đầu tiên, $3 = 1 + 2$ là số giống đực đầu tiên, là sự kết hợp thống nhất và đa dạng, $4 = 2 + 2 = 2 * 2$ là số của sự công bằng, $5 = 3 + 2$ là số của tiệc cưới, là sự kết hợp của một nam và một nữ, $6 = 1 + 2 + 3$ là số hoàn hảo, bởi nó là tổng của các ước số của nó, và những ước này là thống nhất, đa dạng và là bộ ba của thánh và có ý nghĩa lan truyền trong Thiên chúa giáo thời kì cổ đại.

Đối với chúng ta, tầm quan trọng của mớ hỗn độn những sự thờ phụng kỳ cục là nó đã vượt lên cả tư tưởng của Plato (428 - 438 trước Công nguyên) và làm nảy sinh sự thay đổi mạnh mẽ như một dòng chảy của đức tin qua các trường phái Thiên chúa giáo cổ đại, trung đại và thời kỳ phục hưng và nó vẫn có ảnh hưởng lớn cho tới ngày nay.

Plato là người có trí tuệ phi thường trong nền văn minh nhân loại. Hàng chục tác phẩm lớn của ông đã được lưu giữ với sự yêu mến và khâm phục của toàn nhân loại với những giá trị sâu sắc vầ đầy chất thơ và vì nhân vật chính trong tác phẩm của ông Socrates. Hình tượng Socrates trong suy nghĩ của Plato rất quan tâm đến sự công bằng trong xã hội, với đạo đức tốt đẹp, sự khôn ngoan và sự trăn trở cho một cuộc sống ngày càng tốt đẹp hơn. Ngoài tình yêu và sự ca tụng đối với Socrates, Plato còn rất say mê toán học. Trong những năm trung niên ông đã dành thời gian đáng kể ở miền nam nước ý để liên hệ với giáo phái Pythagorean - những người mà triết lý của họ là toán học nhưng uy lực lại là tôn giáo và sự thần bí.

2.2.2 Euclid (300 trước Công nguyên)

Bộ sách " Cơ sở" của Euclid là một trong những bộ sách vĩ đại nhất từng được viết

Bertrand Rusell

Đó là một trong những điều đối lập với bất cứ tiêu chuẩn giáo dục nào đã từng được biết đến đối với việc giảng dạy và đào tạo trong suốt 23 thế kỷ qua.

Cuốn " Element" (Cơ sở) mở đầu bằng phần hình học mà không yêu cầu người đọc phải có hiểu biết và kinh nghiệm trước khi đọc nó. Nó không đưa ra một sự giải thích kèm theo và không đưa ra một nhận xét cụ thể nào. Nó không có nội dung liên quan trực tiếp tới khoa học và thậm trí nó không gợi ý tới một sự ứng dụng nào. Cuốn sách này cũng không đặc sắc các vấn đề nêu ra theo bối cảnh lịch sử và toán học và cũng không nêu tên của bất kỳ một người nào. Sự ra đời của cuốn sách được Bible so sánh " như Chúa trời đã tạo ra cả Thiên đường và Trái đất" - Cuốn "Element" bắt đầu với định nghĩa " Một điểm là thứ không có bộ phận". Cuốn sách gồm 13 cuốn và 465 mệnh đề không được thảo luận theo một cách nào cả. Hầu hết mọi người đều ngạc nhiên bởi cuốn "Cơ sở" dường như chỉ có một tác giả. Vậy Euclid là ai mà tên ông đồng nghĩa với hình học đến tận thế kỷ 20 vậy? Chỉ có 3 điều thực tế sau đây chúng ta sẽ biết về ông.

Nhưng thực tế này là: ông trẻ hơn Plato (428 trước Công nguyên), ông già hơn Archimedes (287 trước Công nguyên) và ông dạy hoc ở Alexandria. Khi vua Alexander chết năm 323 trước Công nguyên, đế chế châu Phi do Ptolemy thừa kế. Ptolemy đã đưa Euclid từ Athen về Alexandria để tham gia mở trung tâm giáo dục Hellenistic đồ sộ - được biết đến như một Viện bảo tàng, với thư viện nổi tiếng - nơi các tài liệu của ông được tìm thấy ở đây.

Tục truyền rằng: một lần Ptolemy hỏi Euclid liệu có con đường nào ngắn hơn để đến với hình học hơn là cuốn "Element" không, ông trả lời ngay rằng trong hình học không có con đường dành riêng cho vua chúa.

Có người bắt đầu đọc cuốn hình học của Euclid, khi đọc mệnh đề đầu tiên đã hỏi ông: "tôi có thể học được gì từ những thứ này?". Euclid gọi người nô lệ của ông và đáp: " hãy đưa cho ông này một xu, ông ta sẽ nói cái lợi mà ông ta nhận được từ cuốn sách này".

Ngoài việc tính toán có hệ thống của môn hình học cơ sở, cuốn "Element" cũng bao gồm tất cả những gì được biết đến thời bấy giờ về lý thuyết cơ sở. Vai trò của Euclid như là một tác giả chính tổ chức và sắp xếp lại các phát minh rải rác của các bậc tiền bối. Có thể ông chỉ góp thêm một số ý kiến và chứng minh của mình trong một số định lý quan trọng nhưng điều đó cũng làm tăng thêm uy tín cho ông.

Cuốn I của bộ "Element" bắt đầu với 23 định nghĩa (điểm, đường thẳng, đường tròn, . . .) 5 mệnh đề và 5 tiên đề hoặc " khái niệm chung". Trong triết học Hy Lạp, tiên đề được hiểu như một sự công nhận chung cho tất cả các lĩnh vực nghiên cứu, trong khi mệnh đề được coi là sự giả định (giả thuyết) chỉ có ý nghĩa trong phạm vi một môm khoa học và còn phải bàn bạc (VD: qua 2 điểm có thể xác định được một đường thẳng). Sự khác nhau này được bỏ qua trong toán học hiên đại, và hiện nay từ mệnh đề và tiên đề có thể được sử dụng thay thế cho nhau. Nói chung quyển I đến quyển VI viết về hình học phẳng, quyển VII đến quyển IX viết về lý thuyết số, quyển X viết về số vô tỷ và quyển XI đến quyển XVI viết về hình học không gian. Định nghĩa thứ 47 trong quyển I (thường ký hiệu là I.47) là định lý Pythagoras. Sau đây là một vài ý chính gây được sự quan tâm đặc biệt: VII.1 và VII.2 đưa ra thuộc toán Euclid để tìm ước chung lớn nhất của 2 số nguyên dương, VIII.30 là bổ đề Euclid khẳng định rằng một số là tích của 2 số nguyên dương sẽ chia hết cho một trong 2 thừa số; IX.20 là định lý của Euclid về sự vô hạn của số nguyên tố; IX.36 là định lý của Euclid về số hoàn chỉnh và XII.10 đưa ra công thức tính thể tích hình nón.

Chúng ta hãy nhớ lại các kiến thức về hình học: một đa giác đều n cạnh là đa giác có tất cả n cạnh bằng nhau và n góc bằng nhau. Hình B1 cho thấy một đa giác đều 3 cạnh, 4 cạnh, 5 cạnh và 6 cạnh, dĩ nhiên thường được gọi là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều và lục giác đều. Cuốn IV trong bộ "Element" đưa ra cách dựng đa giác đều 3, 4, 5, 6 và 15 cạnh chỉ với thước và compa. Cách dựng này cho biết Pythagoras đã sống trước Euclid rất nhiều năm và Plato cùng các học trò đã gọi thước và compa là dụng cụ của Euclid. Theo cách chia đôi góc, có thể dễ dàng dựng đa giác đều $2n$ từ đa giác đều n cạnh. Trước đó người Hy Lạp đã có thể dựng đa giác đều n cạnh mà n là các giá trị sau đây:

$$3, 6, 12, 24, \ldots\ldots$$

$$4, 8, 16, 24, \ldots\ldots$$

$$5, 10, 20, 40, \ldots\ldots$$

$$15, 30, 60, 120, \ldots\ldots$$

Dĩ nhiên bước tiếp theo Euclid tìm cách dựng các đa giác đều $7, 9, 11, 13, \ldots$ cạnh. Sau nhiều cố gắng không thành công, vấn đề này đành để lại cho dến 2100 năm sau - 30/3/1976 mới được giải quyết. Vào một ngày đáng nhớ nhất được ghi lại trong lịch sử, một người Đức trẻ tuổi - Carl Friedrich Gauss đã chứng minh rằng đa giác đều 17 cạnh có thể dựng được. Khi đó Gass mới 18 tuổi, khám phá ấy làm ông vui sướng đến nỗi làm ông quyết định đi theo con đường toán học thay cho môn triết học mà ông đã lựa chọn. Ông tiếp tục những phát minh của mình và nhanh chóng giải quyết hoàn toàn vấn đề dựng hình ấy. Ông đã chứng minh bằng phương pháp có phần khó hiểu của đại số và lý thuyết số rằng một đa giác đều n cạnh là dựng được khi và chỉ khi n là tích của một luỹ thừa của 2 (trong đó $2^0 = 1$) và một số nguyên tố nhất định có dạng $p_k = 2^{2^k} + 1$. Đặc biệt khi $k = 0, 1, 2, 3$ thì mỗi số tương ứng $p_k = 3, 5, 17, 257$ là số nguyên tố, vì vậy đa giác đều với số cạnh như trên. Số nguyên tố 7 là dựng được. Số nguyên tố 7 thuộc dạng này nên đa giác đều 7 cạnh là dựng được.

Cuốn XIII trong bộ "Element" dành trọn cho việc dựng đa diện đều như mọi người nhầm tưởng. Một khối đa diện là khối bề mặt gồm một số các mặt đa giác, nó được gọi là đều nếu các mặt của nó là các đa giác đều bằng nhau và nếu các góc khối ở đỉnh bằng nhau. Rõ ràng có vô hạn các đa giác đều, nhưng lại chỉ có 5 đa diện đều. Chúng được đặt tên theo số mặt của chúng: tứ diện đều (4 mặt tam giác), hình lập phương (6 mặt vuông), khối 8 mặt đều (8 mặt tam giác), khối 12 mặt (12 mặt ngũ giác) và khối 20 mặt (20 mặt tam giác).

Dễ dàng chứng minh được rằng chỉ có 5 hình đa diện đều đã nói ở trên.

Giả sử m là số cạnh của mỗi mặt đa giác đều và n là số đa giác cùng chứa 1 đỉnh. Số đo (bằng độ) của mỗi góc trong mỗi mặt là $180^0 - \dfrac{360^0}{m}$. Mặt khác tổng các góc ở mỗi đỉnh của đa diện nhỏ hơn 360^0, do đó:

$$n\Big(180^0 - \frac{360^0}{m}\Big) < 360^0 \quad \text{hay} \quad n\Big(1 - \frac{2}{m}\Big) < 2,$$

dễ dàng suy ra bất đẳng thức $(m-2)(n-2) < 4$, trong đó m và n đều lớn hơn 2.

Nếu $m = 3$, n có thể là 3, 4 hoặc 5; nếu $m = 4$, n chỉ có thể là 3 và nếu $m = 5$, n chỉ có thể là 3, đó là tất cả 5 trường hợp có thể.

Đối với toán học, các định lý trong bộ sách của Euclid vừa quan trọng vừa rất thú vị. Trong hơn 2000 năm công trình kiến trúc của trí tuệ "Element" được so sánh với công trình "Parthenon" như là một biểu tượng của thời Hy Lạp hoàng kim. Đến nay, cả hai đã bị hư hỏng chút ít nhưng có lẽ chúng được giữ gìn và tôn tạo nhiều hơn những gì chúng bị mất.

2.2.3 Archimedes (287 - 212 trước Công nguyên)

Trí tưởng tượng của Archimedes còn lớn hơn Homer nhiều.

Voltaire

Archimedes sẽ luôn được nhớ đến còn Aeschylus thì sẽ rơi vào quên lãng bởi vì ngôn ngữ có thể không tồn tại nhưng các ý tưởng toán học thì sẽ còn sống mãi với thời gian.

G.H.Hardy

Archimedes là một nhà toán học, nhà vật lý học và là nhà phát minh lớn nhất của thế giới cổ đại, một trí tuệ siêu phàm của nền văn minh phương Tây. Không ai có thể so sánh với tài năng và sự sáng tạo của ông trừ Newton của thế kỷ 17.

Archimedes sinh ra tại thành phố Syracuse của Hy Lạp nằm trên đảo Sicyly. Ông có quan hệ thân thuộc với gia đình của Hoàng gia và có lẽ còn có quan hệ họ hàng với vua Hieron II. Thời trẻ ông học tại trung tâm giáo dục lớn Alexandria. Suốt thời gian này ông chơi thân với Eratosthenes mà sau này là Giám đốc thư viện Alexandria, người đã truyền đạt lại các phát minh của ông. Khi trở lại thành phố quê hương, ông định cư luôn ở đó và dành toàn bộ quãng đời còn lại để nghiên cứu toán học. Ông bị lính Roman giết ở tuổi 75 khi Syracuse bị quân La Mã tấn công trong đại chiến thế giới thứ hai.

Archimedes là người lừng danh khắp thế giới Hy Lạp trong suốt cuộc đời và trở thành hình tượng đi vào truyền thuyết, không chỉ bởi những phát minh toán học của ông mà còn bởi những thành tựu chói lọi và đáng ghi nhớ của ông, bởi những phát kiến mưu trí và cả bởi cách hy sinh của ông, điều đó được ghi chép lại bởi những tác giả người Roman, Hy Lạp, Byzantine và người ả Rập qua nhiều thế kỷ. Ông đã xác định thứ hạng của mình trên thế giới và thế giới không bao giờ quên ông.

Có lẽ câu chuyện truyền thuyết nổi tiếng nhất là khi vua Hireon yêu cầu ông các định xem chiếc vương miện mới làm bằng vàng nguyên chất hay người thợ kim hoàn đã thay bớt bằng bạc để lừa ông. Archimedes rất bối rối cho đến ngày hôm sau ông bước vào một phòng tắm công cộng và chú ý đến sự tràn ra của nước. Bất ngờ ông nhận ra rằng vàng nặng bằng nước và vàng cũng chiếm chỗ trong nước ít hơn. Ông vui sướng với phát hiện này đến nỗi quên là mình đang trần truồng. Ông chạy ra đường không một tấc vải trên người, miệng la lớn: "Eureka! Eureka!" nghĩa là " Tôi tìm ra rồi! Tôi tìm ra rồi!". Ngay lập tức ông xác định được rằng chiếc vương miện của vua chiếm chỗ nhiều hơn trong nước so với số vàng cùng khối lượng vì thế người thợ kim hoàn gian lận đã bị kết án. Câu chuyện này thường được gắn liền với khám phá của ông về nguyên lý thuỷ tĩnh: một vật nổi chiếm chỗ bằng khối lượng của chất lỏng. Từ sự khởi đầu này, ông đã chứng minh nhiều định lý về sự cân bằng vị trí của vật nổi có hình dạng khác nhau. Hơn nữa, một trong những phát minh nổi tiếng nhất của ông là bơm nước hình xoắn ốc gọi là đinh ốc Archimedes. Dụng cụ này hiện nay vẫn được người dân dọc sông Nile sử dụng để nâng nước lên tưới cho đồng ruộng.

Trong Cơ học, ông phát minh ra nguyên lý đòn bẩy, xây dựng khái niệm trọng tâm và tìm ra trọng tâm của mặt và khối. Theo một nhà ghi chép, việc nghiên cứu về đòn bẩy đã khiến ông thốt ra câu nói nổi tiếng: " Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nâng bổng cả Trái đất".

Sự chứng minh ấy không được xác thực[1]. Tuy nhiên, những sai lầm đó được xem xét tương đối ít và dễ dàng sửa chữa. Tất cả ý nghĩ của con người tiếp tục tin rằng hệ Euclid trong hình học là *đúng*, theo nghĩa nó miêu tả trực tiếp hình học của thế giới thực mà chúng ta sống, và cần thiết, theo ý nghĩa là nó có thể được dẫn ra bởi các lập luận không thể bị bác bỏ từ các tiên đề những điều tự chúng được xem là hiển nhiên và luôn luôn đúng.

Tình huống may mắn của các vấn đề trong hình học đã đưa đến việc hy vọng rằng theo cách tương tự các chân lý xa vời nhất của khoa học và xã hội để có thể được khám phá và được chứng minh đơn giản bằng cách chỉ ra rằng chúng là hiển nhiên và sau đó lập luận từ các cơ sở đó. Không còn xuất hiện các ý tưởng khó quên hay hấp dẫn trong lịch sử văn minh của thế giới phương Tây. Uy thế của hình học đã rất vĩ đại, đặc biệt trong các thế kỷ 17 và 18, mà các kiến thức trong các lĩnh vực hầu hết đều cần đến hình học Euclid như một xác nhận về tính hợp pháp. Rất nhiều lĩnh vực lộn xộn

của tri thức, các hình mẫu bị lảng tránh, được ít coi trọng bởi một lý do nào đó, một hoặc hai giai đoạn, các kỷ cương quí tộc không được chú ý.

Do đó đạo đức học của Spinoza, ở đó các môn học là thần thánh, là những nỗi đam mê của con người trong nhân loại, gồm có các khái niệm, các tiền đề

[1] Nhớ lại định nghĩa của một điểm trích dẫn đây. Ngoài ra: " Một đường nằm ngang có đọ dài" : " Một đoạn thẳng là một đường mà nối các điểm của nó"; " Một đơn vị được tưởng tượng với một cái gì đó được gọi là một"; Một số là tích hợp của một đơn vị. "Nhược điểm trong sự chứng minh thường bao gồm việc sử dụng các giả định thêm mà không được công nhận rõ ràng.

và các mệnh đề của hình học Euclid đã chiếm một vị trí ưu tiên trong tâm trí của chúng ta, và các mệnh đề mà ông ta cố gắng ủng hộ bằng các chứng minh theo phong cách Euclid[2]. Triết học Kant dạy rằng các mệnh đề của hình học Euclid đã chiếm một vị trí ưu tiên trong tâm trí chúng ta và do đó là phương thức cần thiết để quan sát không gian; và ông đã xây dựng toàn bộ hệ thống triết học trên nguyên tắc đó. Principia của Newton, với các nội dung theo lối kinh nghiệm của chúng đã tập trung vào các quy luật chuyển động và thiên văn học trong hệ thống mặt trời, bị chi phối hoàn toàn bởi sự sắp xếp theo hệ thống của Euclid về các định nghĩa, tiên đề, bổ đề, mệnh đề, hệ quả và chứng minh, với một chút tự do với Q.E.D.Òs. Học thuyết thế kỷ 17 về tự nhiên được công bố bởi Locke đã là một sự cố gắng để dẫn đến các quy luật của chính trị và chính quyền từ các tiên đề của một kiểu Euclid[3]. Thậm trí bản tuyên ngôn độc lập của nước Mỹ, có nói "Chúng ta có được những điều thật sự đó là hiển nhiên", đã tiếp tục tìm thấy sự rõ ràng và đáng tin bởi các kiểu của Euclid.

Thật không may mắn, sự thật hiển nhiên bây giờ càng ngày càng khan hiếm hơn chúng tat ta sử dụng. Từ lý thuyết của thuyết tương đối và vũ trụ học, thấy rằng Hình học Euclid không thích hợp với khuôn khổ toán học đối với vũ trụ rộng lớn, và theo nghĩa không còn "đúng" nữa do lý thuyết của hình học phi Euclid, cho thấy rằng các tiên đề của hình học Euclid không còn hiển nhiên luôn đúng nữa; Ngược lại, chúng có thể được thay bằng những điều khác trái ngược với chúng và được chứng tỏ rõ ràng để chấp nhận từ các lập luận logic. Các tiên đề trong nhà nước và các hoạt động của con người bây giờ được thừa nhận để hi vọng và diễn đạt sở thích hơn là sự thực không thể thay đổi được.

[2]"Tôi sẽ xem xét các hoạt động của con người và thực sự mong muốn nếu tôi học được đường thẳng, mặt phẳng và các vật thể" - Ethics, phần II, Mở đầu.

[3]Để hiểu về sức mạnh thật sự của chính trị, và phân tích nó từ bản chất, chúng ta cần phải xem xét các tình huống của con người một cách tự nhiên, và nghĩa là trạng thái ngẫu nhiên hoàn hảo để sắp xếp các hành động của họ, và sắp đặt tài sản của cải và con người đúng như họ nghĩ - *Second Treatise of Government, Part 2.*

Bất chấp rất nhiều các ảo tưởng đó, phương pháp tiên đề đầu tiên của Euclid vẫn còn được sử dụng rộng rãi trong nhiều phần lý thuyết của toán học cao cấp như một điều hiển nhiên cho phác họa rõ ràng hệ thống toán học để tìm ra chân lý. Không phải là quá đáng khi nói rằng lý thuyết toán học trừu tượng có thể khó tồn tại nếu không có phương pháp đó.

Nói chung, đối với hơn 2000 năm kiểu kiến trúc trí tuệ của *Cơ sở* cạnh tranh với Parthenon như một dấu hiệu của thiên tài Hy Lạp. Cả hai phần nào đã giảm giá trị trong các thế kỷ gần đây, song có thể quyển sách đó còn mang lại giá trị xây dựng hơn là thiệt hại.

Trong Cơ học, ông phát minh ra nguyên lý đòn bẩy, xây dựng khái niệm trọng tâm và tìm ra trọng tâm của mặt và khối. Theo một nhà ghi chép, việc nghiên cứu về đòn bẩy đã khiến ông thốt ra câu nói nổi tiếng: " Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nâng bổng cả Trái đất"[4].

Một ngày Archimedes quả quyết với vua Hieron, người bạn và người bà con của ông, rằng với một lực cho trước ông có thể nhấc bổng bất kỳ vật có trọng lượng nào và hơn nữa ông ta còn chứng tỏ rằng nếu ở một Trái đất khác, ông có thể đi khắp quanh nó và nhấc bổng Trái đất. Khi Hieron kinh ngạc đến tột độ, đồng ý với ông khi ông đưa ra sự chứng minh đối với một vài vật nặng có thể di chuyển khi tác động bởi một lực rất nhỏ. Archimedes bắt một trong số thuyền của vua được kéo lên một bờ biển đỡ bởi rất nhiều người đàn ông và nhân công tuyệt vời; và biểu diễn điều đó với nhiều người khách và rất nhiều hàng hoá, ông tự đặt một khoảng cách, và không cần quá cố gắng, chỉ di chuyển máy móc bằng cánh tay đòn của ông, nó gồm các dây cáp và ròng rọc khác nhau, ông đã kéo chiếc tàu một cách nhẹ nhàng và an toàn như là nó được di chuyển trên nước vậy.

Do đó Hieron rất kinh ngac với điều thần kỳ mà ông đã làm, "Từ nay về

[4]Xem chuyên luận On the Equilibtium of Planes, Works, tr. 198 - 220

sau mọi điều ông nói đều phải được tin tưởng".

Danh tiếng lừng lẫy của Archimedes được người đời xưa ghi lại trong những câu chuyện về máy móc chiến tranh mà ông đã sáng chế để bảo vệ Syracuse chống lại quân đội cà hải quân La Mã. Plutarch đã dành trọn những trang chói lọi của mình để miêu tả sự tấn công của quân La Mã và hiệu quả của các máy móc bảo vệ của Archimedes. Đó là các máy bắn đá có thể điều chỉnh được tầm bắn của các tảng đá khổng lồ bởi độ cong của gậy, có thể di chuyển được độ chính xác nhô ra trên khắp các tường thành và bắn các vật nặng vào quân thù một cách chính xác nhất, và các cần trục và hàm móc phi thường để giữ tàu. Nâng chúng lên và dìm chúng xuống đáy biển. Thậm trí cũng đã có những tấm gương đốt cháy đội quân trên tàu từ một khoảng cách xa[5]. Như Plutarch viết:

Quân La Mã, trong tình trạng kiệt sức vô cùng khi không thể nhìn thấy quân thù, họ bắt đầu nghĩ rằng đang chống lại chúa trời. Marcellus thốt ra vô tình, và cười với sản phẩm thiết kế của ông nói rằng: "Chúng tôi phải từ bỏ trận chiến với hình học Briareus [một trăm vũ khí khổng lồ hoang tưởng], người ngồi trên bờ biển và làm nhiệm vụ chỉ như một trò chơi, thả và ném tới thuyền của chúng, và tấn công tại thời điểm cần thiết với vô số mũi tên, thậm chí vượt hơn hẳn hàng trăm cánh tay khổng lồ trong thần thoại". Cuối cùng quân La Mã cảm thấy kinh hãi, nếu họ chỉ thấy các dây cáp hay cây gậy trên khắp thành trì, họ đã gào thét rằng Archimedes đã san bằng đội quân của họ bằng cỗ máy có động cơ nào đó, mà quay lưng lại và bỏ chạy.

Do dó Marcellus đã từ bỏ ý định của ông ta tấn công thành phố và ông

[5]Đối với khuôn khổ của một thí nghiệm cổ bởi lực lượng hải quân Hy Lạp nhìn thấy rằng việc sử dụng năng lượng mặt trời trong chiến tranh có thể thực sự khả thi, xem Newsweek, 26 tháng 11.1973, tr.64.

Danh tiếng lừng lẫy của Archimedes được người đời xưa ghi lại trong những câu chuyện về máy móc chiến tranh mà ông đã sáng chế để bảo vệ Syracuse chống lại quân đội và hải quân La Mã, Plutarch đã dành trọn những trang chói lọi của mình để miêu tả sự tấn công của quân La Mã và hiệu quả của các máy móc bảo vệ của Archimedes.

hy vọng vào sự vây hãm. Sự vây hãm kéo dài sau 3 năm và kết thúc năm 212 trước Công nguyên với sự sụp đổ của thành phố.

Tất cả đến khi Archimedes chết, sự cống hiến cả cuộc đời của ông, miệt mài trong các ý định toán học. Trong một sự hỗn độn và tàn sát dưới sự sụp đổ của thành phố, ông vẫn tập trung vào các biểu đồ mà ông đã vẽ ra trên cát, và đã bị giết chết bởi một tên lính cướp phá không biết ông là ai.

Trong một đoạn của câu chuyện ông nói với kẻ xâm lược, khi họ đến quá gần " Không được quấy rầy những đường tròn của tôi", sau sự nổi giận tên lính đã rút kiếm và đâm vào người ông. Marcellus đã rất buồn bởi điều đó, bởi vì ông đã đưa ra một lệnh rất nghiêm khắc cho quân lính đề phòng nhà và người thân của Archimedes, và ông được hoả táng xứng đáng nhà triết học thông thái N.N Whotehead đã tìm thấy ý nghĩa lớn trong sự hiện diện này hơn cả cái chết của một người đơn độc.

Cái chết của Archimedes dưới bàn tay của một lính La Mã là dấu hiệu của một thay đổi lớn lao của nhân loại. Người La Mã là một chủng tộc lớn nhưng họ đang có nguy cơ tuyệt chủng. Họ không có đủ sức tưởng tượng để dẫn tới một cái nhìn nhận mới. Quan điểm mới, nhưng cái nhìn có thể dẫn tới sự chinh phục được thiên nhiên. Không người La Mã nào giết chết được Ông, vì Ông đang say sưa đắm chìm với những biểu đồ Toán học.

Archimedes đã nói với các bạn của Ông rằng hãy đặt lên bia mộ của Ông một hình biểu diễn một hình trụ ngoại tiếp một hình cầu, và để nhớ tới thành tựu Toán học lớn nhất của Ông hãy khắc lên bia mộ phân số $\left(\frac{3}{2}\right)$ chứa trong vật thể ba chiều. Việc này được thực hiện theo lệnh của Marcellus. Nhà hùng biện người La Mã Cicero, khi ông ta còn làm quan coi ngân khố tại Sieily vào năm 75 trước Công nguyên, đã tìm thấy kỷ vật này trong một bụi cây mâm xôi, ông đã lau sạch và đặt nguyên lại vị trí cũ với lòng kính trọng đối với nhà

Toán học vĩ đại nhất[6].

Cicero cũng đã xem và mô tả một phát minh của Archimedes, phát minh đã tạo ra một dấu ấn sâu sắc trong thế giới cổ đại điều đã được nhiều tác giả quan tâm. Hình vẽ này thực sự là một mô hình vũ trụ thu nhỏ, một hình cầu mở bằng đồng và kính tự quay bởi dòng nước trong đó mỗi một vòng quay mặt trời, mặt trăng và 5 hành tinh chuyển động trên cùng một quỹ đạo tương đối đối với vũ trụ của các ngôi sao cố định như chúng đã chuyển động trên bầu trời một ngày, và trong đó cũng có thể quan sát được chu kỳ nguyệt thực. Quả cầu đóng tượng trưng cho Trái đất quay đều và mô phỏng chuyển động hàng ngày của 5 ngôi sao cố định đã biết, nhưng không phải vì thế mà Archimedes đã có thể mô tả được cơ chế sự độc lập và những chuyển động khác của mặt trời, mặt trăng và các hành tinh khác cùng với sự xoay vòng của 5 ngôi sao cố định, thời mà Ông đang sống đó là một thời kỳ với những khả năng không tưởng. Cicero viết:

Khi Gallus đặt trái đất trong trạng thái chuyển động sẽ thấy mặt trời mọc trên đường chân trời của Trái đất sau mặt trời xuất hiện trên bầu trời hàng ngày; và khi đó chúng ta cảm nhận được mặt trời lặn ra sao và mặt trăng lan toả khắp bóng của Trái đất như thế nào với Mặt trời ở nửa kia của Trái đất[7].

Cơ chế chạy bằng sức nước đã được những người La Mã nắm giữ như một phần của chiến lợi phẩm của Syracuse, và nó đã được trân trọng trong hàng trăm năm sau như là một điều kỳ diệu của nhân loại.

Archimedes đã trở thành một nhà phát minh tài ba và tinh tế, nhưng Plutarch cho rằng: những phát minh của Ông chỉ "như một trò chơi hình học". Trong một đoạn văn nổi tiếng ông có ngụ ý nói với chúng ta về quan điểm của Archimedes đối cới cuộc sống nói chung và đối với những phát minh của Ông

[6]Xem CiceroÒs Tusculan Disputation Loeb Classical Library, p.491. Người La Mã không quan tâm tới toán học và do đó hành động sửa sang bia mộ Acsimet của Cicero có lẽ là một đóng góp đáng ghi nhận của người La Mã trong lịch sử Toán học.

[7]Xem CiceroÒ s De Re Pubblica, Leob Classical Library, p.43.

nói riêng:

Archimedes sở hữu một trí tuệ tuyệt vời do đó có một tâm hồn cao thượng và có nhưng hiểu biết sâu sắc về khoa học, mặc dù những phát minh của Ông đã đưa Ông trở thành con người phi thường nhưng ông cũng không quan tâm tới việc ghi lại những bài viết, những công việc liên quan tới những vấn đề đó, mà coi công viêc đó như một hành động không tốt đẹp và đó chỉ là sự trục lợi và có tính chất lợi ích cá nhân. Ông đã cống hiến toàn bộ tâm trí sức lực và cố gắng không mệt mỏi để nghiên cứu tìm ra những nét đẹp tinh tế nhưng không có liên quan tới những điều cần thiết cho cuộc sống.

Mặc dù có tài hùng biện nhưng sự thật mà Plutarch nêu ra ở đây rất đáng nghi ngờ, vì được biết rằng Archimedes đã viết một luận án mà bây giờ đã thất lạc (Về sự hình thành Trái đất - On Sphere - making) trong đó có lẽ có liên quan tới những chi tiết kỹ thuật được đòi hỏi đối với việc xây dựng mô hình thiên văn học của Ông. Plutarch đã hoàn toàn bị nhiễm bệnh và coi như Archimedes không

tồn tại thông qua những lý thuyết suông coi thường đối với công cụ và những đo lường khoa học đó là một trong những di sản thừa kế ngu xuẩn của triết học Plato để lại.

Tuy nhiên, một điều rõ ràng là trong toán học thuần tuý Archimedes đã có thể hài lòng về những mơ ước sâu sắc của mình. Plutarch trở nên thuyết phục hơn khi ông ta nói với chúng ta rằng một số ít người đã từng sống trong lo âu với Toán học như chính bản thân ông.

Vì thế chúng ta không chấp nhận những thứ không thể tin được, những thứ là tầm thường theo cách nói của ông ta, và chúng trở nên bất diệt bởi gia đình của ông ta Siren, tức là hình học của ông ta thờ ờ với việc ăn uống và không tự chăm sóc con người của ông; rằng ông thường quan tâm tới lực trong bồn tắm và khi đó ông ta có thể vạch ra những hình vẽ bằng những miếng than củi, và với ngón tay của mình ông đã vẽ những đường thẳng trên người của ông cùng với hương vị của tinh dầu, trở nên một trạng thái khoa học tuyệt diệu khoa học của Ông.

Những thành tựu của Ông trong Toán học liệu có hoàn toàn đúng? Hầu hết những bút tích tuyệt vời của Ông vẫn đang hừng hực sống, một cách công bằng thì đó là những công trình của thiên tài. Hầu hết những vấn đề của Ông đã đưa ra trong luận án là hoàn toàn nguyên bản và chứa đựng hoàn toàn những khám phá mới của Ông. Mặc dù ông nghiên cứu trên phạm vi rộng bao gồm hình học và mặt phẳng lập thể, số học, thiên văn, thủy tĩnh học và cơ học nhưng Ông đã không biên soạn thành sách những khám phá trước đó như Euclid. Mục đích của ông là luôn trang bị cho mình những kiến thức mới. Bằng công việc của mình, Ông để lại những ấn tượng khó quên, Heath nói:

Bản luận án, không phải ngoại lệ, là một công trình Toán; sự khám phá từng bước một trong kế hoạch tấn công, sự sắp xếp bậc thầy những mệnh đề, sự lựa chọn nghiêm khắc và hợp lý cho mục đích chính, một kết thúc trọn vẹn đã gây một ấn tượng sâu sắc đối với sự hoàn hảo của nó, bên cạnh đó nó cũng làm cho người đọc cảm thấy vừa gần gũi nhưng cũng rất đỗi mênh mông. Như Plutarch đã nói (với một sự cường điệu) “ Ngay lúc đầu không thể tìm trong hình học những câu hỏi hoặc những chứng minh khó hơn trong những mệnh đề rõ ràng và đơn giản hơn”. Chính tại thời điểm đó một con đường huyền diệu đã mở ra và đưa ông đạt tới kết quả của mình. Rõ ràng, chúng không thể được khám phá bởi những bước đi mà lại dẫn chúng tới một ngõ cụt nguy hiểm[8].

Do vậy, một trong những quan điểm viết của ông ta đã đưa ra một cấu trúc mộc mạc dễ hiểu nhưng hoàn hảo. Mặt khác, trong hầu hết các luận án Toán học (mặc dù không liên quan tới vật lý) đều có những lời tựa trong đó ghi nhận những người bạn, giải thích mục đích của mình và tập hợp tổng quát

[8]T.L. Heath, Lịch sử Toán học Hy Lạp, Oxford University Press, 1921, Vol. II, p.20.

những phạm vi mà cuốn sách có liên quan. So sánh với Euclid, những bài viết của ông mang hơi thở thời đại.

Phạm vi ảnh hưởng và tầm quan trọng của các công trình Toán học của Archimedes có lẽ được biết đến nhiều nhất từ bài tường thuật (hoặc) bản vắn tắt trong luận án của Ông: ba luận án liên quan tới hình học phẳng, hai luận án về hình học lập thể và một luận án về phương pháp nghiên cứu của Ông.

1. Phép cầu phương một parabol: luận án này gồm 24 mệnh đề, 2 định lý và chứng minh về việc chia nhỏ parabol: miền bị cắt từ một parabol bởi bất kỳ đường thẳng nằm ngang bằng 4/3 miền tam giác với đáy và chiều cao bằng nhau. Định lý được đưa trong mục 6.2 của cuốn sách này với chứng minh chi tiết ở mục A.2. Hai định nghĩa cuối của Archimedes về tổng vô hạn dạng chuỗi

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots$$

đã chứng tỏ rằng ông là người nhận thức rất sâu sắc về khái niệm giới hạn. Vấn đề này cho đến tận thế kỷ 19 mới được các nhà toán học khác nhận thức rõ ràng.

2. Đường xoắn ốc: chủ đề của 28 mệnh đề trong luận án này là đường cong mà bây giờ được biết như là đinh ốc Archimedes. Ông định nghĩa như sau: nếu một đường thẳng với một vị trí cố định được quay tròn theo một vận tốc đều trong một mặt phẳng đến khi nó trở lại vị trí ban đầu và nếu cùng thời điểm ấy, một điểm chuyển động theo vận tốc đều dọc theo dường thẳng, bắt đầu từ một vị trí cố định thì điểm ấy sẽ vẽ lên một đường xoắn ốc trong mặt phẳng.

Thành tựu chính của ông là xác định tiếp tuyến tại điểm bất kỳ và tìm diện tích miền đóng bởi phép quay đầu tiên (mệnh đề 24) sau đó là diện tích hình tròn bán kính bằng khoảng cách từ 1 điểm di chuyển dọc theo một đường thẳng chuyển động. Đường xoắn ốc và những định nghĩa này được trình bày ở mục 16.3 (bài tập 6), 16.4 (bài tập 7), 16.5 (bài tập 3). Như những nhà toán học sau này đã dùng đường xoắn ốc như một đường cong bổ trợ cho việc chia ba một góc (bài tâp 16.3, bài tập 23) và diện tích hình tròn (Chương 16, vấn đề 8).

3. Phép đo đường tròn: Phần này gồm ba mệnh đề được ông chứng minh rất chặt chẽ mà trước ông không ai làm được và như ta đã biết trong mục 6.2; Diện tích hình tròn bằng diện tích một tam giác có đáy bằng chu vi đường tròn và chiều cao bằng bán kính của nó, $A = \frac{1}{2}cr$ với $c = 2\pi r$ và để xác định số π ta dựa vào công thức $A = \pi r^2$. Ông đã thiết lập bất đẳng thức $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, bằng sự tính toán kỹ lưỡng chu vi của đa giác đều 96 cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn.

4. Hình cầu và hình trụ:

Đây là luận án có ảnh hưởng sâu sắc nhất vì nó gồm những chứng minh chặt chẽ trong các phát minh lớn của ông về thể tích và diện tích hình cầu (mệnh đề 33 và 34). Để biết ông đã phát minh những vấn đề này như thế nào ta hãy xem mục 6.

5. Hình nêm và hình tựa cầu: Phần này viết về khối tròn xoay tạo nên khi quay parabol, hyperbol và ellips quanh bán trục của chúng. Ông đã tính thể tích một phần của các khối này và từ đó chứng minh các công thức:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

cho tổng của n số tự nhiên và bình phương của chúng (xem mệnh đề 162 và 105 - 109). Ông cũng đã chứng minh công thức: Diện tích của một ellips với các bán trục a và b bằng πab.

6. Phương pháp: Điều thú vị nhất trong tất cả các bản luận án là trong một bức thư gửi Eratosthenes, Archimedes đã trình bày phương pháp nghiên cứu của ông trong các phát minh hình học và minh hoạ các ý tưởng với 15 mệnh đề. Việc này tình cờ được phát hiện trong một bản viết trên giấy da cừu ở Constraninople năm 1906 sau gần một ngàn năm thất lạc.

Cuốn "Phương pháp" thú vị nhất bởi những lý do sau đây. Các nhà hình học lớn của Hy Lạp chỉ nói về việc đặc trưng hoặc sự gian khổ trong công việc nghiên cứu của mình chứ không chỉ dẫn các bước trong cách để phát minh ra các định lý lớn của họ. Họ để lại cho chúng ta các định lý đã được hoàn thành trong các tác phẩm lớn nhưng không một lời mách bảo về phương pháp mà họ dùng để chứng minh. Vì vậy chúng ta không thể chắc rằng người Hy Lạp có các phương pháp kém hơn so với phương pháp của giải tích hiện đại hay không. Một trong những minh họa cho phương pháp của Archimedes là ông đã chỉ ra cách ông phát minh ra định lý nổi tiếng về thể tích hình cầu. Chi tiết toàn bộ ý kiến của ông được trình bày trong mục A.5, cách nghĩ của ông dẫn dẫn đến sự khám phá ra công thức tính diện tích mặt cầu với quan niệm mặt cầu là mặt nón được quấn quanh đỉnh của nó.

Từ định lý này chỉ ra rằng hình cầu bằng 4 lần hình nón trong đó đường tròn lớn của hình cầu là đáy của hình nón và chiều cao bằng bán kính hình cầu diện tích mặt cầu bằng 4 lần đường tròn lớn của nó; diện tích hình tròn bằng diện tích tam giác có đáy bằng chu vi đường tròn và chiều cao bằng bán kính đường tròn. Cũng như vậy, hình cầu bằng hình nón có đáy bằng diện tích mặt cầu và chiều cao bằng bán kính.

Trong luận án còn có hai phát minh thường được sử dụng trong tính toán hiện nay: xác định trọng tâm của khối bán cầu (mệnh đề 6) và thể tích phần chung của hai hình trụ bằng nhau và có các trục vuông góc với nhau (mệnh đề 15).

Ngoài ra còn có 6 mệnh đề về hình học và 2 mệnh đề vật lý trong đó một mệnh đã được đề cập . Điều này có liên quan đén số học và thiên văn học và được goi là " Đồng hồ cát" trong đó ông xây dựng một hệ thống để thiết kế các so rất lớn như N^N trong đó $N = 10^8$. Ông đã áp dụng phát minh để tìm ra giới hạn dưới của các số hạt cát đổ dầy vào một hình cầu mà bán kính bằng khoảng cách từ mặt trời tới nơi mà Archimedes gọi là "hình cầu chứa đầy các vì sao" với khoảng cách là 10^{63} và điều này có liên quan đến thiên văn học.

Trong tất cả những thành công của con người về toán học và vật lý trên mọi luc địa và trong mọi nền văn minh từ thủa sơ khai cho đến thế kỷ 17 ở phương Tây, thành tựu của Archimedes được coi là lớn nhất. Ông chính là một nền văn minh vĩ đại nhất.

2.2.4 Papus (thế kỷ thứ 4 sau Công nguyên)

Papus là giảng viên của trường Alexandria, là một nhà toán học thông thái, đầy tài năng và có nhiều ý tưởng hay. Tuy vậy, ông không may mắn sinh ra khi nền toán học Hy Lạp bị xáo trộn trong 900 năm kể từ khi Thalet và Pythagoras chết.

Tác phẩm chính của ông - cuốn "Tuyển tập toán học" là sự kết hợp giữa một bách khoa thư, bài bình luận và là sách hướng dẫn cho môn hình học Hy Lạp đã có cho đến thời của ông, đồng thời cũng mở rộng và làm phong phú hơn cho các kết quả của những người đi trước bằng các định lý và chứng minh mới. Không may cho ông, cuốn "Tuyển tập toán học" khi xuất bản không đáp ứng được nền toán học Ly Lạp đang cần một hơi thở của cuộc sống mới. Sau Papus toán học Hy Lạp gần như biến mất và phải đợi đến 1300 năm sau mới được hồi sinh vào thế kỷ 17.

Papus nổi tiếng nhất với định lý về hình học liên hệ giữa trọng tâm khối và mặt tròn xoay. Trước tiên định lý khẳng định thể tích tạo ra bởi sự quay của một miền bao bởi một biên phẳng, kín nằm hoàn toàn trên một đường thẳng là trục quay bằng tích của diện tích miền và lhoảng cách giữa trọng tâm và đường biên của nó. Papus rất tự hào về tính phổ biến của định lý này, ông nói: "Chúng bao gồm một số bất lỳ các định lý về tất cả các loại: biên, mặt, khối đuợc chứng tỏ bởi một sự chứng minh duy nhất.

Ông đã đưa ra nhận xét đầu tiên và chứng minh về tính chất tiêu điểm, đường chuẩn, tâm sai của ba đường cônic (mục 15.5) ông là người rất kỹ lưỡng trong việc chon nguồn tài liệu và không có nguồn tài liệu nào được nói đến ở đây, đó là lý do để suy ra rằng đây là những khám phá của chính ông.

Ông đã nêu ra sự mở rộng của định lý Pythagoras sau đây (xem hình B3): cho ΔABC là tam giác bất kỳ; $ACDE$ và $BCFG$ là hình bình hành được dựng phía ngoài trên các cạnh AC và BC; nếu DE và FG cắt nhau tại H; AJ và BI bằng và song song với HC thì diện tích hình bình hành $ABIJ$ bằng tổng diện tích các hình bình hành $ACDE$ và $BCFG$ (chứng minh $ACDE = ACHR = AIUJ$ và $BCFG = BCHS = BIUT$). Dễ thấy rằng định lý Pythagoras là trường hợp đặc biệt của bài toán này, khi góc C là góc vuông và các hình bình hành đã dựng là hình vuông. Cuối cùng chúng tôi muốn nhấn mạnh đến một kết quả quan trọng của hình học được gọi là định lý Papus. Nếu các đỉnh của một hình lục giác lần lượt nằm trên một cặp đường thẳng cắt nhau (hình B.4) thì 3 giao điểm của các cạnh đối diện của lục giác thẳng hàng (cạnh đối diện được xác định từ số của biểu đồ lục giác được chỉ ra trong hình). Ký hiệu đầy đủ của định lý cổ điển này cuối cùng mới được tiết lộ vào năm 1899 bởi nhà toán học Đức David Hirbert trong chương trình làm sáng tỏ những cơ sở hình học của ông.

Chương 3

Các chuyên đề chuyên toán

3.1 Một số kĩ thuật đánh giá và ước lượng khi giải phương trình đại số

Cao Xuân Nam, THPT Chuyên Hà Giang

Tóm tắt nội dung 1. *Có thể nói trong chương trình toán phổ thông, phương trình là vấn đề cơ bản và trọng tâm, hệ thống các phương pháp giải phương trình khá phong phú và đa dạng. Đánh giá là một trong những phương pháp đó. Bài viêt nhỏ này nhằm cung cấp một số kĩ năng đánh giá khi giải phương trình.*

3.1.1 Kĩ năng sử dụng bất đẳng thức

Ví dụ 3.1. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^4+7x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1}=4x. \tag{3.1}$$

Giải. Do vế trái của phương trình dương nên điều kiện cần để phương trình có nghiệm là $x>0$. Chia hai vế của phương trình cho x, ta được

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+7}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=4. \tag{3.2}$$

Ta có $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+7}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\geq 4$, đẳng thức xảy ra khi x=1 (vì $x>0$)

Do đó phương trình (3.2) có nghiệm khi $x = 1$. Thử lại ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 3.2. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} + \sqrt{6-4x-x^2} = x^2 - 3x + 5. \tag{3.3}$$

Giải. Điều kiện $\frac{2}{3} \leq x \leq \sqrt{10} - 2$. Ta có

$$(3.3) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{3x-2} + x + \sqrt{6-4x-x^2} = x^2 - 2x + 5. \tag{3.4}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacôpxki, ta có

$$\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} \leq 2\sqrt{2x-1},$$

$$x + \sqrt{6-4x-x^2} \leq 2\sqrt{3-2x}.$$

Từ đó $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} + x + \sqrt{6-4x-x^2} \leq 2(\sqrt{2x-1} + \sqrt{3-2x})$. Mà $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3-2x} \leq 2$, do vậy

$$\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} + x + \sqrt{6-4x-x^2} \leq 4,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Mặt khác $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Phương trình (3.3) có nghiệm khi $VT(3.4) = VP(3.3) = 4$ khi và chỉ khi $x = 1$.

Thử lại ta thấy $x = 1$ thoả mãn. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 3.3. *Giải phương trình*

$$\sqrt{-x^2+9x-13} + \sqrt{-x^2+7x-1} = x^2 - 4x + 6. \tag{3.5}$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\sqrt{-x^2+9x-13} \leq \frac{-x^2+9x-13+1}{2},$$

$$\sqrt{-x^2+7x-1} \le \frac{-3x^2+7x-1+1}{2},$$

suy ra $\sqrt{-x^2+9x-13}+\sqrt{-x^2+7x-1} \le -2x^2+8x-6$. Mà $-2x^2+8x-6 = 2-2(x-2)^2 \le 2$. Do đó VT (3.5) ≤ 2, đẳng thức xảy ra khi $x=2$.

Mặt khác VP (3.5) $= x^2-4x+6 = (x-2)^2+2 \ge 2$, đẳng thức xảy ra khi $x=2$.

Thử lại ta thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 3.4. *Giải phương trình*

$$\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2}+(x^2-3)^4+\frac{1}{(x-1)^2} = 3x^2-2x-5$$

Giải. Điều kiện: $x \ne \pm\sqrt{3}$ và $x \ne 1$.

Ta viết phương trình dưới dạng

$$\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2}+(x^2-3)^4+\frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^2+2(x^2-3).$$

Đặt $u=(x-1)^2; v=x^2-3$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{u^2}{v^2}+v^4+\frac{1}{u} = u+2v. \tag{3.6}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhicôpxki, ta có

$$(\frac{u^2}{v^2}+v^4+\frac{1}{u})(v^2+u+1) \ge (u+v^2+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{v^2}+v^4+\frac{1}{u} \ge u+v^2+1 \ge u+2v. \tag{3.7}$$

Từ (3.6) và (3.7), suy ra

$$\begin{cases} \frac{u}{v} = v^2 = \frac{1}{u} \\ v = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u=v=1$. Khi đó :

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1 \\ x^2-3 = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=2$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

3.1.2 Kĩ năng đánh giá dựa vào "giả thiết tạm"

Ví dụ 3.5. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{2x^2+x+1} = (x^2-1)\sqrt{3x^2+2x+3}. \tag{3.8}$$

Giải. Đặt VT (3.8) $= \sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{2x^2+x+1}$; VP (3.8) $= (x^2 - 1)\sqrt{3x^2+2x+3}$.

Giả sử $x^2+x+2 \geq 2x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1$.

Khi đó: VT (**??**) ≥ 0; VP (3.8) ≤ 0, do đó phương trình (3.8) có nghiệm khi VT (3.8) = VP (3.8) = 0, khi và chỉ khi $x = 1$ và $x = -1$.

Nếu $x^2+x+2 < 2x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2 < 1$. Khi đó VT (3.8) < 0, VP (3.8) > 0, do đó phương trình (3.8) vô nghiệm.

Thử lại ta thấy phương trình (3.8) có nghiệm $x = 1$ và $x = -1$.

Ví dụ 3.6. *Giải phương trình:*

$$\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} - \frac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{-x^2-x+4}} = x^2-1. \tag{3.9}$$

Giải. Điều kiện: $0 \leq x \leq 2$. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x^2-x)+2}}{1+\sqrt{2-(x^2-x)}} - \frac{\sqrt{(x^2+x-2)+2}}{1+\sqrt{2-(x^2+x-2)}} = (x-1)(x+1). \tag{3.10}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t+2}}{1+\sqrt{2-t}}$.

Dễ dàng chứng minh được hàm số $f(t)$ là hàm số tăng.

Ta có phương trình (3.10) trở thành: $f(x^2-x) - f(x^2+x-2) = (x-1)(x+1)$.

Giả sử $x^2 - x \geq x^2+x-2 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Khi đó VT (3.10) ≥ 0, VP (3.10) ≤ 0 (vì $x+1 > 0$, $\forall x \in [0;2]$) do đó phương trình (3.10) có nghiệm $x = 1$.

Nếu $x^2 - x < x^2+x-2 \Leftrightarrow x > 1$, ta có: VT (3.10) < 0, VP (3.10) > 0, phương trình (3.10) vô nghiệm.

Thử lại ta thấy $x = 1$ thoả mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

3.1.3 Kĩ năng nhẩm nghiệm kết hợp đánh giá

Ví dụ 3.7. *Giải phương trình:*

$$4x - x^2 = 3\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}}. \tag{3.11}$$

Giải. Điều kiện:$\frac{74}{27} \leq x \leq \frac{10}{3}$.

Ta thấy $x = 3$ là một nghiệm của phương trình (3.11):

* Nếu $\frac{74}{27} \leq x < 3$ thì $3\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} < 3$; $(x-1)(x-3) < 0 \Rightarrow 4x - x^2 > 3$, do đó VT (3.11) > VP (3.11).

* Nếu $3 < x \leq \frac{10}{3}$ thì $3\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} > 3$; $(x-1)(x-3) > 0 \Rightarrow 4x - x^2 < 3$, do đó VT (3.11) < VP (3.11).

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 3.8. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - 5}}}} = 5. \tag{3.12}$$

(T4/332 Tạp chí toán học và tuổi trẻ)

Giải. Điều kiện: $x \geq 5$. Đặt $\sqrt{x - \sqrt{x - 5}} = t(x \geq t \geq 0$ thì phương trình (3.12) trở thành:

$\sqrt{x - \sqrt{x - t}} = 5(x \geq t \geq 0)$.

* Nếu $t < 5$, thì $\Rightarrow x - t > x - 5 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x - t} > \sqrt{x - 5} \Rightarrow x - \sqrt{x - t} < x - \sqrt{x - 5} \Rightarrow \sqrt{x - \sqrt{x - t}} < \sqrt{x - \sqrt{x - 5}} \Rightarrow t < 5$, vô lí .

* Nếu $t > 5$, thì $\Rightarrow 0 \leq x - t < x - 5 \Rightarrow \sqrt{x - t} < \sqrt{x - 5} \Rightarrow x - \sqrt{x - t} > x - \sqrt{x - 5} \Rightarrow \sqrt{x - \sqrt{x - t}} > \sqrt{x - \sqrt{x - 5}} \Rightarrow t > 5$, vô lí .

Vậy $t = 5$, do đó:

$$\sqrt{x - \sqrt{x - 5}} = 5 \Leftrightarrow x - 25 = \sqrt{x - 5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 25 \\ (x - 25)^2 = x - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 25 \\ x^2 - 51x + 630 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = 30.$$

Vậy $x = 30$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

3.1.4 Bài tập rèn luyện

Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$

2. $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}=3$

3. $\sqrt[3]{25x(2x^2+9)}=4x+\frac{3}{x}$

4. $\sqrt[4]{x+3}-\sqrt[4]{1+2x}=x-2$

5. $\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}}+4x=3\sqrt{2}-1$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Mậu (1993), *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình,* NXB Giáo dục.

2. Nguyễn Văn Mậu (2002), *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ,* NXB Giáo dục.

3.2 Áp dụng định lí Burnside-Frobenius vào bài toán tô màu trong tổ hợp

Nguyễn Doãn Phú, Nguyễn Thị Ngọc Ánh

Trường THPT Chuyên Thái Nguyên

Tóm tắt nội dung 2. *Bài viết của chúng tôi xin trình bày ba nội dung chính: *Đưa ra một số kiến thức bổ trợ về nhóm nhằm chứng minh được định lí*

Burnside- Frobenius .

**Nêu ví dụ minh họa cho ứng dụng của định lí Burnside- Frobenius vào một số bài toán tô màu của tổ hợp. Trong số đó có ví dụ là bài toán tô màu xuất hiện trong kỳ thi Học sinh giỏi toán toàn quốc năm học* $2009-2010$.

*Một số bài tập tham khảo.

3.2.1 Một số kiến thức bổ trợ về nhóm và định lí Burnside- Frobenius

Nhóm và nhóm con

Nhóm là một tập G cùng với một phép toán kí hiệu bởi dấu $*$ thoả mãn các điều kiện:

(i) $a*(b*c)=(a*b)*c$, $\forall a,b,c\in G$.

(ii) $\exists e\in G$ sao cho $e*x=x*e=x$, $\forall x\in G$.

(iii) Với mỗi $x\in G$, tồn tại $x^{-1}\in G$ sao cho $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$.

Nếu G có hữu hạn phần tử thì số phần tử của G được gọi là *cấp của* G, kí hiệu $\mid G\mid$.

Tập con H của một nhóm G được gọi là *nhóm con* của G nếu $e\in H$ và $a^{-1}\in H, a*b\in H$ với mọi $a,b\in H$.

Định lí Lagrange

Cho H là một nhóm con của một nhóm G. Với mỗi $a\in G$, gọi $\{h*a \mid h\in H\}=Ha$ là *một lớp ghép trái của* H trong G. Khi H chỉ có hữu hạn lớp ghép trái thì số các lớp ghép trái của H gọi là *chỉ số của* H *trong* G, kí hiệu là $(G:H)$.

Định lí Lagrange: Trong một nhóm hữu hạn, cấp và chỉ số của một nhóm con là ước của cấp của toàn nhóm.

Nhóm đối xứng

Giả sử X là tập hợp có n phần tử. Khi đó nhóm đối xứng của X là tập hợp bao gồm các hoán vị của X được kí hiệu bởi $S(X)$ hoặc S_n. Mỗi phần tử f của S_n có thể đồng nhất với một song ánh từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ đến chính nó. Phép toán trong nhóm S_n là phép nhân các ánh xạ thông thường. Ta cũng có thể coi f là một hoán vị của tập $\{1, 2, .., n\}$. Giả sử i là phần tử nào đó thuộc tập $\{1, 2, .., n\}$. Ta kí hiệu $f^1(i) = f(i), f^2(i) = f(f^1(i)), ..., f^t(i) = f(f^{t-1}(i)), ...$ Vì tập X là hữu hạn nên tồn tại một số nguyên dương r sao cho $f^r(i) = i$. Khi đó dãy $(i, f^1(i), f^2(i), ..., f^{r-1}(i))$ gọi là một vòng xích có độ dài r . Để viết f thành tích các vòng xích độc lập ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Chọn $i \in \{1, 2, .., n\}$ (thường là $i = 1$). Tìm vòng xích $(i, f^1(i), f^2(i), ..., f^{r-1}(i))$.

Bước 2: Chọn một phần tử của $\{1, 2, .., n\}$ chưa xuất hiện trong các vòng xích đã hoàn thành. Sử dụng phần tử này như phần tử i ở bước 1 và thu được một vòng xích mới.

Bước 3: Lặp lại bước 2 tới khi tập $\{1, 2, .., n\}$ được vét kiệt.

Muốn biểu diễn f ta đặt các vòng xích của f liên tiếp cạnh nhau. Vòng xích có độ dài bằng 1 có thể không viết ra. Khi đó ta nói f được phân tích thành tích các vòng xích độc lập

Ví dụ: Các phần tử của nhóm đối xứng S_3 được biểu diễn như sau

$$S_3 = \{I, (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

trong đó I là ánh xạ đồng nhất.

Định lí Burnside- Frobenius

Cho X là một tập hợp có n phần tử và G là một nhóm con của nhóm đối xứng $S(X)$. Với $x \in X$, đặt

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\}.$$

$$Gx = \{g(x) : g \in G\}.$$

$$F(g) = \{z \in X : g(z) = z\}.$$

Khi đó G_x là nhóm con của G. Nhóm G_x được gọi là *nhóm con đẳng hướng của G ứng với phần tử x*. Tập Gx gọi là *quỹ đạo của x trong X*.

Bổ đề 1.4.1:

(i) $Gx \neq \emptyset$ với mọi $x \in X$.

(ii) $X = \bigcup_{x \in X} Gx$.

(iii) $Gx = Gy$ hoặc $Gx \cap Gy = \emptyset$ với mọi $x, y \in X$.

Chứng minh: (i), (ii). Vì $x = I(x) \in Gx$ nên $Gx \neq \emptyset$. Suy ra $X = \bigcup_{x \in X} Gx$.

(iii). Giả sử $Gx \cap Gy \neq \emptyset$. Khi đó tồn tại $g_1, g_2 \in G$ sao cho $g_1(x) = g_2(y)$. Suy ra $x = I(x) = g_1^{-1}g_1(x) = g_1^{-1}g_2(y)$. Cho $g(x) \in Gx$. Ta có $g(x) = g(g_1^{-1}g_2(y)) \in Gy$. Do đó $Gx \subseteq Gy$. Tương tự $Gy \subseteq Gx$, và vì thế $Gx = Gy$.

Bổ đề trên chỉ ra rằng tập các quỹ đạo trong X làm thành một phép phân hoạch trên X.

Bổ đề 1.4.2:

$$| G_x || Gx |=| G |$$

Hơn nữa, nếu $Gx_1, \ldots, Gx_t$ là các quỹ đạo đôi một rời nhau trong X thì

$$| X |= \Big(\bigcup_{i=1}^{t} Gx_i\Big) = \sum_{i=1}^{t} | Gx_i |$$

Chứng minh: Gọi L là tập các lớp ghép trái của G_x trong G. Xây dựng một ánh xạ $f^* : L \longrightarrow Gx$ biến mỗi phần tử $gG_x \in L$ thành $g(x) \in Gx$. Ta chứng minh được f^* là một song ánh. Suy ra $\mid Gx \mid = \mid L \mid$. Theo định lí Lagrange bổ đề được chứng minh.

Định lí Burnside- Frobenius . Cho X là một tập hợp hữu hạn. G là một nhóm con của tập đối xứng S(X). G tác động lên tập X bởi $g \in G, x \in X$ thì $g(x) \in X$. Khi đó số quỹ đạo của tác động là

$$\frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} F(g).$$

Chứng minh: Gọi T là tập các cặp sắp thứ tự (g, x) sao cho $g \in G, x \in X$ và $g(x) = x$. Với mỗi $x \in X$, số các phần tử $g \in G$ sao cho $(g, x) \in T$ chính là cấp của nhóm con đẳng hướng G_x của x. Vì thế ta có

$$\mid T \mid = \sum_{x \in X} \mid G_x \mid$$

Với mỗi $g \in G$, số phần tử $x \in X$ sao cho $(g, x) \in T$ chính là $F(g)$. Vì thế

$$\mid T \mid = \sum_{g \in G} F(g).$$

Từ hai đẳng thức trên ta có

$$\sum_{x \in X} \frac{\mid G_x \mid}{\mid G \mid} = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} F(g).$$

Gọi t là số quỹ đạo. Gọi $Gx_1, \ldots, Gx_t$ là các quỹ đạo. Vì các quỹ đạo là đôi một rời nhau và X là hợp của các quỹ đạo nên ta có

$$\sum_{x \in X} \frac{\mid G_x \mid}{\mid G \mid} = \sum_{x \in Gx_1} \frac{\mid G_x \mid}{\mid G \mid} + \ldots + \sum_{x \in Gx_t} \frac{\mid G_x \mid}{\mid G \mid}.$$

Với mỗi $i = 1, \ldots, t$, theo Bổ đề 1.4.2 tổng $\sum_{x \in Gx_i} \frac{\mid G_x \mid}{\mid G \mid}$ bao gồm $\mid Gx_i \mid$ số hạng, mỗi số hạng đều bằng $\frac{1}{\mid Gx_i \mid}$.

Vì thế

$$\sum_{x \in Gx_i} \frac{\mid G_x \mid}{\mid G \mid} = 1$$

với mọi $i = 1, \ldots, t$. Suy ra $\sum_{x \in X} \frac{\mid G_x \mid}{\mid G \mid} = t$.

3.2.2 Áp dụng vào bài toán tô màu trong tổ hợp

Xét một đa giác đều n cạnh, tâm O và các đỉnh $1, 2, \ldots, n$ sắp thứ tự ngược chiều kim đồng hồ. Kí hiệu S_n là nhóm các phép thế của tập đỉnh $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ta gọi *nhóm nhị diện* D_{2n} là nhóm con của S_n sinh bởi hai phần tử R và T, trong đó R là phép quay tâm O ngược chiều kim đồng hồ với góc quay $\frac{360^0}{n}$, và T là phép đối xứng qua đường thẳng nối tâm O với một đỉnh (chẳng hạn đỉnh 1). Nếu I là ánh xạ đồng nhất thì D_{2n} gồm đúng $2n$ phép đẳng cự của đa giác, trong đó có n phép quay I, R, $R^2, \ldots, R^{n-1}$ và n phép đối xứng T, RT, ..., $R^{n-1}T$. Nếu n lẻ thì mỗi phép đối xứng được xác định bởi đường thẳng nối tâm O với một đỉnh (đi qua trung điểm của cạnh đối diện với đỉnh đó). Nếu n chẵn thì $n/2$ phép đối xứng được xác định bởi $n/2$ đường thẳng, mỗi đường nối hai đỉnh đối diện nhau (đường thẳng này đi qua tâm O); và $n/2$ phép đối xứng được xác định bởi $n/2$ đường thẳng, mỗi đường nối hai trung điểm của hai cạnh đối diện nhau.

Ví dụ 2.1: Xét một hình vuông tâm O với các đỉnh là 1, 2, 3, 4 sắp thứ tự ngược chiều kim đồng hồ. I là phép đồng nhất, R là phép quay tâm O với góc quay 90^0 và T là phép đối xứng qua đường thẳng nối hai đỉnh 1 và 3 thì nhóm D_8 gồm 8 phần tử sau: $I; R = (1, 2, 3, 4); R^2 = (1, 3)(2, 4); R^3 = (1, 4, 3, 2)$; $T = (2, 4); RT = (1, 2)(3, 4)$;
$R^2T = (1, 3); R^3T = (1, 4)(2, 3)$

Giả sử rằng, với k mầu cho sẵn, chúng ta tô màu các đỉnh của hình vuông trong ví dụ trên (không yêu cầu phải dùng tất cả các mầu). Thế thì có bao nhiêu cách tô màu? Giả sử chúng ta có hai mầu, mầu trắng (T) và mầu xanh

(X). Khi đó qua phép R^2 trong cách tô mầu

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ T & X & T & X \end{pmatrix}$$

biến thành cách tô màu

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ T & X & T & X \end{pmatrix},$$

Hai cách tô màu C_1 và C_2 nên được xem là như nhau.

Nhóm D_8 là nhóm con của $S(X)$, trong đó X là tập các đỉnh của hình vuông. D_8 tác động lên X và vì thế nó tác động lên tập các cách tô mầu của các đỉnh. Với mỗi $g \in D_8$ nếu C là một cách tô màu các đỉnh của hình vuông và $C' = g \bullet C$ là tác động của g lên C thì ta có thể coi các cách tô màu C và C' là như nhau. Do đó các cách tô màu trong cùng quỹ đạo $\{g \bullet C \ : \ g \in D_8\}$ của C nên được xem là tương đương. Trong trường hợp này, số cách tô màu phân biệt (không tương đương) chính là số các quỹ đạo.

Định lí Burnside- Frobenius giúp ta tính được số quỹ đạo của một tác động nếu ta biết số cách tô màu cố định qua tác động của một hoán vị cho trước. Vì thế ta cần mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2.2 : Gọi G là nhóm con của $S(X)$ với X là tập các đỉnh của một đa giác đều n cạnh. Cho $g \in G$. Giả sử g là tích của c vòng xích độc lập, tính cả các xích có độ dài 1. Nếu ta có k màu thì số cách tô màu các đỉnh của đa giác cố định qua tác động của g là k^c.

Chứng minh: Cho C là một cách tô màu các đỉnh của đa giác. Giả sử C cố định qua tác động của g (tức là $C = g \bullet C$), khi đó với mỗi vòng xích $(a_1, \ldots, a_p)$ của g, vì $g(a_1) = a_2$, $g(a_2) = a_3$, $\ldots, g(a_n) = a_1$ nên các đỉnh $a_1, \ldots, a_p$ phải có cùng màu. Ngược lại, giả sử với mỗi vòng xích $(a_1, \ldots, a_p)$ của g, các đỉnh $a_1, \ldots, a_p$ có cùng màu. Khi đó rõ ràng C là cố định qua tác động của g. Vì thế số cách tô màu cố định qua tác động của g là số cách chọn màu cho các xích của g, kể cả các xích có độ dài 1, mỗi xích chọn một màu. Vì vậy có đúng

k^c cách tô màu cố định qua tác động của g.

Nhóm D_8 gồm có:

1 hoán vị 4 vòng xích, đó là I

2 hoán vị 3 vòng xích, đó là T và R^2T

3 hoán vị 2 vòng xích, đó là R^2, RT và R^3T

2 hoán vị 1 vòng xích, đó là R và R^3.

Theo Định lí Burnside- Frobenius và mệnh đề 2.2 ta có số cách tô màu phân biệt các đỉnh hình vuông nói trên là:

$$\frac{1}{8}(k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k).$$

Đây cũng chính là số cách tô mầu phân biệt.

Ví dụ 2.3: Cho số nguyên dương n. Cho bảng ô vuông kích thước 3×3. Người ta dùng n màu để tô tất cả các ô vuông con của bảng sao cho trong mỗi cách tô, mỗi ô vuông con được tô bởi một màu. Hai cách tô được coi là như nhau nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của bảng ô vuông. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không như nhau? (Lưu ý: Trong mỗi cách tô không nhất thiết phải dùng đủ n màu).

Giải: Đánh số các ô vuông ở biên theo thứ tự từ 1 đến 8 theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Theo giả thiết ô chính giữa bảng có n cách tô màu. Ta xét nhóm G các phép quay quanh tâm của bảng trên biến bảng thành bảng có vị trí trùng với nó. G bao gồm 4 phần tử I, $R = (1,3,5,7)(2,4,6,8), R^2 = (1,5)(2,6)(3,7)(4,8), R^3 = (1,7,5,3)(2,8,6,4)$.

Theo Định lí Burnside- Frobenius và mệnh đề 2.2 ta có số cách tô màu các ô ở biên thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\frac{1}{4}(n^8 + n^4 + 2n^2).$$

Theo quy tắc nhân, số cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\frac{1}{4}(n^9 + n^5 + 2n^3).$$

Ví dụ 2.4: Cho trước một hình lập phương. Ta đánh số bốn đỉnh ở mặt trên bởi các số $1, 2, 3, 4$. Đánh số bốn đỉnh ở mặt dưới như sau: Đỉnh 5 ở dưới đỉnh 1, đỉnh 6 ở dưới đỉnh 2, đỉnh 7 ở dưới đỉnh 3, đỉnh 8 ở dưới đỉnh 4. Xét nhóm G gồm 24 phép quay biến hình lập phương thành chính nó như sau:

$\ast$ Phép đồng nhất $I = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$

$\ast$ Ba phép quay quanh đường thẳng nối tâm của hai mặt đối diện, góc quay 180^0, ví dụ $(1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)$

$\ast$ Ba phép quay quanh đường thẳng nối tâm của hai mặt đối diện, góc quay 90^0, ví dụ $(1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)$

$\ast$ Ba phép quay quanh đường thẳng nối tâm của hai mặt đối diện, góc quay 270^0, ví dụ $(1, 4, 3, 2)(5, 8, 7, 6)$

$\ast$ Sáu phép quay quanh đường thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện, góc quay 180^0, ví dụ $(1, 2)(3, 5)(4, 6)(7, 8)$

$\ast$ Bốn phép quay quanh đường chéo của hình lập phương, góc quay 120^0, ví dụ $(1)(2, 4, 5)(3, 8, 6)(7)$

$\ast$ Bốn phép quay quanh đường chéo của hình lập phương, góc quay 240^0, ví dụ $(1)(2, 5, 4)(3, 6, 8)(7)$

Với k màu cho trước, hỏi có bao nhiêu cách tô màu phân biệt các đỉnh của hình vuông biết hai cách tô màu được coi là như nhau nếu cách này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay thuộc G.

Giải: Nhóm G có một hoán vị tám vòng xích là I. Mười bảy hoán vị bốn vòng xích. Sáu hoán vị hai vòng xích. Do đó kết quả cần tìm là:

$$\frac{1}{24}(k^8 + 17k^4 + 6k^2).$$

3.2.3 Bài tập tham khảo

Bài 1: Người ta cần tô màu các đỉnh hình của một hình vuông với 2 màu trắng và xanh. Có bao nhiêu cách tô màu phân biệt thỏa mãn yêu cầu bài toán biết hai cách được coi là như nhau nếu cách tô mầu này là tác động lên cách tô màu kia qua phép hoán vị trong nhóm D_8

Bài 2: Giả sử một cái cây gậy được đặt trên trục hoành từ $x = -1$ đến $x = 1$ với 3 hạt được đính trên gậy. Các hạt này được đính tại điểm $(-1, 0)$ và $(1, 0)$) và tại trung điểm $(0, 0)$ của gậy. Người ta muốn tô 3 hạt đó bằng n màu, và hai cách tô màu được coi là như nhau nếu cách tô mầu này là tác động lên cách tô màu kia qua phép hoán vị trong nhóm $\{I, \delta\}$, trong đó I là phép thế đồng nhất và δ là phép quay quanh trục tung một góc 180^0. Chứng minh rằng khi đó số cách tô màu phân biệt là

$$\frac{1}{2}(n^2 + n^3).$$

(Chú ý rằng nếu giả thiết thêm rằng trong n màu đó có mầu đen. Khi đó số cách tô màu phân biệt sao cho hạt ở giữa gậy luôn có màu đen là $\frac{1}{2}(n + n^2)$).

Bài 3: Với 2 màu đỏ và xanh ta cần tô màu các đỉnh của một lục giác đều. Giả thiết rằng 2 cách tô màu là tương đương nếu cách tô mầu này là tác động lên cách tô màu kia qua một hoán vị trong nhóm D_{12} . Có bao nhiêu cách tô màu phân biệt sao cho 3 đỉnh của lục giác có màu đỏ và 3 đỉnh còn lại có màu xanh.

Bài 4: Gọi G là nhóm gồm 12 phép quay một khối tứ diện đều bao gồm: hoán vị đồng nhất I và 08 phép quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục nối 1 đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện với góc quay 120^0 và 240^0, đó là: (1)(2,3,4), (1,3,4)(2), (1,2,4)(3), (1,2,3)(4), (1)(2,4,3), (1,4,3)(2), (1,4,2)(3), (1,3,2)(4) và

03 phép quay quanh 03 trục nối các trung điểm của 2 cạnh chéo nhau với góc quay 180^0.
Giả thiết rằng 2 cách tô màu là tương đương nếu cách này là tác động lên cách kia qua một hoán vị nào đó trong nhóm G. Chứng minh rằng, với k màu cho trước để tô màu các đỉnh của khối tứ diện nói trên, có

$$\frac{1}{12}(n^4 + 11n^2)$$

cách tô màu phân biệt.

Bài 5: Giả sử ta có 4 màu, trong đó có màu xanh để tô màu các đỉnh của khối tứ diện đều. Gọi G là nhóm phép thế gồm 12 phần tử xác định như trong bài 4 . Giả thiết rằng 2 cách tô màu được xem là như nhau nếu cách tô này là tác động của cách kia qua một phép thế trong G. Có bao nhiêu cách tô màu phân biệt sao cho có đúng 2 đỉnh được tô màu xanh.

Bài 6: Cho p là số nguyên tố. Xét một đa giác đều p cạnh với tâm O. Gọi I là phép đồng nhất và R là phép quay tâm O ngược chiều kim đồng hồ với góc quay $360^0/p$. Kí hiệu

$$G = \{I, R, R^2, \ldots, R^{p-1}\}.$$

là nhóm các phép quay của đa giác. Giả thiết rằng hai cách tô màu là tương đương nếu cách tô này là tác động lên cách kia qua một phép quay trong G. Chứng minh rằng với n màu cho trước, để tô màu các đỉnh của đa giác, số cách tô màu phân biệt là $\dfrac{1}{p}(n^p + (p-1)n)$.

Bài 7: Giả thiết rằng 2 cách tô màu các đỉnh của một hình lục giác đều là tương đương nếu cách tô mầu này là tác động của một hoán vị trong nhóm

D_{12} lên cách tô màu kia. Chứng minh rằng với k màu cho trước, có

$$\frac{1}{12}(k^6 + 3k^4 + 4k^3 + 2k^2 + 2k).$$

cách tô màu phân biệt.

Định lí Burnside- Frobenius còn có ứng dụng trong một số bài toán ở mức độ khó hơn, ví dụ như bài toán tô màu các mặt của khối lập phương, khối 12 mặt đều, khối 20 mặt đều...Tuy nhiên, trong phạm vi một bài toán nhỏ chúng tôi không nêu được ra ở đây. Rất mong các bạn đồng nghiệp đọc, cho góp ý và phát triển tiếp ý tưởng mà chúng tôi đã nêu ra. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Tuyết Nga (2009), Một số ứng dụng của lý thuyết nhóm vào các bài toán sơ cấp, Luận văn cao học, Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, Thái Nguyên năm 2009.

2. V.K. Balakrishnan, Ph.D (1995), Theory and problems of combinatorics, McGraw-Hill, INC, Singapore.

3.3 Chuyên đề chọn lọc về bất đẳng thức

Tổ Toán, THPT Chuyên Cao Bằng

3.3.1 Mở đầu

I- Lý do chọn đề tài.

- Bất đẳng thức và chứng minh bất đẳng thức là một phần quan trọng của chương trình toán phổ thông. Trong các đề thi tuyển sinh vào các trường đại học và cao đẳng, các kỳ thi chọn học sinh giỏi các cấp, bài toán bất đẳng thức là bài toán không thể thiếu. Bất đẳngt thức cũng là một trong những vấn đề khó của chương trình toán phổ thông, không chỉ đối với học sinh trung bình mà ngay cả đối với học sinh giỏi. Vì vậy việc dạy học bất đẳng thức và giải quyết các bài toán là một nội dung của chương trình và mỗi giáo viên, nhất là đối với những giáo viên ôn luyện học sinh giỏi cần quan tâm. Đó là lý do chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu của mình là: ÕỨng dụng của bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski vào chứng minh bất đẳng thức.

II- Cơ sở lý luận.

- Trong chứng minh bất đẳng thức, việc sử dụng các bất đẳng thức đã được chứng minh để chứng minh các bất đẳng thức khác là một trong các phương pháp hay được dùng. Các bất đẳng thức thường được dùng là bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski.

- Việc hướng dẫn học sinh sử dụng 2 bất đẳng thức này một cách hợp lý và hiệu quả là rất cần thiết và cần được quan tâm đúng mức

3.3.2 Nội dung

I. Bất đẳng thức AM-GM

Bất đẳng thức AM-GM chỉ áp dụng cho các số dương hoặc bằng 0. Không áp dụng được cho số âm.

Với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm ta luôn có

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Khi sử dụng bất đẳng thức AM-GM có thể phải cộng thêm nhiều số 1 hoặc tách một số hạng thành nhiều số hạng để có được giá trị n (số các số hạng) đem lại số mũ mong muốn.

Khi chứng minh bất đẳng thức có ba số hạng nên cân nhắc sử dụng một lần bất đẳng thức AM-GM cho ba số hạng hoặc ba lần, mỗi lần cho hai số hạng.

Để chứng minh một bất đẳng thức dạng phân thức, thường phải áp dụng hai lần bất đẳng thức AM-GM: Một lần cho toàn thể các phân thức, một lần cho riêng một phân thức (hoặc cho riêng biểu thức ở mẫu của một phân thức).

Những gợi ý trên đây được áp dụng trong việc giải các bài toán sau:

Bài 1. Cho các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho $a_1a_2a_3\dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$(1+a_1).(1+a_2).(1+a_3)\dots(1+a_n) \geq 2^n.$$

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM:

Vì $1+a_1 \geq 2\sqrt{a_1}\,, 1+a_2 \geq 2\sqrt{a_2}\,, 1+a_n \geq 2\sqrt{a_n}$ nên nhân các bất đẳng thức cùng chiều, các vế đều dương này lại sẽ được

$$(1+a_1).(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n\sqrt{a_1.a_2\dots a_n} = 2^n.$$

Có dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $1 = a_1 = a_2 = \dots = \dots = a_n$.

Bài 2. Cho $x, y, z > 0$, Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+zy} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{x+y+z}{2xyz}. \tag{1}$$

Trường hợp nào xảy ra dấu đẳng thức?

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$x^2+yz \geq 2x\sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+zy} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+zy} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} + \frac{1}{2y\sqrt{zx}} + \frac{1}{2z\sqrt{xy}}$$

$$= \frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}{2xyz} \leq \frac{(y+z)/2+(z+x)/2+(x+y)/2}{2xyz} = \frac{x+y+z}{2xyz}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 3. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

Bài giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1 - a^2)} + \frac{b^2}{b(1 - b^2)} + \frac{c^2}{c(1 - c^{2)}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.(a^2 + b^2 + c^2). \tag{2}$$

Nhận xét rằng (2) sẽ được chứng minh nếu

$$\frac{x^2}{x(1 - x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.x^2 \text{ khi } 0 < x < 1$$

$$\Leftrightarrow x(1 - x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ khi } 0 < x < 1. \tag{3}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$(1 - x^2)^2 = \frac{1}{2}.(2x^2).(1 - x^2).(1 - x^2) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{2x^2 + (1 - x^2) + (1 - x^2)}{3}\right]^3 = \frac{4}{27}.$$

Từ đây có (3) nên suy ra đpcm. Có dấu đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Cách khác. Khảo sát hàm bậc ba $f(x) \cdot (1 - x^2)$ với $x \in (0, 1)$ cũng thu được (3).

Bài 4. Cho $a, b > 0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^3} + \frac{a^3}{b^3} + b^3 \geq \frac{1}{a} + \frac{a}{b} + b. \tag{1}$$

Bài giải. Vì $\dfrac{1}{a^3} + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^3}.1.1} = \dfrac{3}{a}$, tương tự: $\dfrac{a^3}{b^3} + 1 + 1 \geq \dfrac{3a}{b}$, $b^3 + 1 + 1 \geq 3b$, cộng ba bất đẳng thức này sẽ được

$$\frac{1}{a^3} + \frac{a^3}{b^3} + b^3 + 6 \geq 3\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{b} + b\right) \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{b} + b\right) + 2.3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.b} \Rightarrow (1).$$

Có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Tổng quát. Nếu $a, b, c > 0$ thì $\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{c^3} + \dfrac{c^3}{a^3} \geq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$. Có dấu đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 5. Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng

$$\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right). \tag{1}$$

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x}\ ,\ y^2 + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{y}.$$

Cộng lại được (1). Có dấu đẳng thức $\Leftrightarrow x = y = 1$.

Bài 6. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}.$$

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2},$$

dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq 3.\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}}$$

$$\geq 3.\frac{1}{\dfrac{(1+x)+(1+y)+(1+z)}{3}} \geq \frac{3}{2}.$$

Có dấu đẳng thức $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}. \tag{1}$$

Bài giải. Vì $(a+b)^2 \geq 4ab$ nên $\dfrac{ab}{a+b} \leq \dfrac{a+b}{4}$. Suy ra

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} + \frac{c+a}{4} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Có dấu đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$(1+a^3).(1+b^3).(1+c^3) \geq (1+ab^2).(1+bc^2).(1+ca^2). \tag{1}$$

Bài giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right)$$

$$\geq \left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+\left(a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b\right). \tag{2}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$a^3+2b^3 = a^3+b^3+b^3 \geq 3.\sqrt[3]{a^3.b^3.b^3} = 3ab^2$$
$$\Rightarrow (a^3+2b^3)+(b^3+2c^3)+(c^3+2a^3) \geq 3ab^2+3bc^2+3ca^2$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3 \geq ab^2+bc^2+ca^2. \tag{3}$$

Tương tự, ta có

$$a^3b^3+2b^3c^3 = a^3b^3+b^3c^3+b^3c^3 \ \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3.b^3c^3.c^3a^3} = 3ab^3c^2$$
$$\Rightarrow \ (a^3b^3+2b^3c^3)+(b^3c^3+2c^3a^3)+(c^3a^3+2a^3b^3) \geq 3ab^3c^2+3bc^3a^2+3ca^3b^2$$
$$\Rightarrow a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b. \tag{4}$$

Cộng (3) với (4) được (2) $\Rightarrow$ (1). Có dấu đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 9. Cho $x > 0, y > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \ ,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{xy}} \geq \frac{4}{x+y}. \tag{1}$$

Mặt khác, lại có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Có dấu đẳng thức khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y.$$

Bài 10. Cho các số dương x,y,z thoả mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq 3\sqrt{3}. \tag{1}$$

Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$1+x^3+y^3\geq 3\sqrt[3]{x^3y^3}=3xy\Rightarrow\sqrt{1+x^3+y^3}\geq\sqrt{3}\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\geq\frac{\sqrt{3}\sqrt{xy}}{xy}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}. \tag{2}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}\geq\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} \tag{3}$$

và

$$\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}. \tag{4}$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức (2),(3),(4) ta được

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$$

$$\geq\sqrt{3}.3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x^2.y^2.z^2}}}=3\sqrt{3}$$

(vì theo đề bài: $xyz=1$).

Có dấu đẳng thức khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 = z^3 = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{xy}} = \dfrac{1}{\sqrt{yz}} = \dfrac{1}{\sqrt{zx}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Bài 11. Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Bài giải. Vì

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{4}.$$

Có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$. Suy ra:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \leq \frac{\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x+z}}{4}. \tag{1}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{x+2y+z} = \frac{1}{(x+y)+(y+z)} \leq \frac{\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{y+z}}{4} \tag{2}$$

$$\frac{1}{x+y+2z} = \frac{1}{(x+z)+(y+z)} \leq \frac{\dfrac{1}{x+z} + \dfrac{1}{y+z}}{4} \tag{3}$$

Cộng từng vế của bất đẳng thức (1), (2) ,(3), ta được:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{z+x}}{2} \leq$$

$$\leq \frac{\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{4} + \dfrac{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{4} + \dfrac{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}}{4}}{2} = \frac{\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{2}}{2} = \frac{\dfrac{4}{2}}{2} = 1$$

.

Có dấu đẳng thức khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x+y=y+z=z=x \\ x=y=z \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{4}.$$

Bài 12.

Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x+4^x+5^x.$$

Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x}=2\sqrt{3^{2x}}=2.3^x \tag{1}$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x}=2\sqrt{5^{2x}}=2.5^x \tag{2}$$

$$\left(\frac{20}{3}\right)^x+\left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^x.\left(\frac{12}{5}\right)^x}=2\sqrt{4^{2x}}=2.4^x \tag{3}$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức (1), (2), (3), ta được:

$$2.\left(\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\right) \geq 2\left(3^x+4^x+5^x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x+4^x+5^x.$$

Có dấu đẳng thức khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{12}{5}\right)^x=\left(\dfrac{15}{4}\right)^x \\ \left(\dfrac{15}{4}\right)^x=\left(\dfrac{20}{3}\right)^x \\ \left(\dfrac{20}{3}\right)^x=\left(\dfrac{12}{5}\right)^x \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Bài 13. Chứng minh rằng với mọi $x, y > 0$, ta có

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 256.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(1+x) = \left(1+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\right) \geq 4\sqrt[4]{1.\frac{x^3}{3^3}}. \qquad (1)$$

$$\left(1+\frac{y}{x}\right) = \left(1+\frac{y}{3x}+\frac{y}{3x}+\frac{y}{3x}\right) \geq 4\sqrt[4]{1.\frac{y^3}{(3x)^3}} = 4\sqrt[4]{\frac{y^3}{27x^3}}. \qquad (2)$$

$$\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 = \left(1+\frac{3}{\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{y}}\right)^2$$
$$\geq \left(4\sqrt[4]{1.\frac{3^3}{\left(\sqrt{y}\right)^3}}\right)^2 = 16\sqrt[4]{\frac{27^2}{y^3}}. \qquad (3)$$

Nhân từng vế của các bất đẳng thức (1) ,(2) , (3) ta được

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right).\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 4.4.16\sqrt[4]{\frac{x^3}{27}.\frac{y^3}{27x^3}.\frac{27^2}{y^3}} = 256.$$

Có dấu đẳng thức khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{3} \\ 1 = \dfrac{y}{3x} = \dfrac{y}{3x} = \dfrac{y}{3x} \\ 1 = \dfrac{3}{\sqrt{y}} = \dfrac{3}{\sqrt{y}} = \dfrac{3}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3x \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$$

Bài 14. Cho x, y, z là ba số thoả mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt{3+4^x} = \sqrt{1+1+1+4^x} \geq \sqrt{4\sqrt[4]{1.1.1.4^x}} = 2.4^{\frac{x}{8}}. \qquad (1)$$

$$\sqrt{3+4^x}=\sqrt{1+1+1+4^y}\geq\sqrt{4\sqrt[4]{1.1.1.4^y}}=2.4^{\frac{y}{8}}. \quad (2)$$

$$\sqrt{3+4^z}=\sqrt{1+1+1+4^z}\geq\sqrt{4\sqrt[4]{1.1.1.4^z}}=2.4^{\frac{z}{8}}. \quad (3)$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức (1),(2),(3), ta được

$$\sqrt{3+4^x}+\sqrt{3+4^y}+\sqrt{3+4^z}\geq 2\left(4^{\frac{x}{8}}+4^{\frac{y}{8}}+4^{\frac{z}{8}}\right)$$

$$\geq 2.\left(3\sqrt[3]{4^{\frac{x+y+z}{8}}}\right)=2.3\sqrt[3]{4^{\frac{0}{8}}}=2.3=6$$

(vì $x+y+z=0$). Dấu đẳng thức xảy ra:

$$\begin{cases}1=1=1=4^x\\1=1=1=4^y\\1=1=1=4^z\\4^{\frac{x}{8}}=4^{\frac{y}{8}}=4^{\frac{z}{8}}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Bài 15. Cho a,b,c là các số dương thoả mãn $a+b+c=\frac{3}{4}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}\leq 3.$$

Bài giải. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt[3]{(a+3b).1.1}\leq\frac{a+3b+1+1}{3} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{(b+3c).1.1}\leq\frac{b+3c+1+1}{3} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{(c+3a).1.1}\leq\frac{c+3a+1+1}{3} \quad (3)$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}\leq\frac{4(a+b+c)+6}{3}=\frac{4.\frac{3}{4}+6}{3}=3.$$

Có dấu đẳng thức khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a + 3b = 1 = 1 \\ b + 3c = 1 = 1 \\ c + 3a = 1 = 1 \\ a + b + c = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{4}.$$

II. Bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski.

Bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski có tính tổng quát rất cao. Thường chỉ dùng ở mức độ sau đây:Với $a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực, ta luôn có

$$(a_1.x_1 + a_2.x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \le \left({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2\right).\left({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2\right).$$

Có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{x_1} = \dfrac{a_2}{x_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{x_n}$, với quy ước rằng với $x_1 = 0$ thì $a_1 = 0, x_2 = 0$ thì $a_2 = 0, \dots$

Để có được số mũ mong muốn ở bất đẳng thức phải chứng minh, cần lựa chọn cách viết một số hạng dưới dạng tích a_nx_n (phần nào là a_n, phần nào là x_n).

1. Phép biến đổi thuận Cauchy-Bunhiacovski

Khá nhiều bất đẳng thức trong các kỳ thi quốc tế, vô địch quốc gia của nhiều nước trên thế giới.Tuy nhiên nếu xuất phát từ $(a+b+c)^2$ chúng ta thu được các bất đẳng thức cơ bản. Nhưng các bài toán về dạng này trong những năm gần đây thường khó hơn vì xuất phát từ các biểu thức đối xứng khác như:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2; \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)^2; \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2; \dots$$

Trong mục này chúng ta chứng minh một số bất đẳng thức trong các kỳ thi quốc gia các nước , quốc tế và xây dựng phương pháp chứng minh và xây dựng các bất đẳng thức dạng này.

Bài 1. Với $a, b, c > 0, a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \le 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \quad (1)\,. \tag{1}$$

Bài giải . Chúng ta trình bày một cách giải hoàn toàn khác với đáp án đã có như sau:

$$(1) \Leftrightarrow 3 + \frac{2a}{1-a} + \frac{2b}{1-b} + \frac{2c}{1-c} \le 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{1-a}\right) + 2b\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1-b}\right) + 2c\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1-c}\right) \ge 3$$

hay

$$a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b+c}\right) + b\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c+a}\right) + c\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right) \ge \frac{3}{2}$$

hay

$$P = \frac{ab}{c\,(b+c)} + \frac{bc}{a\,(c+a)} + \frac{ca}{b\,(a+b)} \ge \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Ta có

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{ab}{c\,(b+c)}}\sqrt{b+c} + \sqrt{\frac{bc}{a\,(c+a)}}\sqrt{c+a} + \sqrt{\frac{ca}{b\,(a+b)}}\sqrt{a+b}\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski, suy ra:

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2 \le P.2\,(a+b+c)\,.$$

Mặt khác ta có (áp dụng: $(a+b+c)^2 \ge 3\,(ab+bc+ca)$)

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2 \ge 3\,(a+b+c)\,.$$

Thu được $P \geq 2$, ta chứng minh được (2) $\Rightarrow$ (1) là đpcm.

Bài 2. Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a}{bc\left(c+a\right)} + \frac{b}{ca\left(a+b\right)} + \frac{c}{cb\left(b+c\right)} \geq \frac{27}{2{(a+b+c)}^2}$$

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\right)^2 \\
=&\left(\sqrt{\frac{a}{bc\left(c+a\right)}}\sqrt{c+a} + \sqrt{\frac{b}{ca\left(a+b\right)}}\sqrt{a+b} + \sqrt{\frac{c}{ab\left(b+c\right)}}\sqrt{b+c}\right)^2 \\
&\leq P.2\left(a+b+c\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$\left(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{27}{\left(a+b+c\right)} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $P \geq \dfrac{27}{2{(a+b+c)}^2}$ (đpcm).

Bài 3. Với $a, b, c > 0, abc = 1$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{a^2\left(b+c\right)} + \frac{1}{b^2\left(c+a\right)} + \frac{1}{c^2\left(a+b\right)}$$

Bài giải. Ta có

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{1}{b\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{1}{c\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\right)^2 \leq 2P(a+b+c) \qquad (1)$$

Mặt khác ta có

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{3\left(a+b+c\right)}{abc} = 3\left(a+b+c\right) \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $P \geq \dfrac{3}{2} = P_{\min}$ (khi $a = b = c = 1$).

Từ các bài giải mẫu trên chúng ta xây dựng phương pháp giải cho các bất đẳng thức dạng này như sau:

Bước 1. Gạch những thừa số dạng tổng trong bất đẳng thức để tìm biểu thức xuất phát.

Bước 2. Từ biểu thức xuất phát mô tả Cauchy-Bunhiacovski biểu thức chính có mặt trong bất đẳng thức.

Bước 3. Sử dụng một số bất đẳng thức trung gian quen thuộc chứng minh bất đẳng thức.

Sau đây chúng ta xét một số ví dụ minh hoạ:

Bài 1. Với $a, b, c > 0, abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Bài giải. Ta có

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{a\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)} + \frac{1}{b\sqrt{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)} + \frac{1}{c\sqrt{c(a+b)}}\sqrt{c\right.$$

$$\leq P.2(ab+bc+ca) \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = (ab+bc+ca)^2 \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra:

$$P \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Bài 2.

Bài giải. Ta có

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{b\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{b^2}{c\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b} + \frac{c^2}{a\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}\right)^2 \leq P.2(a+ \quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)^2 \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $P \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Bài 3. Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{a^6}{b^3(a+c)}+\frac{b^6}{c^3(a+b)}+\frac{c^6}{a^3(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)^2\\ &=\left(\frac{a^3}{b\sqrt{bc+ca}}\sqrt{bc+ca}+\frac{b^3}{c\sqrt{ca+cb}}\sqrt{ca+cb}+\frac{c^3}{a\sqrt{ab+ac}}\sqrt{ab+ac}\right)^2\\ &\leq P.2(ab+bc+ca) \qquad (1)\end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)^2 \geq (ab+bc+ca)^2 \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $P \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$. (đpcm)

2. Phép biến đổi nghịch Cauchy-Bunhiacovski

Nhiều bất đẳng thức xoay vòng hay được xây dựng từ các phép biến đổi nghịch Cauchy-Bunhiacovski mà chúng ta sẽ trình bày trong mục này.

Bài 1. Với p, q, r và x, y, z là các số thực không âm.Chứng minh rằng:

$$P=\frac{p}{q+r}x^2+\frac{q}{r+p}y^2+\frac{r}{p+q}z^2 \geq (xy+yz+zx)-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Bài giải. Để nhanh chóng xây dựng cách giải cho các bất đẳng thức dạng này chúng ta trình bày các bước cụ thể như sau

Bước 1. Thêm vào các số hạng để rút $(p+q+r)$ làm thừa số chung, ta có

$$P=\left(\frac{p}{q+r}x^2+x^2\right)+\left(\frac{q}{r+p}y^2+y^2\right)+\left(\frac{r}{p+q}z^2+z^2\right)-(x^2-y^2-z^2)$$
$$P=(p+q+r)\left(\frac{x^2}{q+r}+\frac{y^2}{r+p}+\frac{z^2}{p+q}\right)-(x^2-y^2-z^2)$$

Bước 2. Biểu diễn dưới dạng Cauchy-Bunhiacovski:

$$P=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{q+r}\right)^2+\left(\sqrt{r+p}\right)^2+\left(\sqrt{p+q}\right)^2\right).$$
$$\left(\left(\frac{x}{\sqrt{q+r}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{r+p}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{p+q}}\right)^2\right)$$
$$--(x^2+y^2+z^2).$$

Suy ra:

$$P\geq\frac{1}{2}(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)=(xy+yz+zx)-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\frac{p}{y+z-x}=\frac{q}{x+z-y}=\frac{r}{x+y-z}.$$

Bài 2. Với $a,b,c>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}.$$

Bài giải. Ta có

$$P=\left(\frac{3a}{b+c}+3\right)+\left(\frac{4b}{c+a}+4\right)+\left(\frac{5c}{a+b}+5\right)-12$$
$$P=(a+b+c)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)-12$$
$$P=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{c+a}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right]$$
$$\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{3}{b+c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{c+a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{a+b}}\right)^2\right]-12\geq$$
$$\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)^2-12$$

Vậy:

$$P_{\min} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}\right)^2 - 12 \,\text{khi}: \frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}.$$

3. Bất đẳng thức thứ tự xây dựng từ bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski.

Nhờ bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski chúng ta chuyển một số bất đẳng thức thứ tự đơn giản thành những bất đẳng thức thứ tự bậc 2.

Bài 1. Với Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2} \geq a + b + c$$

Bài giải. Ta có

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{a}{c}\sqrt{b}.\frac{c}{a}\sqrt{b} + \frac{b}{a}\sqrt{c}.\frac{a}{b}\sqrt{c} + \frac{c}{b}\sqrt{a}.\frac{b}{c}\sqrt{a}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2}\right).\left(\frac{c^2b}{a^2} + \frac{a^2c}{b^2} + \frac{b^2a}{c^2}\right).$$

Ta chứng minh:

$$\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2} \geq \frac{ab^2}{c^2} + \frac{bc^2}{a^2} + \frac{ca^2}{b^2}.$$
$$\Leftrightarrow a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3 \geq a^3b^4 + b^3c^4 + c^3a^4$$
$$\Leftrightarrow a^3b^3(a-b) + b^3c^3(b-c) + c^3a^3(c-a) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3(b^3 - c^3 + c^3)(a-b) + b^3c^3(b-c) + c^3a^3(c-a) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3(b^3 - c^3)(a-b) + c^3\left[a^3(a-b) + b^3(b-c) + a^3(c-a)\right] \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3(b^3 - c^3)(a-b) + c^3\left[a^3(c-b) + b^3(b-c)\right] \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3(b^3 - c^3)(a-b) + c^3(b-c)(b^3 - a^3) \geq 0.$$

(Hiển nhiên đúng).

Suy ra:

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a + b + c \leq \frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2}.$$

(đpcm)

Bài 2. Với $a \geq b \geq c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{a^3} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

Bài giải. Ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{b}{a}.\frac{1}{\sqrt{b}}.\frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{b}}.\frac{c}{b}.\frac{1}{\sqrt{c}}.\frac{b}{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}.\frac{a}{c}.\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{c}{a}\right)^2 \leq$$
$$\leq \left(\frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} + \frac{a^2}{c^3}\right)\left(\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3}\right).$$

Ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} + \frac{a^2}{c^3} \geq \frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3}$$
$$\Leftrightarrow b^5c^3 + c^5a^3 + a^5b^3 \geq a^5c^3 + b^5a^3 + c^5b^3$$
$$\Leftrightarrow a^3b^3(a^2 - b^2) + b^3c^3(b^2 - c^2) + c^3a^3(c^2 - a^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3(b^3 - c^3 + c^3)(a^2 - b^2) + b^3c^3(b^2 - c^2) + c^3a^3(c^2 - a^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3(b^3 - c^3)(a^2 - b^2) + c^3(b^2 - c^2)(a^3 - b^3) \geq 0$$

(Hiển nhiên đúng).

Suy ra:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}\right)^2.$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}.$$

(đpcm)

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được bất đẳng thức

Với $a \geq b \geq c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3b}{c^3} + \frac{b^3c}{a^3} + \frac{c^3a}{b^3} \geq (a + b + c)$$

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu (2005), *Bất đẳng thức, định lý và áp dụng,* NXB Giáo dục.

2. Nguyễn Văn Mậu (2002), *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ,* NXB Giáo dục.

3.4 Một số nhận xét về giảng dạy chuyên đề ứng dụng nguyên lý Dirichlet

Lê Thị Thanh Bình, Trường THCS Bình Minh, Hải Dương

Tóm tắt nội dung 3. *Trong quá trình giảng dạy, bên cạnh việc cung cấp hệ thống kiến thức và các kỹ năng cơ bản cho học sinh, người thầy cần tìm tòi khai thác hệ thống kiến thức nâng cao nhằm bồi dưỡng phát triển tư duy suy luận Toán học cho học sinh năng khiếu với mong muốn các em sẽ trở thành những chủ nhân tương lai có khả năng tư duy nhạy bén, linh hoạt, sáng tạo, có độ tin cậy cao nhằm đáp ứng được yêu cầu ngày càng cao của nền kinh tế trong thời đại công nghiệp hiện đại.*

Trong bài này, chúng tôi trình bày một số nhận xét như là những kinh nghiệm thực tiễn trong việc "Hướng dẫn học sinh sử dụng nguyên lí Dirichlet giải một số bài tập hình học" bậc THCS.

3.4.1 Phần mở đầu

Nhận xét rằng, việc giải các bài toán thường dựa vào các định nghĩa và tính chất đó đươợc trình bày chi tiết trong phần lý thuyết. Nội dung các bài toán là xoay quanh việc vận dụng và khai thác các khía cạnh khác nhau của các khái niệm và đặc trưng cơ bản của vấn đề đang xét. Các bước giải của mỗi bài toán tuy vẫn thông qua 4 bước cơ bản (đọc hiểu, xây dựng lược đồ giải, thực hiện giải theo lược đồ đó chọn và xem lại) nhưng thường ngắn gọn hơn. Các suy luận trong quá trình giải mỗi bài toán theo lược đồ trên thường rất tự nhiên và đi từ dễ đến khó. Những bài toán có lược đồ giải rõ ràng, dễ nhận biết là những bài toán dạng cơ bản, chuẩn mực. Bên cạnh những bài toán cơ bản và chuẩn mực còn có một số bài toán dạng phức tạp hơn mà sau khi đọc xong nội dung, học sinh chưa nhận ra được lược đồ giải vì chưa xác định được nó thuộc dạng toán cơ bản (quen thuộc) nào trong chương trình. Thậm chí có những bài toán khi xem lời giải học sinh có thể vẫn không hiểu tại sao lại có những suy luận như vậy mà trong sách giáo khoa chưa đề cập đến. Trong một số trường hợp, lời giải đó sử dụng một vài khẳng định tuy rất hiển nhiên nhưng học sinh lại chưa hề được biết đến. Những bài toán có cách giải như vậy thường được coi là dạng toán không mẫu mực. Đó là những dạng toán khó thường xuất hiện trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi các cấp và kỳ thi tuyển sinh vào các lớp chuyên Toán trên toàn quốc. Trong bài này, chúng tôi ghi lại những điều đó gặp và cách giải quyết chuyên đề "ứng dụng nguyên lý Dirichlet" để giải một số bài tập hình học bậc THCS (từ lớp 7 đến lớp 9).

3.4.2 Phần nội dung

Nguyên lý Dirichlet

Nguyên lý Dirichlet là một trong những nguyên lý đơn giản, được dùng khá phổ biến trong số học, đại số và hình học và được phát biểu bằng nhiều cách khác nhau. Sau đây là cách phát biểu theo ngôn ngữ "thỏ" và "lồng":

Nếu nhốt m con thỏ vào n cái lồng , với $m > n$ (m, n là các số tự nhiên) thì tồn tại một cái lồng chứa ít nhất 2 con thỏ.

Nguyên lý có thể mở rộng như sau :

Nếu nhốt m con thỏ vào n cái lồng, với $m > n \cdot k (m, n, k$ là các số tự nhiên) thì tồn tại một cái lồng chứa ít nhất $k + 1$ con thỏ.

Phương pháp chung

Để giải một bài toán bằng cách sử dụng nguyên lý Dirichlet ta cần thực hiện các bước sau:

1. Tìm hiểu đề bài, xác định hai đối tượng của bài toán. Số lượng mỗi đối tượng trong giả thiết của bài toán dạng này là các số nguyên dương.

2. Xây dựng thuật giải:

a. Tiến hành phân chia các đối tượng trong giả thiết của bài toán thành hai tập hợp các đối tượng $\{A\}, \{B\}$. Đây là bước quan trọng nhất của tiến trình giải toán. Việc phân chia như vậy thường dựa trên tính chất của từng loại yếu tố.

b. Xác định và so sánh số phần tử của mỗi tập hợp $\{A\}, \{B\}$, tập hợp nào có số phần tử lớn hơn được chọn làm "thỏ", tập hợp kia chọn làm "lồng". Nếu trong bài toán đang xét ta đó chỉ ra được hai tập hợp các đối tượng tương ứng với "thỏ" và "lồng", thì bài toán được giải xong.

Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Dùng ba màu xanh, đỏ, vàng để tô màu các đỉnh của tứ giác. Chứng tỏ rằng có hai đỉnh được tô cùng màu.

Phân tích.

- Xác định các đối tượng của bài toán: đỉnh, màu tô.

- Xác định số lượng của từng loại đối tượng: 4 đỉnh, ba màu.

- Các đối tượng trong giả thiết của bài toán được phân chia thành hai tập hợp: Tập $\{A\}$ gồm 4 nút và tập $\{B\}$ gồm ba màu xanh, đỏ, vàng.

- So sánh số phần tử của hai tập hợp để gán mỗi tập hợp với "thỏ" hoặc "lồng". Ta coi tập $\{A\}$ là thỏ, tập $\{B\}$ là lồng (vì $4 > 3$).

- Sử dụng nguyên lý Dirichlet để đưa ra kết luận. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn hai thỏ. Điều đó có nghĩa là có hai điểm được tô cùng màu.

Giải.

Số đỉnh được tô màu là 4.

Số màu dùng để tô là 3.

Vì $4 > 3$ nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai nút cùng màu.

Câu hỏi khai thác: Từ bài tập đơn giản, kết quả dễ nhìn thấy ta tiếp tục đặt ra nhiều tình huống khác nhau để đưa đến ra bài toán tổng quát nhằm hiểu rõ hơn về mối quan hệ giữa hai đối tượng.

- Nếu chỉ dùng hai màu để tô thì số điểm được tô màu ít nhất là bao nhiêu để chắc chắn có hai điểm được tô cùng màu?

- Tổng quát: nếu số điểm được tô màu là a, số màu dùng để tô là b (a, b là các số tự nhiên) thì a và b quan hệ như thế nào với nhau để luôn có ít nhất hai điểm được tô cùng màu? (a lớn hơn b ít nhất 1 đơn vị)

- Nếu chỉ dùng hai màu để tô thì số điểm được tô màu ít nhất là bao nhiêu để chắc chắn có ba điểm được tô cùng màu? Tìm mối quan hệ giữa a, b trong trường hợp này? ($a \geq b \cdot 2 + 1$)

Ví dụ 2. Trên một tờ giấy kẻ ô vuông có 7 đường kẻ ngang và 9 đường kẻ dọc. Giao điểm của một đường kẻ ngang với một đường kẻ dọc được gọi là nút. Người ta tô các nút trên tờ giấy đó bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng có ít nhất hai nút cùng màu.

- Xác định các đối tượng của bài toán: nút, màu tô.

- Xác định số lượng của từng loại đối tượng:

Số lượng các nút trên tờ giấy là $7 \cdot 9 = 63$.

Số màu dùng để tô là 2.

- Các đối tượng trong giả thiết của bài toán được phân chia thành hai tập hợp:

Tập $\{A\}$ gồm 63 nút và tập $\{B\}$ gồm hai màu xanh và đỏ.

- So sánh số phần tử của hai tập hợp để gán mỗi tập hợp với "thỏ" hoặc "lồng". Ta coi tập $\{A\}$ là thỏ, tập $\{B\}$ là lồng (vì $63 > 2$).

- Sử dụng nguyên lý Dirichlet để đưa ra kết luận.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn hai thỏ. Điều đó có nghĩa là có không ít hơn hai nút cùng màu.

Giải.

Số lượng các nút trên tờ giấy là $7 \cdot 9 = 63$ (nút).

Số màu dùng để tô là 2 (màu).

Vì $63 > 2$ nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai nút cùng màu.

Câu hỏi khai thác:

1) Kết quả bài toán thay đổi như thế nào nếu ta tô các nút trên tờ giấy bằng:

a. 31 màu khác nhau ?

b. Dùng trong khoảng từ 2 đến 31 màu?

Trả lời: Kết quả bài toán không thay đổi do số "thỏ "luôn lớn hơn số "chuồng".

2) Nếu dùng 31 màu khác nhau để tô ta có thể khẳng định: có ít nhất ba nút được tô cùng màu hay không? Vì sao?

Trả lời: Theo nguyên lý Dirichlet mở rộng ta khẳng định chắc chắn có ít nhất ba nút được tô cùng màu vì $63 > 2 \cdot 31$.

3) Hãy đặt một đề bài tương tự Ví dụ 2?

Trên đây là dạng bài tập đơn giản nhất, giúp hình thành rõ các bước suy luận. Ta tiếp tục đặt ra các tình huống khó hơn như biết trước số phần tử của tập hợp "thỏ" phải xác định tập hợp "lồng" và số "lồng" phù hợp. Ví dụ sau đây trình bày một cách tạo ra tập hợp "lồng".

Ví dụ 3. Trong tam giác đều có cạnh bằng 4 (đơn vị độ dài, được hiểu đến cuối bài viết) lấy 17 điểm. Chứng minh rằng trong 17 điểm đó có ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá 1.

Phân tích. Từ điều kiện "khoảng cách giữa hai điểm không vượt quá 1" và cạnh của tam giác đều bằng 4 gợi cho ta tìm đến một đối tượng hình học khác tập hợp 17 điểm đã cho.

Để có được "ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá 1" thì ta coi tập hợp 17 điểm là tập hợp "thỏ" suy ra tập hợp các đối tượng mới là tập hợp "lồng". Suy ra số phần tử của tập hợp các đối tượng mới này phải nhỏ hơn 17. Bằng các suy luận trên hãy tìm cách tạo ra các "lồng" để nhốt "thỏ"?

Giải. Chia tam giác đều có cạnh bằng 4 thành 16 tam giác đều có cạnh bằng 1 (như hình vẽ). Vì $17 > 16$, theo nguyên lý Dirichle, tồn tại ít nhất một tam giác đều cạnh bằng 1 có chứa ít nhất 2 điểm trong số 17 điểm đã cho. Khoảng cách giữa hai điểm đó luôn không vượt quá 1.

Ta chứng minh rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ nằm trong tam giác đều không lớn hơn cạnh tam giác.

Ta ký hiệu hai điểm K, L nằm trong tam giác ABC đều, khi đó ta có $\angle KAL < 60^o$. Một trong hai góc còn lại của $\triangle AKL$ không nhỏ hơn 60^o, chẳng hạn $\angle ALK \geq 60^o \Rightarrow AK > KL$. Gọi E là giao điểm của AK với cạnh BC, ta có $AE > AK$.Trong $\triangle ABE, \angle AEB \geq 60^o$(nó là góc ngoài của $\triangle AEC$), nên $AB > AE$. Kết hợp các kết quả trên ta suy ra điều cần chứng minh.

Để rèn cho học sinh có khả năng linh hoạt và tư duy sáng tạo, ta tiếp tục giới thiệu các bài tập tương tự, học sinh phải tạo tập hợp các "lồng" bằng các cách khác nhau như trong các ví dụ sau đây.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng cho 2009 điểm sao cho cứ 3 điểm bất kỳ có ít nhất 2 điểm cách nhau một khoảng không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1005 điểm.

Giải. Lấy một điểm A bất kỳ trong 2009 điểm đã cho, ví dụ đường tròn C_1 tâm A bán kínhbằng 1.

+ Nếu tất cả các điểm nằm trong hình tròn C_1 thì bài toán hiển nhiên đúng.

+ Nếu tất cả các điểm B mà khoảng cách giữa A và B lớn hơn 1 thì ta vẽ đường tròn C_2 tâm B bán kính bằng 1.

Khi đó, xét một điểm C tùy ý trong số 2007 điểm còn lại. Xét 3 điểm A, B, C, vì $AB > 1$ nên theo giả thiết thì có $AC \leq 1$ hoặc $BC \leq 1$. Nói cách khác, điểm C phải thuộc C_1 hoặc C_2. Suy ra 2007 điểm khác B và A phải nằm trong C_1 hoặc C_2. Theo nguyên lí Dirichlet, có một hình tròn chứa ít nhất 1004 điểm. Tính thêm tâm của hình tròn này thì hình tròn này chính là hình tròn bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1005 điểm trong 2009 điểm đó cho.

Ví dụ 5. Trong hình tròn có diện tích bằng 1 ta lấy 17 điểm bất kỳ, không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất 3 điểm lập thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{8}$.

Phân tích.

- Trước hết cần nhắc lại nguyên lý Dirichlet mở rộng.

- Dựa vào đề bài hãy xác định xem đối tượng nào trong bài toán được coi là tập hợp "thỏ"?

- Từ các điều kiện " hình tròn có diện tích bằng 1 " và "tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{8}$ " gợi cho ta nghĩ đến đối tượng hình học nào?

- Vậy đối tượng nào được coi là "lồng" trong bài toán này?

- Mỗi "lồng" chứa bao nhiêu con thỏ?

- Xác định số "lồng"? $(17-1):(3-1) = 8$ hoặc $1 : \frac{1}{8} = 8$.

- Hãy chia hình tròn có diện tích bằng 1 thành các hình có diện tích bằng nhau và bằng $\frac{1}{8}$?

Giải.

Chia hình tròn thành 8 phần bằng nhau. Mỗi phần có diện tích là $\frac{1}{8}$.

Do $17 : 8 = 2(\mod 1)$ nên theo nguyên lý Dirichlet có 1 phần chứa ít nhất 3 điểm. Ba điểm này là đỉnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn diện tích mỗi hình quạt.

Vậy có ít nhất 3 điểm trong 17 điểm đã cho lập thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{8}$.

Câu hỏi tổng quát hoá: Kết quả của bài toán thay đổi như thế nào nếu ta lấy trong hình tròn n điểm $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$?

Phân tích. Trong trường hợp lấy n điểm trong hình tròn $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$, ta xét hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Nếu $n = 2k + 1(k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$ ta chia hình tròn thành k phần bằng nhau, mỗi phần là 1 hình quạt có diện tích bằng $\frac{1}{k}$.

Trường hợp 2: Nếu $n = 2k(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ ta chia hình tròn thành $k - 1$ phần bằng nhau, mỗi phần là 1 hình quạt có diện tích bằng $\frac{1}{k-1}$.

Lập luận tương tự ta cũng suy ra kết quả như trên.

Trong một số bài tập hình học ngoài sử dụng nguyên lí Dirichlet ta còn phải kết hợp với các phương pháp khác như phương pháp giải bài toán cực trị, xấp xỉ,... Ặ

Ví dụ 6. Trong hình vuông có cạnh bằng 1 cho 33 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng trong các điểm đã cho có thể tìm được 3 điểm lập thành tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{32}$.

Giải.

Chia hình vuông cạnh 1 thành 16 hình vuông con như hình vẽ. Vì $33 > 2 \cdot 16$ nên theo nguyên lý Dirichlet có một hình vuông con (cạnh $\frac{1}{4}$) chứa ít nhất 3 trong 33 điểm đã cho. Ta chứng minh 3 điểm này lập nên một tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{32}$.

Giả sử 3 điểm A, B, C nằm trong hình vuông $DEFG$ cạnh $\frac{1}{4}$. Ta xét 2 trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Có một cạnh của tam giác nằm trên cạnh của hình vuông.

Giả sử cạnh AB của tam giác nằm trên cạnh DG của hình vuông. Kẻ đường cao CH. Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}CH \cdot AB \leq \frac{1}{2}CH \cdot DG \leq ED \cdot DG = \frac{1}{32}$.

Trường hợp 2: Không có cạnh nào của tam giác nằm trên cạnh của hình vuông.

Qua đỉnh B, ta kẻ đường thẳng song song với cạnh hình vuông và cắt cạnh AC tại M. Gọi AH, CK lần lượt là đường cao các tam giác ABM, CBM.

Xét $S_{ABC} = S_{AMB} + S_{CBM}$
$= \frac{1}{2}AH \cdot BM + \frac{1}{2}CK \cdot BM$
$= \frac{1}{2}BM \cdot (AH + CK)$
$\leq BM \cdot ED \leq DG \cdot ED = \frac{1}{32}$.

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có: $S_{ABC} \leq \frac{1}{32}$.

Tương tự như Ví dụ 6 học sinh dễ dàng giải được bài tập hay và khó sau đây:

Trong hình vuông cạnh $4cm$ người ta đặt 33 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng từ 33 điểm nói trên luôn có thể tìm được 3 điểm sao cho diện tích tam giác có đỉnh là 3 điểm đó không vượt quá $\frac{1}{2}dm^2$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Hải Dương năm học 2008-2009)

Ví dụ 7. Trong một hình vuông cạnh bằng 7, lấy 51 điểm. Chứng minh rằng có 3 điểm trong 51 điểm đã cho nằm trong một hình tròn có bán kính bằng 1.

Phân tích.

- Trước hết cần nhắc lại nguyên lý Dirichlet mở rộng.

- Dựa vào câu hỏi của bài toán, xác định xem đối tượng nào trong bài toán được coi là tập hợp "thỏ"? tập hợp "lồng"? Mỗi "lồng" chứa bao nhiêu con thỏ?

- Xác định số "lồng"? $(51-1):(3-1)=25$.

- Tìm cách chia hình vuông cạnh bằng 7 thành 25 "lồng" ?

Giải. Chia hình vuông cạnh bằng 7 thành 25 hình vuông bằng nhau, cạnh của mỗi hình vuông nhỏ bằng $\frac{7}{5}$.

Vì 51 điểm đã cho thuộc 25 hình vuông nhỏ, mà $51 > 2\cdot 25$ nên theo nguyên lý Dirichlet, có một hình vuông có chứa ít nhất 3 điểm $(3 = 2+1)$ trong số 51 điểm đã cho. Hình vuông cạnh bằng $\frac{7}{5}$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}}{2} = \sqrt{\frac{98}{100}} < 1.$$

Vậy bài toán được chứng minh. Hình tròn này chính là hình tròn bán kính bằng 1, chứa hình vuông ta đã chỉ ra ở trên.

Để giải Ví dụ 7 ta cần sử dụng phép xấp xỉ nhằm là tròn số vô tỷ $\sqrt{\frac{98}{100}}$ thành 1, kỹ thuật lấy xấp xỉ rất quan trọng và cần thiết khi tìm lời giải của nhiều bài tập. Đôi khi ta còn lấy xấp xỉ dựa vào hình dạng của các hình trong từng trường hợp cụ thể. Sau đây là một ví dụ điển hình.

Ví dụ 8. Cho 13 điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh một tam giác đều có cạnh bằng $6cm$. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{3}cm$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán trường ĐHSP Hà Nội năm học 2008-2009)

Phân tích.

- Từ câu hỏi của bài toán, em hãy xác định xem đối tượng nào được coi là "thỏ"?

- Có 13 thỏ, muốn nhốt ít nhất hai thỏ vào cùng một lồng thì số lồng nhiều nhất là bao nhiêu? $(13-1):(2-1)=12$.

- Tìm cách chia tam giác đều thành 12 phần mà khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trong mỗi phần không vượt quá $\sqrt{3}cm$.

Giải. Giả sử tam giác đã cho là ABC. Gọi M, N, P là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và G là trọng tâm của tam giác ABC. Lấy A_0, B_0, C_0, X, Y, Z, T, S, R lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng GA, GB, GC, BM, CM, CN, AN, AP, BP. Tam giác ABC được chia thành 12 phần như hình vẽ.

Theo nguyên lí Dirichlet, trong số 13 điểm đã cho tồn tại hai điểm cùng thuộc một phần. Do cạnh của tam giác ABC bằng $6cm$ nên $GA_0 = AA_0 = GB_0 = BB_0 = CC_0 = GC_0 = \sqrt{3}cm$. Do đó, hai điểm nói trên thoả mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ 9. Trong hình vuông có cạnh bằng 4 lấy 33 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có ba điểm nằm trong phần chung của ba hình tròn có cùng bán kính là $\sqrt{2}$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán ĐHSP TP. Hồ Chí Minh năm học 2008-2009)

Giải. Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông đơn vị (các cạnh song song với các cạnh của hình vuông đã cho và có độ dài bằng 1). Do $33 > 16 \cdot 2$ nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 3 điểm nằm trong hoặc trên cạnh của một hình vuông đơn vị. Giả sử đó là ba điểm A, B, C ở trong hoặc nằm trên cạnh của hình vuông đơn vị $MNPQ$.

Ta có $MP = \sqrt{2}$ và với mọi điểm E thuộc hình vuông $MNPQ$ thì $\sqrt{2} = MP \geq AE$. Từ đó hình tròn $(A, \sqrt{2})$ phủ toàn bộ hình vuông $MNPQ$. Tương tự, các hình tròn $(B, \sqrt{2}), (C, \sqrt{2})$ cũng phủ toàn bộ hình vuông $MNPQ$.

Vậy ba hình tròn $(A, \sqrt{2}), (B, \sqrt{2}), (C, \sqrt{2})$ đều chứa hình vuông $MNPQ$ nên ba điểm A, B, C nằm trong phần chung của ba hình tròn nói trên.

Ví dụ 10. Cho hình bình hành $ABCD$, kẻ 17 đường thẳng sao cho mỗi đường thẳng chia $ABCD$ thành hai hình thang có tỉ số diện tích bằng $\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng trong 17 đường thẳng đó có 5 đường thẳng đồng quy.

Phân tích. Chọn tập hợp 17 đường thẳng là tập hợp "thỏ", muốn chứng minh trong 17 đường thẳng đó có 5 đường thẳng đồng quy thì phải tạo ra được tập hợp "lồng" là các điểm đặc biệt trong hình bình hành sao cho số điểm là $(17-1):(5-1)=4$. Căn cứ vào các điều kiện còn lại của bài toán để xác định vị trí các điểm đặc biệt đó?

Giải. Gọi M, Q, N, P lần lượt là các trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $MN//AD//BC; PQ//AB//CD$.

Gọi d là một trong 17 đường thẳng đã cho. Nếu d cắt AB tại E; CD tại F ; PQ tại L thì LP, LQ lần lượt là đường trung bình của các hình thang $AEFD, EBCF$. Ta có :

$S(AEFD)/S(EBCF) = 1/3$ hoặc $S(EBCF)/S(EBFC) = 1/3$ suy ra

$LP/LQ = 1/3$ hoặc là $LQ/LP = 1/3$.

Trên PQ lấy hai điểm L_1, L_2 thỏa mãn điều kiện $L_1P/L_1Q = L_2Q/L_2P = 1/3$ khi đó L trùng với L_1 hoặc L trùng với L_2. Nghĩa là nếu d cắt AB và CD thì d phải qua L_1 hoặc L_2.

Tương tự, trên MN lấy hai điểm K_1, K_2 thỏa mãn điều kiện $K_1M/K_1N = K_2N/K_2M = 1/3$ khi đó nếu d cắt AD và BC thì d phải qua K_1 hoặc K_2.

Tóm lại, mỗi đường thẳng trong số 17 đường thẳng đã cho phải đi qua một trong 4 điểm $L_1; L_2; K_1; K_2$.

Vì $17 > 4\cdot 4$ nên theo nguyên lý Dirichlet, trong 17 đường thẳng đó sẽ có ít nhất 5 đường thẳng $(5 = 4+1)$ cùng đi qua một trong bốn điểm $L_1; L_2; K_1; K_2$ (5 đường thẳng đồng quy, đpcm).

3.4.3 Bài tập vận dụng

Bài tập 1. Trong hình vuông cạnh bằng 1 cho 5 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng trong các điểm đã cho có thể tìm được 2 điểm sao cho khoảng cách giữa chúng không lớn hơn $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 2. Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = 14cm$. Trong hình vuông có đánh dấu 76 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính 2cm chứa trong nó ít nhất 4 điểm trong số các điểm trên.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán ĐH Vinh năm học 2005-2006)

Bài tập 3. Cho một hình vuông có cạnh bằng 10. Bên trong hình vuông ta đánh dấu 201 điểm. Chứng minh rằng luôn tìm đươợc một tam giác mà các đỉnh là điểm đươợc đánh dấu có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{2}$ (nếu 3 điểm đánh dấu thẳng hàng, thì ta coi tam giác với đỉnh là các điểm đó có diện tích bằng 0).

Bài tập 4. Bên trong một hình chữ nhật kích thươớc 3×4 ta đánh dấu 6 điểm. Chứng minh rằng luôn tìm đươợc hai điểm đánh dấu cách nhau một khoảng không lớn hơn $\sqrt{5}$.

Bài tập 5. Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh $AB = 1$. Bên trong tam giác ta đánh dấu 5 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại hai trong 5 điểm đánh dấu cách nhau một khoảng bé hơn $0,5$.

Bài tập 6. Trong mặt phẳng cho tập hợp M gồm 25 điểm có tính chất là với 3 điểm bất kỳ thuộc M tồn tại hai điểm cách nhau một khoảng bé hơn 1. Chứng minh rằng luôn tìm được một đường tròn có bán kính 1 chứa trong nó không ít hơn 13 điểm thuộc M.

Bài tập 7.

Cho 2009 điểm trên mặt phẳng sao cho trong bất kỳ 3 điểm nào cũng có

2 điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng có ít nhất 1005 điểm nằm trong một đường tròn bán kính 1.

Bài tập 8. Bên trong đường tròn (O, R) ta đánh dấu 7 điểm, không có điểm nào trùng với tâm của đường tròn. Chứng minh rằng luôn tìm được hai điểm đánh dấu cách nhau một khoảng nhỏ hơn.

Bài tập 9. Cho một tập hợp gồm 6 điểm nằm trong trong mặt phẳng có tính chất là 3 điểm bất kỳ thuộc tập hợp đó là đỉnh của một tam giác với các cạnh có độ dài khác nhau. Chứng minh rằng cạnh nhỏ nhất của một tam giác là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

Bài tập 10. Cho một tập hợp gồm 9 đường thẳng mà mỗi đường cắt hình vuông thành hai tứ giác có tỷ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 3 trong 9 đường thẳng đó đồng quy.

Bài tập 11. Bên trong một đa giác lồi $2n-$cạnh ta lấy điểm P. Qua mỗi đỉnh của đa giác và P ta kẻ một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh đa giác không có điểm chung với các đường thẳng vừa kẻ.

Bài tập 12. Cho đa giác đều (H) có 14 đỉnh. Chứng minh rằng trong 6 đỉnh bất kì của (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, Tin ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội năm học 2005-2006)

Bài tập 13. Trong hình chữ nhật kích thước 1×2 ta lấy $6n^2 + 1$ điểm (n là số nguyên dương). Chứng minh rằng tồn tại 1 hình tròn với bán kính $\frac{1}{n}$ chứa không ít hơn 4 trong số các điểm đã cho.

3.4.4 Hướng dẫn cách giải

Bài tập 1. Chia hình vuông cạnh bằng 1 thành 4 hình vuông con cạnh $\frac{1}{2}$ như hình vẽ. Có 5 điểm nằm trong 4 hình vuông nên phải có một hình vuông chứa ít nhất 2 trong 5 điểm đã cho. Hai điểm này nằm trong đường tròn có đường kính là đường chéo của hình vuông con chứa nó nên khoảng cách giữa chúng không vượt quá đường kính đường tròn có độ dài $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 2. Chia hình vuông $ABCD$ thành 25 hình vuông nhỏ có cạnh bằng $\frac{14}{5}cm$. Vì $76 : 25 = 3(\mod 1)$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một hình vuông nhỏ $IJKH$ chứa ít nhất 4 điểm trong số 76 điểm đã cho. Gọi O là tâm hình vuông $IJKH$. Ta có $IJ = \frac{14}{5}cm$ nên $IK = \frac{14}{5}\sqrt{2}cm$. Suy ra $OI = \frac{7}{5}\sqrt{2}cm$.

Do đường tròn ngoại tiếp hình vuông $IJHK$ có tâm O bán kính OI chứa tất cả các điểm trong hình vuông $IJKH$ và $\frac{7}{5}\sqrt{2} < 2$ nên đường tròn tâm O bán kính $2cm$ thoả mãn điều kiện đề bài cho.

Bài tập 3. Thỏ là tập hợp 201 điểm, lồng được xác định như sau: Ta chia hình vuông ban đầu thành 100 hình vuông nhỏ bằng các đường thẳng song song với hai cạnh liên tiếp của hình vuông đó.Mỗi hình vuông nhỏ có cạnh bằng 1. Vì các điểm được đánh dấu nằm trong hình vuông bán đầu, nên các điểm đó phải thuộc vào một trong các hình vuông nhỏ. Ta coi 100 hình vuông nhỏ là lồng. Có 201 thỏ được nhốt vào 100 lồng, suy ra có một lồng được nhốt không ít hơn 3 thỏ. Giả sử A, B, C là 3 điểm thuộc hình vuông $MNPQ$ có cạnh $MN = 1$. Ta chứng minh được rằng $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}$.

Bài tập 4. Ta chia hình chữ nhật theo hình vẽ dưới đây và coi tập hợp 5 miền đa giác là "lồng". Mỗi miền đa giác hoặc là một hình thang vuông hoặc là một ngũ giác. Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm trên biên đa giác bằng $\sqrt{5}$.

Bài tập 5. Trước hết ta chứng minh rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ nằm trong tam giác đều không lớn hơn cạnh tam giác. Ta ký hiệu hai điểm K, L nằm trong $\triangle ABC$ đều, khi đó ta có $\angle KAL < 60^o$. Một trong hai góc còn lại của $\triangle AKL$ không nhỏ hơn 60^o, chẳng hạn $\angle ALK \geq 60^o \Rightarrow AK > KL$. Gọi E là giao điểm của AK với cạnh BC, ta có $AE > AK$. Trong $\triangle ABE, \angle AEB > 60^o$ (nó là góc ngoài của $\triangle AEC$), nên $AB > AE$. Kết hợp các kết quả trên ta suy ra điều cần chứng minh.

Nhận xét đó cùng với số $0,5$ đã gợi cho ta tìm một tập hợp các đối tượng hình học khác tập hợp 5 điểm đánh dấu. Ta ký hiệu M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh của $\triangle ABC$. Các đoạn thẳng MN, MP, NP chia tam giác ban đầu thành 4 tam giác đều $\{\triangle AMN, \triangle BMP, \triangle CNP, \triangle MNP\}$ có cạnh bằng $0,5$. Ta coi tập $\{A\}$ gồm 5 điểm là thỏ, tập $\{B\}$ gồm 4 tam giác đều đã liệt kê ở trên là lồng. Theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại một lồng chứa ít nhất hai thỏ. Điều đó có nghĩa là tồn tại ít nhất hai điểm được đánh dấu nằm bên trong hoặc trên cạnh của một trong 4 tam giác đều đã liệt kê. Ta ký hiệu K, L là hai điểm đánh dấu và xét các trương hợp sau:

a) K, L nằm trong $\triangle AMN$.Theo nhận xét đã nêu ở trên $KL < MN = 0,5$.

b) K, L nằm trên đoạn thẳng MN, vì các điểm đó không thể trùng với các điểm M, N do đó $KL < MN$.

Bài tập 6. Giả sử A là điểm thuộc M, ta dựng đường tròn $(A, 1)$. Nếu mọi điểm còn lại của M nằm trong đường tròn đó, thì ta có ngay điều cần chứng minh. Giả sử B là điểm thuộc M nằm ngoài đường tròn đó. Ta xét một điểm C bất kỳ thuộc M khác A, B. Theo giả thiết ta có hoặc $AC < 1$ hoặc $BC < 1$. Ta coi tập hợp 23 điểm thuộc M là thỏ, tập hợp hai đường tròn $(A, 1), (B, 1)$ là lồng. Như vậy 23 thỏ được nhốt vào hai lồng, theo nguyên lý Dirichle tồn tại một lồng chứa 12 thỏ. Nghĩa là tồn tại một đường tròn $(A, 1)$ hoặc $(B, 1)$ chứa trong nó 13 điểm thuộc M.

Bài tập 7. Lấy một điểm bất kỳ trong 2009 điểm đã cho làm tâm vẽ đường tròn bán kính 1, còn lại 2008 điểm trên mặt phẳng.

Theo giả thiết trong 3 điểm bất kỳ có 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1 nên cứ 1 điểm nằm ngoài đường tròn thì có một điểm nằm trong đường tròn. Chẳng hạn, điểm $A \notin (O)$ suy ra $OA > 1$, do đó $B \in (O)$.

Ta có tất cả 1004 cặp điểm nên có ít nhất 1004 điểm thuộc đường tròn tâm O và tính cả tâm nữa là 1005 điểm.

Bài tập 8. Chia đường tròn thành 6 hình quạt có góc ở tâm bằng nhau. Coi tập 7 điểm là thỏ, tập hợp 6 hình quạt là lồng.

Bài tập 9. Ta ký hiệu $\{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$ là tập hợp điểm đã cho. Ta xét một tam giác bất kỳ có đỉnh tại các điểm đó. Vì độ dài các cạnh của cùng một tam giác khác nhau, nên ta sẽ sơn cạnh có độ dài nhỏ nhất bằng màu đỏ. Hai cạnh còn lại ta sơn xanh. Với cách làm như vậy tập hợp các đoạn thẳng A_nA_m nối hai điểm bất kỳ $\{A_n, A_m\}$ thuộc tập hợp điểm đã cho hoặc có mầu đỏ hoặc có màu xanh. Ta cần chứng minh rằng tồn tại một tam giác có cả 3 cạnh màu đỏ. Thật vậy ta xét các đoạn thẳng có chung đầu mút là A_1. Tập hợp các đoạn thẳng đó được coi là thỏ. Tập hợp các màu dùng để sơn các đoạn là lồng. Có 5 thỏ được nhốt vào hai lồng, khi đó tồn tại một lồng chứa ít nhất 3 thỏ. Điều đó có nghĩa là có ít nhất 3 đoạn chung đầu mút A_1 được sơn cùng màu. Gỉa sử có ít nhất 3 đoạn thẳng A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 được sơn đỏ, khi đó $\triangle A_2A_3A_4$ phải có một cạnh màu đỏ, chẳng hạn A_2A_3. Vậy tồn tại một tam giác có 3 cạnh đỏ. Nếu có ít nhất 3 đoạn màu xanh cùng đầu mút là A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 thì $\triangle A_2A_3A_4$ phải có 3 cạnh màu đỏ. Nếu $\triangle A_2A_3A_4$ có cạnh đỏ và giả sử A_2A_3 là cạnh dài nhất của nó, thì nó chính là cạnh nhỏ nhất của một tam giác khác.

Bài tập 10. Ký hiệu $ABCD$ là hình vuông đã cho, $d_n, n = 1, 2, 3, \ldots, 9$ là các đường thẳng cắt hình vuông. MN và PQ là các đường trung bình của hình vuông. Từ điều kiện bài toán ta suy ra mỗi đường thẳng d_n cắt MN hoặc PQ tại một trong các điểm I, J, K, L khác nhau(xem hình dưới đây)

Coi tập hợp các đường thẳng d_n là thỏ , tập hợp điểm $\{I, J, K, L\}$ là lồng.

Bài tập 11. Nếu P thuộc vào một đường chéo của đa giác, chẳng hạn là AB, thì PA, PB là các đường thẳng trùng nhau không cắt được cạnh đa giác. Ta xét P không nằm trên bất kỳ đường chéo nào. Ta đánh số các đỉnh của đa giác $A_1A_2\ldots A_{2n}$ và xét đường chéo A_1A_{n+1} cắt đa giác thành hai phần. Ta coi P là điểm trong của đa giác $A_1A_2\ldots A_{n+1}$. Các đường thẳng $PA_{n+1}, PA_{n+2}, \ldots, PA_{2n}, PA_1$ không thể cắt các cạnh $A_{n+1}A_{n+2}$, $A_{n+2}A_{n+3}$, $A_{n+3}A_{n+4}$, $\ldots$ $A_{2n}A_1$. Số các đường thẳng còn lại là $PA_2, PA_3, \ldots, PA_n$ có thể cắt các cạnh đó. Ta coi lồng là tập hợp các đường thẳng $PA_2, PA_3, \ldots, PA_{n-1}$ và có cả thảy $n-1$ lồng. Thỏ là tập hợp các cạnh $A_{n+1}A_{n+2}, A_{n+2}A_{n+3}, A_{n+3}A_{n+4}, \ldots A_{2n}A_1$. Có cả thảy $n+1$ thỏ. Điều đó có nghĩa là tồn tại hai cạnh cùng bị cắt bởi một đường thẳng. Điều này không thể xảy ra, vì đa giác là lồi.

Bài tập 12. Các đỉnh của đa giác đều (H) chia đường tròn ngoại tiếp nó thành 14 cung bằng nhau, mỗi cung có số đo là $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$. Các dây nối hai đỉnh của (H) chắn các cung nhỏ có số đo là $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, 7\alpha$. Do vậy độ dài các dây chỉ nhận 7 giá trị khác nhau.

Lấy 6 đỉnh của (H) thì số dây nối hai trong 6 đỉnh là: $\dfrac{6\cdot 5}{2} = 15$. Vì 15 dây này có độ dài nhận không quá 7 giá trị khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet phái có 3 dây cùng độ dài. Trong 3 dây đó luôn có hai dây không chung đầu mút. Thật vậy, nếu 2 dây bất kỳ trong 3 dây đó chung đầu mút thì 3 dây đó tạo thành một tam giác đều, suy ra số đỉnh của (H) chia hết cho 3. Điều này vô lý vì (H) có 14 đỉnh (14 không chia hết cho 3).

Dễ thấy, 2 dây bằng nhau của một đường tròn không chung đầu mút thì 4 đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình thang cân. Từ đó suy ra trong 6 đỉnh bất kỳ của (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

Bài tập 13. Chia các cạnh của hình chữ nhật thành n đoạn và $2n$ đoạn bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài là $\dfrac{1}{n}$. Nối các điểm chia bằng các đường thẳng song song với các cạnh của hình chữ nhật ta được $2\times 2n = 2n^2$ hình vuông nhỏ với cạnh là $\frac{1}{n}$.

Vì $(6n^2 + 1) : 2n^2 = 3(\mod 1)$ nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất 4 điểm. Vì hình vuông có cạnh $\frac{1}{n}$ nội tiếp đường tròn bán kính $\frac{\sqrt{2}}{2n}$ và đường tròn này được chứa trong đường tròn đồng tâm bán kính $\frac{1}{n}$ nên ta suy ra tồn tại một hình tròn bán kính $\frac{1}{n}$ chứa không ít hơn 4 trong số các điểm đã cho.

3.4.5 Kết luận

Bằng các phương pháp phân tích, dự đoán, hình thành thuật giải, phân loại bài tập sau nhiều năm liên tục giảng dạy chuyên đề chúng tôi đã thu được một số kết quả sau đây:

Các em học sinh rất hào hứng, tự tin khi sử dụng nguyên lý Dirichlet để giải các bài tập hình học không mẫu mực, niềm vui đó được thay thế bởi thái độ ái ngại mỗi khi gặp bài toán tương tự trước kia khi các em chưa được làm quen với chuyên đề này. Như vậy chuyên đề đã góp phần tích cực hoá hoạt động của học sinh đồng thời nâng cao chất lượng dạy và học của thày và trò.

Chuyên đề góp phần tăng thêm khả năng sáng tạo cho học sinh, qua đó phát triển tư duy Toán học, giúp các em yêu Toán học hơn và ngày càng say mê với bộ môn.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Đặng Huy Ruận, Vũ Đình Hòa, Đặng Hùng Thắng, 2008, *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và toán rời rạc,* NXB Giáo Dục.

3.5 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để tìm giới hạn

Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình

3.5.1 Các tính chất

1. Ký hiệu: Δ là một trong các tập: $[a;b]$, $(a;b)$, $(a;b]$, $[a;b)$, $(-\infty;a)$, $(-\infty;a]$, $(b;+\infty)$, $[b;+\infty)$, $\mathbb{R}$.

2. Định lý 1: Cho $f:\Delta\to\Delta$ là hàm liên tục khi đó:

1. Phương trình $f(x)=x$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $f_n(x)=x$ có nghiệm.

2. Gọi α; β lần lượt là các mút trái, mút phải của Δ biết $\lim\limits_{x\alpha^+}[f(x)-x]$ và $\lim\limits_{x\beta^-}[f(x)-x]$ cùng dương hoặc cùng âm.
   Khi đó phương trình $f(x)=x$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $f_n(x)=x$ có nghiệm duy nhất.
   Trong đó $f_n(x)=\underbrace{f(f(...f(x)...))}_{n \text{ lần}}$.

Chứng minh.

1. (a) Nếu phương trình $f(x)=x$ có nghiệm là x_0 thì x_0 cũng là nghiệm của phương trình $f_n(x)=x$.

   (b) Nếu phương trình $f(x)=x$ vô nghiệm thì $f(x)-x>0$ hoặc $f(x)-x<0$ với mọi $x\in\Delta$, do đó $f_n(x)>x$ hoặc $f_n(x)<x$ với mọi $x\in\Delta$, dẫn đến phương trình $f_n(x)=x$ cũng vô nghiệm.

2. (a) Giả sử phương trình $f(x)=x$ có nghiệm duy nhất là x_0 thì rõ ràng đây cũng là nghiệm của phương trình $f_n(x)=x$. Đặt $F(x)=f(x)-x$, do $F(x)$ là hàm liên tục nên trên các khoảng $(x_0;\beta)$ và $(\alpha;x_0)$ $F(x)$ giữ nguyên một dấu.

+ Nếu $\lim\limits_{x\alpha^+}[f(x)-x]$ và $\lim\limits_{x\beta^-}[f(x)-x]$ cùng dương thì $F(x) > 0$ trong $(x_0;\beta)$ và $(\alpha;x_0) \Rightarrow f(x) > x,\ \forall x \in \Delta\backslash\{x_0\}$.

Xét $x_1 \in \Delta\backslash\{x_0\}$ $\Rightarrow f(x_1) > x_1 \Rightarrow f(f(x_1)) > f(x_1) > x_1 \Rightarrow f_n(x) > x_1$.
$\Rightarrow x_1$ không là nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$.
$\Rightarrow f_n(x) = x$ có nghiệm duy nhất: $x = x_0$.

+ Nếu $\lim\limits_{x\alpha^+}[f(x)-x]$ và $\lim\limits_{x\beta^-}[f(x)-x]$ cùng âm chứng minh tương tự.

(b) Ta thấy mọi nghiệm của phương trình $f(x) = x$ đều là nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$ do đó nếu phương trình $f_n(x) = x$ có nghiệm duy nhất thì phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất.

□

3. Định lý 2: Cho $f : \Delta \to \Delta$ là hàm đồng biến, dãy (x_n) thỏa mãn: $x_{n+1} = f(x_n),\ \forall x \in \mathbb{N}^*$. Khi đó:

1. Nếu $x_1 < x_2$ thì (x_n) là dãy tăng.
2. Nếu $x_1 > x_2$ thì (x_n) là dãy giảm.

Chứng minh. 1. Ta chứng minh $x_n < x_{n+1}$ bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy:
- Với $n = 1$, ta có $x_1 < x_2$, mệnh đề đúng.
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là $u_k < u_{k+1}$, ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, có $f(u_k) < f(u_{k+1})$ (do f là hàm đồng biến) $\Rightarrow u_{k+1} < u_{k+2}$ (đpcm).

2. Chứng minh tương tự.

□

Có thể mở rộng định lý như sau:

Cho $k \in \mathbb{N}^*$ và $f : \Delta \to \Delta$ là hàm đồng biến. Dãy (x_n) thoả mãn: $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq k$, $x_k \in \Delta$. Khi đó:

1. Nếu $x_k < x_{k+1}$ thì $x_n < x_{n+1},\ \forall n \geq k$.

2. Nếu $x_k > x_{k+1}$ thì $x_n > x_{n+1},\ \forall n \geq k$.

4. Định lý 3: Cho $f : \Delta \to \Delta$ là hàm đồng biến, dãy (x_n) thỏa mãn: $x_{n+1} = f(x_n),\ \forall x \in \mathbb{N}^*$. Khi đó:

1. Các dãy (x_{2n}) và (x_{2n+1}) đơn điệu trong đó một dãy tăng và một dãy giảm.

2. Nếu (x_n) bị chặn thì $\exists \alpha = \lim x_{2n}$ và $\exists \beta = \lim x_{2n+1}$.

3. Nếu f là hàm liên tục thì $\alpha,\ \beta$ là nghiệm của phương trình: $f(f(x)) = x$. (1)

   Vì vậy nếu phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì $\alpha = \beta$. Và: $\lim x_n = \alpha = \beta$.

Chứng minh.

1. Vì $f(x)$ là hàm giảm nên hàm $f(f(x))$ đồng biến, áp dụng định lý 2 ta có điều phải chứng minh.

2. Suy ra trực tiếp từ phần a.

3. Ta có $f(f(x_{2n})) = f(x_{2n+1}) = x_{2n+2}$, và

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(f(x_{2n})) = \lim x_{2n+2} = \alpha \\ \lim x_{2n} = \alpha \\ f(x) \text{ là hàm liên tục} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = f(f(\alpha)).$$

   Chứng minh tương tự ta cũng có: $f(f(\beta)) = \beta$.

   Vậy $\alpha,\ \beta$ là nghiệm của phương trình $f(f(x)) = x$.

□

3.5.2 Các ví dụ

Ví dụ 3.9. *Cho dãy số (u_n) như sau:*

$$\begin{cases} u_1 = 2,7 \\ u_{n+1}^3 - 3u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = u_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Giải.

• Ta có:

$$\begin{array}{lll} & u_{n+1}^3 - 3u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = u_n + 1, & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & (u_{n+1} - 1)^3 = u_n, & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n} + 1, & \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}$$

• Do $u_1 = 2,7 > 0$ nên bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n > 1, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$.

• Xét hàm $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$, có $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$ với mọi $x \neq 0$ và $f(x)$ là hàm liên tục, do đó $f(x)$ là hàm đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

• Lại có $u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, và $u_1 = 2,7 > u_2 = \sqrt[3]{2,7} + 1$ nên ta suy ra được (u_n) là dãy giảm mà lại bị chặn dưới tại 1 nên dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Ví dụ 3.10. *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:*

$$\begin{cases} u_1 = 2,9 \\ u_{n+1} = \sqrt{3} + \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 - 1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Giải.

• Xét hàm $f(x) = \sqrt{3} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \ \forall x > 1$, có: $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{(x^2 - 1)^3}} < 0, \ \forall x > 1 \Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

• Ta chứng minh $\sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy:

- Bài toán đúng với $n = 1$.

- Giả sử bài toán đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$.

Ta có $u_k > \sqrt{3}$ và $u_{k+1} = f(u_k)$, mà $f(x)$ là hàm giảm trên $(1; +\infty)$ nên suy ra

$$f(u_k) < f(\sqrt{3}) \Rightarrow u_{k+1} < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Lại có $u_k > \sqrt{3} > 0 \Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{3} + \dfrac{u_k}{\sqrt{u_k^2 - 1}} > \sqrt{3}$

Vậy $\sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Từ đó áp dụng **định lý 3**, ta suy ra được: $\exists a = \lim x_{2n+1}$, $b = \lim x_{2n}$, trong đó a, b là nghiệm của phương trình $f(f(x)) = x$.

• Xét hàm $F(x) = f(f(x)) - x$, với $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, có $F'(x) = f'(x).f'(f(x)) - 1$. Do $\sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{3}{2}} > f(x) > \sqrt{3}$ và $0 > f'(x)$ với mọi $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ nên $F'(x) < 0$ với mọi $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, lại có $F(\sqrt{3}) > 0$, $F\big(\sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\big) < 0$.

$\Rightarrow$ phương trình $F(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là a.

$\Rightarrow \lim u_{2n+1} = \lim u_{2n} = \lim u_n = a$.

Vậy dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 3.11. *Cho số thực a và dãy số (u_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + \sin u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \geq 2. \end{cases}$$

Tìm $\lim u_n$.

Giải.

• Xét hàm $f(x) = x + \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, khi đó với x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ ta có: trong $[x_1; x_2]$ có hữu hạn điểm mà tại đó $f'(x) = 0$, vì vậy $f(x)$ đồng biến trên $[x_1; x_2] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $a = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, dễ dàng chứng minh được bằng qui nạp $u_n = a,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Nếu $k2\pi < a < k2\pi + \pi$ (1) $\quad \Rightarrow \sin a > 0$.

Có $u_{n+1} = f(u_n)$ và $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà $u_1 = a < u_2 = a + \sin a$ nên theo **định lý 2** ta có (u_n) là dãy tăng lại có (u_n) bị chặn trong khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.

$\Rightarrow \exists \lim u_n$ đặt $b = \lim u_n$, ta có b là nghiệm của phương trình: $b = b + \sin b \Leftrightarrow sinb = 0$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow b = \pi + k2\pi$.

• Nếu $k2\pi + \pi < a < (k+1)2\pi$ (2) $\quad \Rightarrow \sin a < 0$.

Có $u_{n+1} = f(u_n)$ và $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà $u_1 = a > u_2 = a + \sin a$ nên theo **định lý 2** ta có (u_n) là dãy giảm lại có (u_n) bị chặn trong khoảng $(\pi + 2k\pi; (k+1)2\pi)$.

$\Rightarrow \exists \lim u_n$, đặt $c = \lim u_n$, ta có c là nghiệm của phương trình: $c = c + \sin c \Leftrightarrow \sin c = 0$.

Kết hợp với (2) ta có $c = \pi + k2\pi$.

Vậy $\lim u_n = \pi + k2\pi$.

Ví dụ 3.12. *Cho dãy số (x_n) như sau:*

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{a},\ a > 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{a - \sqrt{a + x_n}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Giải.

• Bằng quy nạp ta chứng minh được $0 \le x_n \le \sqrt{a},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Xét hàm $f(x) = \sqrt{a - \sqrt{a + x}},\ \forall x \in [0; \sqrt{a}]$ có $x_{n+1} = f(x_n)$ và

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{a - \sqrt{a+x}}\sqrt{a+x}} < 0,\ \forall x \in [0; \sqrt{a}]$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến.

• Áp dụng **định lý 2** ta có dãy (x_n) được tách thành hai dãy con (x_{2n}) và

(x_{2n+1}), trong đó có một dãy tăng và một dãy giảm. Mặt khác ta lại có dãy (x_n) bị chặn suy ra tồn tại $\lim x_{2n} = \alpha$ và $\lim x_{2n+1} = \beta$, trong đó $\alpha,\ \beta$ là nghiệm của phương trình:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a+x}}}} = x$$

Xét hàm $F(x) = \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a+x}}}} - x$, với $x \in [0; \sqrt{a}]$ có

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a+x}}}}\sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a+x}}}\sqrt{a - \sqrt{a+x}}\sqrt{a+x}} - 1.$$

Với $x \in [0; \sqrt{a}]$ ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{a - \sqrt{a+x}}.\sqrt{a+x} \geq \sqrt{a - \sqrt{a+\sqrt{a}}}.\sqrt{a} &> \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a} + \frac{1}{4}}}.\sqrt{a}\\ &= \sqrt{a - \sqrt{a} - \frac{1}{2}}.\sqrt{a} = \sqrt{\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}}.\sqrt{a}\\ &> \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}}.\sqrt{2} > \sqrt{0,12} > 0,3.\end{aligned}$$

Thay vai trò của x bởi $\sqrt{a - \sqrt{a+x}}$ chứng minh tương tự ta có

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a+x}}}}\sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a+x}}} > 0,3.$$

$\Rightarrow F'(x) < -0,9 < 0 \Rightarrow F(x)$ là hàm nghịch biến, lại có $F(0) > 0,\ F(\sqrt{a}) < 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình $F(x) - x = 0$ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow \alpha = \beta$.

$\Rightarrow \lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = \lim x_n$.

Vậy có $\lim x_n = T$ với T thoả mãn $f(f(T)) = T$.

6. Bài tập:

Bài toán 3.1. *Cho dãy số (x_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n^2 - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn.

- Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $-1 < x_n < 0,\ \forall n \geq 2$.

- Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 1$ trên đoạn $[-1; 0]$. Ta có $x_{n+1} = f(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hàm số $f(x)$ giảm trên $[-1; 0]$, do đó các dãy con $(x_{2n}),\ (x_{2n+1})$ đơn điệu (bắt đầu từ x_2).

- Vậy tồn tại các giới hạn $\lim x_{2n} = a$, $\lim x_{2n+1} = b$, và $a, b \in [-1; 0]$, a, b là nghiệm của phương trình $f(x) = x$. Ta thấy, trong đoạn $[-1; 0]$, phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x = 1 - \sqrt{3}$.

$\Rightarrow \lim x_n = 1 - \sqrt{3}$.

Bài toán 3.2. *Cho dãy số (u_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tìm $\lim(u_n)$.

Hướng dẫn.

- Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $0 < u_n < 1,\ \forall n \geq 2$.

- Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 1]$. Ta có $u_{n+1} = f(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0\ \forall x \in [0; 1].$$

Hàm số $f(x)$ giảm trên $[0; 1]$, do đó các dãy con $(u_{2n}),\ (u_{2n+1})$ đơn điệu.

- Vậy tồn tại các giới hạn $\lim u_{2n} = a$, $\lim u_{2n+1} = b$, và $a, b \in [0; 1]$, a, b là nghiệm của phương trình $f(f(x)) = x$. Ta thấy trong đoạn $[0; 1]$, phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$\Rightarrow \lim u_n = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 3.3. *Cho dãy số (u_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases} u_1 = a, \ a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cos u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ.

Hướng dẫn.

- Dễ thấy $u_n \in (0; 1), \ \forall n \geq 3$.

- Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x$ trên khoảng $(0; 1)$, ta có $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \geq 3$. Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\sin x < 0$ trên khoảng $(0; 1)$, do đó các dãy con (u_{2n}), (u_{2n+1}) đơn điệu, bắt đầu từ u_3. Mà (u_n) bị chặn, do đó tồn tại các giới hạn $\lim u_{2n} = a$, $\lim u_{2n+1} = b$, với $a, b \in [0; 1]$, và a, b là nghiệm của phương trình $f(x) = x$. Ta thấy trong đoạn $[0; 1]$, phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất.

- Vậy dãy (u_n) hội tụ.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu (2002)). Các bài toán chọn lọc về lượng giác, NXB Giáo dục.

3.6 Phương pháp lượng giác và áp dụng

Tổ Toán, Trường THPT Chuyên Lào Cai

Lượng giác là phần kiến thức quan trọng trong chương trình toán THPT, ngoài những bài toán liên quan trực tiếp đến lượng giác, như biến đổi lượng giác, hệ thức lượng giác trong tam giác, tứ giác, phương trình lượng giác, tích phân của các hàm số lượng giác,..., thì một lượng không nhỏ các bài toán lại được chuyển về làm việc với đối tượng là lượng giác thông qua các phép đặt lượng giác. Trong bài viết nay ta sẽ áp phương pháp lượng giác vào giải quyết một số dạng toán cơ bản là các bài toán về phương trình, hệ phương trình, các bài toán chứng minh bất đẳng thức và một số bài toán liên quan đến dãy số.

3.6.1 Các kết quả cơ bản

Một số đẳng thức lượng giác

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

2) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

3) $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}, \forall x \neq k\pi$

4) $\cot x + \dfrac{1}{\sin x} = \cot \dfrac{x}{2}, \forall x \neq k\pi$

5) Với $\alpha; \beta; \gamma \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma \Longleftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = n\pi (n \in \mathbb{Z})$$

6) Với $\alpha; \beta; \gamma \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\tan\alpha.\tan\beta + \tan\beta.\tan\gamma + \tan\gamma.\tan\alpha = 1 \Longleftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + n\pi (n \in \mathbb{Z})$$

Một số phép đặt lượng giác

7) Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì, đặt $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

8) Nếu $x^2+y^2=a^2$ thì, đặt $\begin{cases} x=a\sin t \\ y=a\cos t \end{cases}$

9) Nếu $x^2+y^2+z^2=1$ thì, đặt $\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi.\cos\theta \\ z=\sin\varphi.\sin\theta \end{cases}$

10) Nếu $x^2+y^2+z^2=a^2$ thì, đặt $\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\sin\varphi.\cos\theta \\ z=a\sin\varphi.\sin\theta \end{cases}$

11) Trong mọi trường hợp ta đều có thể lượng giác hóa theo hàm $\tan x$ hoặc $\cot x$

3.6.2 Áp dụng trong giải phương trình, hệ phương trình

Ví dụ 3.13. *Giải phương trình:* $x=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}$

Giải. Điều kiện: $0<x\le 2$.
Đặt $x=2.\cos t$, điều kiện: $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}(*)$. Khi đó phương trình trở thành:

$2\cos t=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2(1+\cos t)}}}$

$\Longleftrightarrow 2\cos t=\sqrt{2+\sqrt{2(1-\cos\dfrac{t}{2})}}$

$\Longleftrightarrow 2\cos t=\sqrt{2+2\sin\dfrac{t}{4}}$

$\Longleftrightarrow 2\cos t=\sqrt{2}(\sin\dfrac{t}{8}+\cos\dfrac{t}{8})$

$\Longleftrightarrow \sin(\dfrac{\pi}{2}-t)=\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{t}{8})(**)$

Giải phương trình (**) và kết hợp với điều kiện (*), ta nhận được 2 giá trị của t thỏa mãn là: $t_1=\dfrac{2\pi}{9};t_2=-\dfrac{2\pi}{7}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$ và $x=2\cos\dfrac{2\pi}{7}$.

Ví dụ 3.14. *Cho (x;y;z) là nghiệm của hệ phương trình:* $\begin{cases} x=y(4-y) \\ y=z(4-z) \\ z=x(4-x) \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị mà tổng $S=x+y+z$ có thể nhận được.

Giải.

Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Cộng vế với vế tương ứng các phương trình của hệ, ta nhận được:
$3S = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0 \Longrightarrow S \geq 0$. Vì $S \geq 0$ nên trong 3 số x, y, z phải có ít nhất một số không âm, không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq 0$, từ phương trình (1) của hệ ta suy ra $0 \leq x \leq 4$. Bằng phép hoán vị vòng quanh ta có: $0 \leq x, y, z \leq 4$. Đặt $x = 4\sin^2\alpha$, với $0 \leq \alpha \leq \pi$. Khi đó từ PT(3) suy ra: $z = 4.\sin^2 2\alpha$, thay vào PT(2), suy ra: $y = 4.\sin^2 4\alpha$, thay trở lại phương trình đầu, ta nhận được $x = 4.\sin^2 8\alpha$.
Như vậy α là nghiệm của phương trình: $\sin^2 8\alpha = \sin^2\alpha \Longleftrightarrow \cos 16\alpha = \cos 2\alpha$ $\Longleftrightarrow \alpha = \dfrac{k\pi}{7}; \alpha = \dfrac{k\pi}{9} (k \in \mathbb{Z})$
Trường hợp 1: $\alpha = \dfrac{k\pi}{7}$ vì $0 \leq \alpha \leq \pi$, nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, tuy nhiên với $k \in \{4; 5; 6; 7\}$ hay $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ đều cho cùng một giá trị của x, y, z.
*) Với $k = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \Longrightarrow S = 0$
*) Với $k \in \{1; 2; 3\}$ thì S có cùng một giá trị bằng: $S = 4\sin^2\dfrac{\pi}{7} + 4\sin^2\dfrac{2\pi}{7} + 4\sin^2\dfrac{3\pi}{7} = 7$
Trường hợp 2: $\alpha = \dfrac{k\pi}{9}$ vì $0 \leq \alpha \leq \pi$, nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
*) Với $k = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \Longrightarrow S = 0$.
*) Với $k \in \{1; 2; 4\}$ thì S có cùng một giá trị bằng: $S = 4\sin^2\dfrac{\pi}{9} + 4\sin^2\dfrac{2\pi}{9} + 4\sin^2\dfrac{4\pi}{7} = 6$.
*) Với $k = 3$ thì $S = 4\sin^2\dfrac{\pi}{3} + 4$

$\sin^2\dfrac{2\pi}{3} + 4\sin^2\dfrac{4\pi}{3} = 9$.
Kết luận: $S \in \{0; 6; 7; 9\}$.

Ví dụ 3.15. *Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn*

$$x^6+y^6+z^6-6(x^4+y^4+z^4)+10(x^2+y^2+z^2)-2(x^3y+y^3z+z^3x)+6(xy+yz+zx)=0$$

Giải. Biến đổi vế trái thành: $P=(x^3-3x-y)^2+(y^3-3y-z)^2+(z^3-3z-x)^2$

Do đó $P=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y=x^3-3x \\ x=z^3-3z(*) \\ z=y^3-3y \end{cases}$

*) Nếu $x>2$ thì $y=x(x^2-3)>2 \Longrightarrow z=y(y^2-3)>2$. Từ đó cộng theo vế ba phương trình của hệ (*) ta có:

$0=x^3+y^3+z^3-4x-4y-4z=x(x^2-4)+y(y^2-4)+z(z^2-4)>0$ (Vô lý).

*) Lập luận hoàn toàn tương tự với $x<-2$, ta cũng có mâu thuẫn. Vậy $|x|\le 2$

Đặt $x=2\cos t, 0\le t\le\pi$, suy ra: $\begin{cases} y=2(4\cos^3 t-3\cos t)=2.\cos 3t \\ x=2(4\cos^3 3t-3\cos 3t)=2.\cos 9t \\ z=2(4\cos^3 9t-3\cos 9t)=2.\cos 27t \end{cases}$

Dẫn đến, $\cos t=\cos 27t \Longleftrightarrow t=\dfrac{k\pi}{13}(k=0,1,2,...,13); t=\dfrac{l\pi}{14}(l=0,1,2,...,14)$

Ngược lại, dễ dàng kiểm tra được rằng, nếu $\cos t=\cos 27t$ thì bộ

$(x;y;z)=(2\cos t;2\cos 3t;2\cos 9t)$, thỏa mãn hệ (*). Thành thử các bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn đề bài là: $(2\cos t;2\cos 3t;2\cos 9t)$, với $t=\dfrac{k\pi}{13}(k=0,1,2,...,13)$ hoặc $t=\dfrac{l\pi}{14}(l=0,1,2,...,14)$.

3.6.3 Áp dụng trong chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 3.16. *Xét các số thực dương a, b, c, thỏa mãn điều kiện $abc+a+c=b$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}\le\frac{10}{3}$$

Giải. Đặt $P=\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{2}{b^2+1}+\dfrac{3}{c^2+1}$

Ta có $abc+a+c=b \Longleftrightarrow a+c=b(1-ac)$

Nếu $ac=1$ thì $a+c=0$ (vô lý), do $a,b>0$. Vậy $ac\ne 1$ Viết lại điều kiện đã cho dưới dạng: $b = \dfrac{a+c}{1-ac}$, điều này gợi ý cho ta đến phép đặt: $\begin{cases} a = \tan A \\ b = \tan B \\ c = \tan C \end{cases}$

Do $a, b, c > 0$, nên tồn tại $A, B, C \in (0; \dfrac{\pi}{2})$, thỏa mãn $\tan B = \dfrac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A.\tan C}$

Từ đây ta nhận được mối liên hệ giữa A, B, C là: $A + B + C = \pi$. Khi đó ta biến đổi

$P = 2.\cos^2 A - 2\cos^2(A + C) + 3.\cos^2 C = \cos 2A - \cos(2A + 2C) + 3\cos^2 C$

$= 2\sin(2A + C).\sin C + 3\cos^2 C \leq 2\sin C + 3\cos^2 C = 2\sin C + 3 - 3.\sin^2 C$

$= \dfrac{10}{3} - 3(\sin C - \dfrac{1}{3})^2 \leq \dfrac{10}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin C = \dfrac{1}{3} \\ \sin(2A + C) = 1 \end{cases}$

Khi đó, $(a; b; c) = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{4})$

Ví dụ 3.17. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $Q = \dfrac{a}{a+bc} + \dfrac{b}{b+ca} + \dfrac{\sqrt{abc}}{c+ab}$. *Với* $a, b, c > 0$ *và thỏa mãn điều kiện* $a + b + c = 1$

Giải.

Viết Q dưới dạng: $Q = \dfrac{1}{1+\dfrac{bc}{a}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{ca}{b}} + \dfrac{\sqrt{\dfrac{ab}{c}}}{1+\dfrac{ab}{c}}$

Từ giả thiết: $a + b + c = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{\dfrac{ab}{c}}\sqrt{\dfrac{ca}{b}} + \sqrt{\dfrac{ab}{c}}\sqrt{\dfrac{bc}{a}} + \sqrt{\dfrac{bc}{a}}\sqrt{\dfrac{ca}{b}} = 1(*)$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{bc}{a}} = \tan\dfrac{A}{2} \\ \sqrt{\dfrac{ac}{b}} = \tan\dfrac{B}{2}; (A, B, C \in (0; \pi)) \\ \sqrt{\dfrac{ab}{c}} = \tan\dfrac{C}{2} \end{cases}$

Từ (*), ta có: $A + B + C = \pi$. Vậy A, B, C là 3 góc của một tam giác.

Khi đó, $Q = \dfrac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{1+\tan^2\dfrac{B}{2}} + \dfrac{\tan\dfrac{C}{2}}{1+\tan^2\dfrac{C}{2}} = \cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \dfrac{\sin C}{2}$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \sin C)$.

Mặt khác, ta có: $\cos A + \cos B + \sin C + \sin\frac{\pi}{3} \leq 2.\cos\frac{A+B}{2} + 2\cos\frac{C - \frac{\pi}{3}}{2}$
$\leq 4.\cos\frac{A+B+C-\frac{\pi}{3}}{4} = 4.\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$.

Suy ra: $Q \leq 1 + \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = 1 \\ \sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} = 1 \\ \frac{A+B}{2} = \frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = b = 2\sqrt{3} - 3 \\ c = 7 - 4\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy $MaxQ = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$, đạt được $\Longleftrightarrow \begin{cases} a = b = 2\sqrt{3} - 3 \\ c = 7 - 4\sqrt{3} \end{cases}$

Ví dụ 3.18. *Các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện*
$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 - 16xyz}{4}(*)$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$S = \frac{x + y + z + 4xyz}{1 + 4xy + 4yz + 4zx}$$

Giải. Từ giả thiết suy ra $0 < 2x < 1, 0 < 2y < 1, 0 < 2z < 1$. Đặt $2x = a = \cos A; 2y = b = \cos B; 2z = c, A, B \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó, điều kiện (*) trở thành:
$\cos^2 A + \cos^2 B + c^2 + 2c\cos A\cos B = 1$

$\Longleftrightarrow (c + \cos A\cos B)^2 - (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) = 0$

$\Longleftrightarrow (c + \cos A\cos B)^2 - \sin^2 A\sin^2 B = 0$

$\Longleftrightarrow [c + \cos(A + B)][c + \cos(A - B) = 0]$

$\Longleftrightarrow c = -\cos(A + B)$, vì $(\cos(A - B) > 0)$

$\Longleftrightarrow c = \cos C$, trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. Mặt khác $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$, suy ra $\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} \leq \frac{1}{27}$.

$\Longleftrightarrow \cos^2\dfrac{A}{2}\cos^2\dfrac{B}{2}\cos^2\dfrac{C}{2} \geq 27.\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}$

$\Longleftrightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq 27(1-a)(1-b)(1-c)$

$\Longleftrightarrow 28(a+b+c+abc) \geq 26(1+ab+bc+ca)$

$\Longleftrightarrow 28(x+y+z+4xyz) \geq 13(1+4xy+4yz+4zx)$

Suy ra $S \geq \dfrac{13}{28}$. Vậy $minS = \dfrac{13}{28}$. Đạt được khi $x = y = z = \dfrac{1}{4}$

3.6.4 Dãy số và giới hạn

Trước hết ta xét ví dụ quen thuộc sau đây.

Ví dụ 3.19. *Chứng minh rằng:*

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ dấu căn}} + \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ dấu căn}} = 2\sqrt{2}.\cos\frac{2^{n-1}-1}{2^{n+1}}\pi$$

Giải.

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n-dấu căn}} + \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n-dấu căn}} = 2\sqrt{2}.\cos\frac{2^{n-1}-1}{2^{n+1}}\pi$$

$\Longleftrightarrow$

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n-dấu căn}} + \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n-dấu căn}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} + 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Ta có các kết quả:

$i)\ \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n-dấu căn}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}},\ \forall n \in N^*$

$ii)\ \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n-dấu căn}} = 2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}},\ \forall n \in N^*$

Hai kết quả trên được chứng minh bằng phương pháp qui nạp

Chứng minh (i).

*) Với $n = 1$ thì (i) trở thành: $\sqrt{2} = 2.\cos\dfrac{\pi}{4}$ (luôn đúng).

*) Giả sử (i) đúng với $n = k (k > 1, k \in N^*)$, ta có

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{k dấu căn}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

*) Xét

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{k+1 dấu căn}} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{k dấu căn}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

$=2|\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}|$, với $0 < \dfrac{\pi}{2^{k+2}} < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow |\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}| = \cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$

Vậy $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{k+1 dấu căn}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$, ta có$(i)$ đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý qui nạp thì (i) đúng. Chứng minh tương tự ta có (ii). Từ đây ta nhận được đpcm.

Ví dụ 3.20. *Cho dãy số x_n thỏa mãn điều kiện* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(x_n + \sqrt{x_n^2 + \dfrac{1}{4^n}}\Big) \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số có giới hạn, tìm giới hạn đó?

Giải. Ta có: $x_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\cot\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{2^2}$, suy ra $x_2 = \dfrac{1}{2}\Big(x_1 + \sqrt{x_1^2 + \dfrac{1}{4}}\Big) = \dfrac{1}{2^2}\cot\dfrac{\pi}{2^3}$

Dự đoán, số hạng tổng quát $x_n = \dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*(*)$. Ta dễ dàng kiểm tra lại khẳng định $(*)$ bằng phương pháp qui nạp toán học. Vậy $x_n = \dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

Do đó $\lim x_n = \lim\dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{2}{\pi}\lim\dfrac{\pi}{2^{n+1}}.\dfrac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \dfrac{2}{\pi}$

Ví dụ 3.21. *Cho dãy số x_n, được xác định bởi:* $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2x_n}{x_n+1}}, n = 2, 3, ... \end{cases}$

Tìm lim $\prod_{i=1}^{n} x_i$.

Giải. Ta có: $x_1 = \sqrt{2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^2}}; x_2 = \sqrt{\dfrac{2x_1}{x_1+1}} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^3}}$.

Bằng qui nạp ta chứng minh được: $x_k = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}$. Từ đó, $\prod_{i=1}^{n} x_i = 2^n.\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

Suy ra: $lim \prod_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{\pi}{2}$.

Chú ý 3.1. *Qua các ví dụ trên ta thấy, việc đưa ra công thức số hạng tổng quát của dãy số, hoàn toàn phụ thuộc vào việc biến đổi và đánh dấu (coi) số hạng ban đầu x_1 là giá trị lượng giác của một góc đặc biệt, sau đó dựa vào các phép biến đổi lượng giác, ta dự đoán được qui luật xác định của số hạng tổng quát, cuối cùng là chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp qui nạp, các bài toán về giới hạn của dãy cũng từ đó được giải quyết. ở một số bài toán việc chỉ ra các liên hệ là không hề đơn giản, ta xét tiếp các ví dụ sau.*

Ví dụ 3.22. *Cho dãy số (x_n) được xác định:* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3}-2)x_n}; n = 2, 3, ... \end{cases}$

Chứng minh rằng: $x_{12n+2} = 1$

Giải. Ta có: $\tan\dfrac{\pi}{12} = \tan(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 2 - \sqrt{3}$.

Viết lại x_{n+1}, dưới dạng: $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \tan\dfrac{\pi}{12}}{1 - \tan\dfrac{\pi}{12}x_n}$. Lại có $x_1 = \tan\dfrac{\pi}{6}$, suy ra: $x_2 = \tan(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{12})$ và $x_3 = \tan(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{12}) = \tan(\dfrac{\pi}{6} + 2\dfrac{\pi}{12})$

Dự đoán: $x_n = \tan[\dfrac{\pi}{6} + (n-1)\dfrac{\pi}{12})]$. Kết quả này được chứng minh bằng qui nạp toán học. Vậy, ta có số hạng tổng quát: $x_n = \tan[\dfrac{\pi}{6} + (n-1)\dfrac{\pi}{12})]$.
Khi đó: $x_{12n+2} = \tan(\dfrac{\pi}{6} + (12n+1)\dfrac{\pi}{12}) = \tan(\dfrac{\pi}{6} + n\pi + \dfrac{\pi}{12}) = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ (đpcm)

Ví dụ 3.23. *Cho hai dãy số dương* $(x_n);(y_n), n=1,2,...,$ *được xác định:*

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1}, n = 1,2,3,... \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{-4x_{n+1}^2 + 1} \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy (x_n) *và* (y_n)*?*

Giải. Trước hết ta chứng minh bằng qui nạp rằng: $x_n^2 + y_n^2 = 1 (1), \forall n \in N^*$.

Thật vậy:

Với $n = 1$ thì $x_1^2 + y_1^2 = 1$, hệ thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là $x_k^2 + y_k^2 = 1$. Ta đi chứng minh (1), còn đúng với $n = k+1$.

Ta có: $1 = x_k^2 + y_k^2 = [x_{k+1}(4y_{k+1}^2 - 1)]^2 + [y_{k+1}(4x_{k+1}^2 - 1)]^2$

$\iff x_{k+1}^2(16y_{k+1}^4 - 8y_{k+1}^2 + 1) + y_{k+1}^2(16x_{k+1}^4 - 8x_{k+1}^2 + 1) - 1 = 0$

$\iff (x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 - 1) + (16x_{k+1}^2 y_{k+1}^4 - 16x_{k+1}^2 y_{k+1}^2 + 16x_{k+1}^4 y_{k+1}^2) = 0$

$\iff (x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 - 1)(16x_{k+1}^2 y_{k+1}^2 + 1) = 0$

$\iff x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = 1$. Vậy (1) đúng với $n = k+1$. Vậy $x_n^2 + y_n^2 = 1 (1), \forall n \in N^*$.

Đặt $x_n = \sin\alpha_n; y_n = \cos\alpha_n$, từ hệ thức truy hồi $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{-4x_{n+1}^2 + 1}$, ta có:

$\cos\alpha_{n+1} = \dfrac{\cos\alpha_n}{-4\sin\alpha_{n+1}^2 + 1}$

$\Longrightarrow \cos\alpha_{n+1}(1 - 4\sin\alpha_{n+1}^2) = \cos\alpha_n$

$\iff \cos\alpha_{n+1}(4\cos\alpha_{n+1}^2 - 3) = \cos\alpha_n$

$\iff \cos 3\alpha_{n+1} = \cos\alpha_n \Longrightarrow 3\alpha_{n+1} = \alpha_n$, do $\alpha_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Từ đây, suy ra: $\alpha_n = \dfrac{\alpha_1}{3^{n-1}}$, mặt khác $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \sin\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow \alpha_n = \dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}$. Vậy $x_n = \sin\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}; y_n = \cos\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}$

Suy ra: $\lim x_n = \lim\sin\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}} = \sin(\lim\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}) = 0$

$\lim y_n = \lim\cos\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}} = \cos(\lim\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}) = 1$

Bài tập

Bài toán 3.4. *Giải phương trình:*

a) $4x^3 + 2\sqrt{1-x^2} - 3x - 1 = 0$

b) $x + \dfrac{3x}{\sqrt{25x^2-9}} = \dfrac{7}{4}$

Bài toán 3.5. *Giải các hệ phương trình:*

a) $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 - 3x = y(3x^2-1) \\ y^3 - 3y = z(3y^2-1) \\ z^3 - 3z = x(3z^2-1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x + \dfrac{1}{x}) = 4(y + \dfrac{1}{y}) = 5(z + \dfrac{1}{z}) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

Bài toán 3.6. *Tìm nghiệm* x, y, z, t *của hệ:* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z^2 + t^2 = 16 \\ xt + yz \geq 12 \end{cases}$ *sao cho biểu thức* $A = x + z$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Bài toán 3.7. *Cho* $x, y, z > 0$ *và thỏa mãn điều kiện* $x + y + z = 1$*. Chứng minh rằng:* $\sqrt{\dfrac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\dfrac{yz}{x+yz}} + \sqrt{\dfrac{zx}{y+zx}} \leq \dfrac{3}{2}$

Bài toán 3.8. *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$*, thỏa mãn điều kiện* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$*. Chứng minh rằng:* $2xy + yz + zx \leq \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Bài toán 3.9. *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$*, thỏa mãn điều kiện* $x^2y^2 + 2yx^2 + 1 = 0$*. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$f(x, y) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + y(y + \frac{1}{x} + 2)$$

Bài toán 3.10. *Cho dãy số* (a_n) *được xác định bởi:* $\begin{cases} a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tìm số hạng tổng quát của a_n

Bài toán 3.11. *Cho dãy: :* $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
Tìm số hạng tổng quát của a_n

Bài toán 3.12. *Cho dãy số* (a_n) *được xác định bởi:* $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n + 1}} \end{cases}$

Tìm $\lim \prod_{i=1}^{n} a_i$

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo dục 2008.

2. Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề chọn lọc dãy số và áp dụng*, NXB Giáo dục 2008.

3. Kỷ yếu hội nghị khoa học các chuyên đề toán học trong hệ THPT chuyên 2005.

4. Kỷ yếu toán học trại hè Hùng Vương.

5. Các wedsite toán học http://www.mathscope.org, http://www.mathlinks.ro

6. Tạp trí toán học và tuổi trẻ.

3.7 Ứng dụng phép khử và định lí Viét vào hình học phẳng

Nguyễn Quang Hợp, Trường THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành

3.7.1 Phép khử

Cho đa thức $f(x)$ có bậc m. Giả sử $f(x)$ có các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Ta xét hàm hữu tỉ $y = \dfrac{P(x)}{Qx}$, ở đó $P(x), Q(x)$ là những đa thức.
Chúng ta sẽ tìm:

1) Đa thức bậc m nhận $y_i = \dfrac{P(x_i)}{Q(x_i)}, i = 1, 2, \ldots, m$ làm nghiệm.

2) Quan hệ giữa các y_i qua các hệ số của $f(x)$.

Việc tìm phương trình đa thức với các hệ số tính qua các hệ số của $f(x)$ nhận $y_1, y_2, \ldots, y_m$ làm nghiệm tương đương với việc khử x từ hệ sau.

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ y = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \end{cases}$$

Suy ra phương trình đa thức $g(y) = 0$ cần tìm.

3.7.2 Định lí Viét

Giả sử đa thức bậc m : $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, (a_m \neq 0)$ có m nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_m = -\dfrac{a_{m-1}}{a_m} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{m-1}x_m = \dfrac{a_{m-2}}{a_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\cdots x_m = (-1)^m \dfrac{a_0}{a_m} \end{cases}$$

3.7.3 Ứng dụng

Ta thường sử dụng những kết quả sau đây:

(a) Nếu đa thức $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$ có ba nghiệm không âm x_1, x_2, x_3 thì

$$\frac{a}{3} \geq \sqrt{\frac{b}{3}} \geq \sqrt[3]{c}$$

Chứng minh.

Vì x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của (1) nên theo định lí Viét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 = b \\ x_1x_2x_3 = c \end{cases}$$

Mà $x_i \geq 0(i = 1, 2, 3)$ nên

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \left(\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

Vậy $\frac{a}{3} \geq \sqrt{\frac{b}{3}} \geq \sqrt[3]{c}$.

(b) Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c các bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp lần lượt là R, r và các bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_a, r_b, r_c.

Đặt $2_p = a + b + c$. Khi đó

b1) a, b, c là ba nghiệm của phương trình:

$$x^3 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x 4Rrp = 0 \tag{1}$$

b2) r_a, r_b, r_c là ba nghiệm của phương trình:

$$x^3 (4R + r)x^2 + p^2 x p^2 r = 0 \tag{2}$$

Chứng minh.

b1) Ta có: $\sin a = \dfrac{2\tan\dfrac{A}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{A}{2}} \Leftrightarrow \dfrac{a}{2R} = \dfrac{2\dfrac{r}{p-a}}{1 + \dfrac{r^2}{(p-a)^2}}$

$$a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)a - 4pRr = 0.$$

Điều này chứng tỏ a là nghiệm của phương trình $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ (1). Tương tự b, c cũng là nghiệm của (1).

Cách 2: Ta chứng minh $\begin{cases} a + b + c = 2p \\ ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr \\ abc = 4pRr \end{cases}$ Từ đây suy ra a, b, c là nghiệm của (1) - theo định lí Viét đảo.

b2) Ta sẽ chứng minh

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

$$r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2$$

$$r_ar_br_c = p^2r$$

Khi đó r_a, r_b, r_c là ba nghiệm của phương trình (2).
Thật vậy: $r_a + r_b + r_c = p(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{2}[(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}) + (\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}) + (\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2})]\\
&= \frac{p}{2}\Big[\frac{\sin(\frac{A+B}{2})}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin(\frac{B+C}{2})}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin(\frac{C+A}{2})}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\Big]\\
&= \frac{p}{2}\frac{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\
&= p\frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\
&= p\frac{4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin A + \sin B + \sin C}\\
&= R(4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})\\
&= 4R + r.
\end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned}
r &= (p-a)\tan\frac{A}{2} = \frac{b+c-a}{2}\tan\frac{A}{2} = R[\sin B + \sin C - \sin A]\tan\frac{A}{2}\\
&= R[2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}]\tan\frac{A}{2}\\
&= 2R\cos\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}[\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}]\\
&= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

+) $r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}) = p^2$
+) Từ $S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Ta có $S^3 = (p-a)(p-b)(p-c)r_ar_br_c = pr.p(p-a)(p-b)(p-c)$

Do đó $r_ar_br_c = p^2r$

Ví dụ 1. Trong tam giác ABC.

Đặt $U = \dfrac{r_a+r}{r_a-r} + \dfrac{r_b+r}{r_b-r} + \dfrac{r_c+r}{r_c-r}, V = \dfrac{r_a+r}{r_a-r} \cdot \dfrac{r_b+r}{r_b-r} \cdot \dfrac{r_c+r}{r_c-r}$.

Chứng minh rằng $VU = 2$ và $U + V = \dfrac{p^2+r^2}{Rr}$.

Lời giải.

Sử dụng kết quả: r_a, r_b, r_c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \tag{2}$$

Ta tìm phương trình bậc 3 nhận $y_a = \dfrac{r_a+r}{r_a-r}, y_b = \dfrac{r_b+r}{r_b-r}, y_c = \dfrac{r_c+r}{r_c-r}$ là nghiệm. Xét $y = \dfrac{x+r}{x-r}$ hay $x = r\dfrac{y+1}{y-1}$.

Khử x từ hệ $\begin{cases} x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x = r\dfrac{y+1}{y-1} \end{cases}$ ta được phương trình

$$2Rry^3 - (p^2+r^2-2Rr)y^2 + 2(p^2-r^2-Rr)y - (p^2+r^2+2Rr) = 0$$

Rõ ràng phương trình này nhận y_a, y_b, y_c là nghiệm. Khi đó theo định lí Viét ta có $U = \dfrac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}, V = \dfrac{p^2+r^2+2Rr}{2Rr}$.

Do đó $VU = 2$ và $U + V = \dfrac{p^2+r^2}{Rr}$

Ví dụ 2.

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có

$$(r_b^2 + r_br_c + r_c^2)(r_c^2 + r_cr_a + r_a^2)(r_a^2 + r_ar_b + r_b^2)$$

$$= -(\frac{r_ar_br_c}{r})^3 + (\frac{r_ar_br_c}{r})^2(r_a+r_b+r_c)^2 - r_ar_br_c(r_a+r_b+r_c)^3.$$

Lời giải.

Ta tìm phương trình bậc 3 nhận $y_a = r_b^2 + r_br_c + r_c^2, y_b = r_c^2 + r_cr_a + r_a^2, y_c = r_a^2 + r_ar_b + r_b$ làm nghiệm.

Ta có $y_a = (r_b + r_c)^2 r_b r_c = (4R + rr_a)^2 - \dfrac{p^2 r}{r_a}$. Khử x từ hệ

$$\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2 x - p^2 r = 0 \\ yx = x(4R + r - x)^2 - p^2 r \end{cases}$$

Ta có $x = 4R + r - \dfrac{y + p^2}{4R + r}$. Đặt $T = 4R + r$, ta được phương trình

$$y^3 - (2T^2 - 3p^3)y^2 + (3p^4 - 3p^2T^2 + T^4)y - p^4T^2 + p^6 + p^2T^3r = 0$$

nhận y_a, y_b, y_c là nghiệm.

Vậy $y_a y_b y_c = p^4T^2 - p^6 - p^2T^3 r$.

Thay $T = 4R + r = r_a + r_b + r_c, p^2 = \dfrac{r_a r_b r_c}{r}$ ta được

$$(r_b^2 + r_b r_c + r_c^2)(r_c^2 + r_c r_a + r_a^2)(r_a^2 + r_a r_b + r_b^2)$$

$$= -(\frac{r_a r_b r_c}{r})^3 + (\frac{r_a r_b r_c}{r})^2 (r_a + r_b + r_c)^2 - r_a r_b r_c (r_a + r_b + r_c)^3.$$

Ví dụ 3.

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có

$$\frac{11R + 2r}{3} \geq \sqrt{\frac{19R^2 + 4Rr + 4p^2}{3}} \geq \sqrt[3]{R^3 + R^2r + 4Rp^2 + 8rp^2}$$

Lời giải.

Gọi d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến tâm các đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C. Khi đó $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a, d_b^2 = R^2 + 2Rr_b, d_c^2 = R^2 + 2Rr_c$. Do đó từ hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2 x - p^2 r = 0 \\ y = R^2 + 2Rx \end{cases}$$

khử x ta được phương trình

$$y^3 - (11R^2 + 2Rr)y^2 + (19R^4 + 4Rr + 4p^2)y - (R^6 + R^5 r + 4R^4p^2 + 8R^3rp^2) = 0$$

nhận d_a^2, d_b, d_c^2 là các nghiệm.

áp dụng kết quả (a) ta nhận được

$$\frac{11R+2r}{3} \geq \sqrt{\frac{19R^2+4Rr+4p^2}{3}} \geq \sqrt[3]{R^3+R^2r+4Rp^2+8rp^2}$$

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Kí hiệu r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính các đường tròn $(ABC), (BCD), (CDA), (DAB)$. Chứng minh rằng:

$$\left(1-\frac{ab}{2Rr_1}\right)\left(1-\frac{bc}{2Rr_2}\right)\left(1-\frac{cd}{2Rr_3}\right)\left(1-\frac{da}{2Rr_4}\right) = \frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(ac+bd)^2}$$

Lời giải.

Đặt $AC = x, BD = y, a+b+c+d = 2p$.

Từ phương trình nhận ba cạnh của tam giác ABC là nghiệm (theo b1) ta có $abx = (a+b+x)2Rr_1$. Do đó $x = \dfrac{a+b}{\dfrac{ab}{2Rr_1}-1}$.

Tương tự $x = \dfrac{c+d}{\dfrac{cd}{2Rr_3}-1}, y = \dfrac{b+c}{\dfrac{bc}{2Rr_2}-1}, y = \dfrac{d+a}{\dfrac{da}{2Rr_4}-1}$

Từ hệ thức cho tứ giác nội tiếp $(ac+bd)^2 = x^2y^2$ ta được $(ac+bd)^2 = \dfrac{a+b}{\dfrac{ab}{2Rr_1}-1} \cdot \dfrac{c+d}{\dfrac{cd}{2Rr_3}-1} \cdot \dfrac{b+c}{\dfrac{bc}{2Rr_2}-1} \cdot \dfrac{d+a}{\dfrac{da}{2Rr_4}-1}$ hay

$$\left(1-\frac{ab}{2Rr_1}\right)\left(1-\frac{bc}{2Rr_2}\right)\left(1-\frac{cd}{2Rr_3}\right)\left(1-\frac{da}{2Rr_4}\right) = \frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(ac+bd)^2}.$$

3.7.4 Bài tập áp dụng

Bài tập 1.

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có

$$(a^2+2Rr)(b^2+2Rr)(c^2+2Rr) = 2Rr(ab+bc+ca-2Rr)^2.$$

Bài tập 2.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Kí hiệu r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính các đường tròn $(ABC), (BCD), (CDA), (DAB)$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = \dfrac{bc + ad}{ab + cd}$

b) $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

Tài liệu tham khảo

1. Đàm Văn Nhỉ. Kết thức, phép khử và ứng dụng, NXB Giáo dục.

3.8 Dãy số và một số tính chất

Vũ Thị Vân, Trường THPT Chuyên Bắc Giang

3.8.1 Một số phương pháp thường dùng

Phương pháp sai phân

Trong một số bài toán ta thường phải xử lí các tổng liên quan đến các số hạng của một dãy số cho trước. Để thực hiện yêu cầu của đầu bài, ta thường phải đánh giá hoặc rút gọn một tổng. Phương pháp sai phân tỏ ra rất hiệu quả khi giải quyết các vấn đề này. Sau đây là một số kiểu áp dụng

Để tính $S(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, ta tìm $f(n)$ sao cho $a_n = f(n+1) - f(n)$. Khi đó $S_n = f(n+1) - f(1)$. Cách làm này gọi là phương pháp sai phân hữu hạn (tách số hạng tổng quát).

Có thể dự đoán hàm $f(n)$ bằng sử dụng tích phân. Ta biết tích phân của đa thức bậc k là đa thức bậc $k+1$, bởi vậy, nếu $\Delta f(k) := f(k+1) - f(k) = n^k$ thì $f(k)$ phải có bậc $k+1$.

Các hàm rời rạc không có nguyên hàm, ta có thể đánh giá tổng bằng các bất đẳng thức tích phân.

Ví dụ 3.24. *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi*

$$x_1 = \frac{1}{2}\ ;\ x_{n+1} = x_n^2 + x_n, \forall n \geq 1.$$

Tính $[S_{2010}]$ *biết* $S_{2010} = \dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{2010}+1}$.

Hướng dẫn.

Từ công thức truy hồi ta có

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1} \Rightarrow \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$$

Do đó $S_{2010} = 2 - \dfrac{1}{x_{2011}} < 2$. Mặt khác dễ thấy (x_n) tăng, $x_2 = \dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{21}{16} > 1$ suy ra $x_n > 1, \forall n \geq 3$ hay $S_{2010} > 1$. Vậy $[S_{2010}] = 1$.

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài này dưới dạng:

1) Chứng minh rằng $[S_n] = 1, \forall n \geq 3$, hoặc

2) Chứng minh rằng $\lim S_n = 1$.

Ví dụ 3.25. *Cho dãy số* (x_n) *xác định như sau*

$x_1 = 1; x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{a} + x_n, \forall n \geq 1$, *với* a *là số dương cho trước.*

Đặt $u_n = \dfrac{x_1}{x_{1+1}} + \dfrac{x_2}{x_{2+1}} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_{n+1}}$. *Chứng minh rằng* $\lim u_n = a$.

Hướng dẫn.

Từ công thức truy hồi, ta có

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = a\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}\right)$$

suy ra

$$u_n = a\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = a\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right).$$

Dễ thấy (x_n) tăng. Nếu x_n bị chặn trên thì tồn tại $\lim x_n = A$, với A hữu hạn. Khi đó, một mặt do (x_n) tăng và $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{1}{a} + 1 > 1$ nên $A > 1$. Mặt khác, chuyển qua giới hạn trong công thức truy hồi ta có $A = \dfrac{A^2}{a} + A \Rightarrow A = 0$. Mâu thuẫn. Như vậy, dãy số (x_n) là dãy tăng nhưng không bị chặn trên nên $\lim x_n = \infty$ hay $\lim \dfrac{1}{x_n} = 0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ta có thể thay a bằng bất kì một số cụ thể nào, ta được kết quả tương ứng, chẳng hạn $a = 2010$. Hoặc ta có thể đưa ra yêu cầu chứng minh $u_n < a, \forall n$.

Phép thế lượng giác

Nhiều dãy số với công thức phức tạp có thể trở thành các dãy số đơn giản nhờ phép thế lượng giác. Từ đó chúng ta có thể khảo sát được các tính chất đặc biệt của dãy số đó, đặc biệt trong việc xét tính tuần hoàn. Yêu cầu của kĩ thuật này, trước hết về mặt kiến thức chúng ta cần nắm được các công thức lượng giác, tính chất của các hàm số lượng giác. Ngoài ra, kĩ thuật này đôi khi còn đòi hỏi một chút nhạy cảm toán học. Dấu hiệu để ta có thể nghĩ đến phương pháp này là: trong bài toán có công thức gợi nhớ đến công thức lượng giác, giả thiết hoặc kết luận giống với tính chất hàm lượng giác như tính bị chặn hay tính tuần hoàn.

Ví dụ 3.26. *Cho dãy số (x_n) thoả mãn*

$$|x_1| < 1; 2x_{n+1} = \sqrt{3 - 3x_n^2} - x_n, \forall n \geq 1.$$

a) Tìm điều kiện cho x_1 để tất cả các số hạng của dãy số đều dương?

b) Dãy số trên có tuần hoàn không?

Hướng dẫn. Từ giả thiết $|x_1| < 1$ và công thức truy hồi cho dưới dạng hàm số $x_{n+1} = f(x_n)$ với $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3 - 3x_n^2} - x_n\right)$, gợi cho ta nghĩ đến phép thế lượng giác với cách đặt $x_1 = \cos\phi, \phi \in (0; \pi)$.

Khi đó $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin\phi - \cos\phi\right) = \cos\left(\phi - \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Bằng quy nạp, ta tìm được $x_{n+1} = \cos\left(\phi - \dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

Như vậy, dãy số trở nên đơn giản hơn rất nhiều, mỗi số hạng của dãy số là một hàm số lượng giác phụ thuộc n.

a) $x_n > 0, \forall n \Leftrightarrow \cos\left(\phi - \dfrac{2n\pi}{3}\right) > 0, \forall n$. Từ đó tìm được ϕ suy ra x_1.

b) Dãy đã cho tuần hoàn.

Ví dụ 3.27. *Hai dãy số $(a_n), (b_n)$ được xác định bởi*

$$a_1 = \alpha, b_1 = \beta, a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n; b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n, \forall n \geq 1.$$

Có bao nhiêu cặp (α, β) thoả mãn $a_{2010} = b_1; b_{2010} = a_1$.

Hướng dẫn.

Từ giả thiết, thu được kết quả: $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^{n+1}$.

Từ điều kiện $a_{2010} = b_1; b_{2010} = a_1$ suy ra $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Đặt $\alpha = \cos\varphi, \beta = \sin\varphi, (\varphi \in [0; 2\pi])$.

Theo quy nạp, ta được $a_n = \cos(n\varphi); b_n = \sin(n\varphi)$. Sau đó tìm φ sao cho

$$\begin{cases} \cos(2010\varphi) = \sin\varphi \\ \sin(2010\varphi) = \cos\varphi \end{cases}.$$

Đáp số $\varphi = \dfrac{(4k+1)\pi}{2.2011}$ tương ứng có 2011 bộ $(\alpha; \beta)$.

Sắp xếp lại thứ tự

Thủ thuật này thường được áp dụng trong các boán liên quan đến bất đẳng thức trong dãy số. Khi các số có thứ tự thì chúng có những tính chất đặc biệt mà một dãy bất kì không có.

Ví dụ 3.28. *Tồn tại hay không một dãy số thực x_n thoả mãn điều kiện*

a) $|x_n| \leq 0.666, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $|x_m - x_n| \geq \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{m(m+1)}, \forall m \neq n.$

Hướng dẫn. Giả sử tồn tại dãy số như vậy. Với mỗi số nguyên dương N, ta sắp lại các số $x_1, ..., x_N$ theo thứ tự tăng dần $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \cdots \leq x_{i_N}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
|x_{i_N} - x_{i_1}| &= \left|x_{i_N} - x_{i_{(N-1)}}\right| + \cdots + |x_{i_2} - x_{i_1}| \\
&\geq \frac{1}{i_N(i_N+1)} + \frac{1}{i_{(N-1)}(i_{(N-1)}+1)} \cdots \frac{1}{i_2(i_2+1)} + \frac{1}{i_1(i_1+1)} \\
&= 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{i_k(i_k+1)} - \frac{1}{i_N(i_N+1)} - \frac{1}{i_1(i_1+1)} = A(N).
\end{aligned}$$

Vì $i1, i2, \ldots, iN$ là một hoán vị của $1, 2, ..., N$ nên

$$\begin{aligned}
A(N) &= 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{i_N(i_N+1)} - \frac{1}{i_1(i_1+1)} \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) - \frac{1}{i_N(i_N+1)} - \frac{1}{i_1(i_1+1)} \\
&\geq 2\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) - \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{N+1}.
\end{aligned}$$

Mặt khác $|x_{i_N} - x_{i_1}| \leq |x_{i_N}| + |x_{i_1}| \leq 2.0,666 < \dfrac{4}{3}$.

Chọn N đủ lớn sao cho $\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{N+1} > 2.0,666$. Mâu thuẫn. Vậy không tồn tại dãy số thoả mãn yêu cầu.

Phương pháp quy nạp

Đối với bài toán chứng minh tính chất của dãy số mà tính chất đó là mệnh đề $P(n)$, ta cần phải chứng $P(n)$ đúng với $\forall n \geq n_0$, trong đó n_0 là số tự nhiên cho trước, thì phương pháp chứng minh bằng quy nạp lại rất hiệu quả.

Ví dụ 3.29. *Cho dãy số (a_n) xác định:*

$$a_1 = 1; a_2 = -1; a_{n+1} = -a_n - 2a_{n-1}, \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng với $\forall n \geq 2$ ta luôn có

$$2^{n+1} - 7a_{n-1}^2 = (2a_n + a_{n-1})^2. \tag{3.13}$$

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp quy nạp.

Với $n = 2$ ta có $2^3 - 7 = (-2+1)^2$, suy ra (3.13) đúng với $n = 2$.

Giả sử (3.13) đúng với $\forall k \geq n$, ở đây $n \geq 2$. Khi đó:

$$\begin{aligned}(2a_{n+1} + a_n)^2 &= (-2a_n - 4a_{n-1} + a_n)^2 = (-a_n - 4a_{n-1})^2\\ &= a_n^2 + 8a_na_{n-1} + 16a_{n-1}^2\\ &= 2(4a_n^2 + 4a_na_{n-1} + a_{n-1}^2) + 14a_{n-1}^2 - 7a_n^2\\ &= 2(2a_n + a_{n-1})^2 + 14a_{n-1}^2 - 7a_n^2\\ &= 2(2^{n+1} - 7a_{n-1}^2) + 14a_{n-1}^2 - 7a_n^2\\ &= 2^n - 7a_n^2.\end{aligned}$$

Suy ra (3.13) đúng với $k = n+1$. Điều phải chứng minh (Đpcm).

Chú ý. Kết luận của bài toán trên có thể phát biểu: *Chứng minh rằng $\forall n \geq 2$ ta luôn có $2^{n+1} - 7a_{n-1}^2$ là một số chính phương.*

Ví dụ 3.30. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là những số thực dương. Chứng minh rằng nếu $x_1x_2\cdots x_n = 1$ thì $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$ với $\forall n = 1, 2, \ldots$*

Hướng dẫn. áp dụng phương pháp quy nạp.

Với $n = 2$, ta cần chứng minh $x_1x_2 = 1$ suy ra $x_1 + x_2 \geq 2$.

Thật vậy, ta có

$(x_1 - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + 1 \geq 2x_1 \Rightarrow x_1 + \dfrac{1}{x_1} \geq 2 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2.$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = 1$ hay $x_1 = x_2 = 1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n \geq 2$. Ta sẽ chứng minh đúng cho $n+1$, nghĩa là chứng minh từ

$$x_1x_2\cdots x_nx_{n+1} = 1 \tag{3.14}$$

suy ra

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n+1. \tag{3.15}$$

Từ (3.14) cho ta hai trường hợp:

- Tất cả các số đều bằng nhau $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = 1$. Khi đó

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = n + 1.$$

- Không phải các số đều bằng nhau. Trong các số có số lớn hơn 1, thì cũng có số nhỏ hơn 1. Chẳng hạn $x_1 < 1, x_{n+1} > 1$. Khi đó ta có $y_1 x_2 \cdots x_n = 1$ với $y_1 = x_1 x_{n+1}$. Do giả thiết quy nạp đúng với n, nên ta có $y_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$. Khi đó

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_{n+1} &= y_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} - y_1 + x_1 \\ &\geq n + x_{n+1} - y_1 + x_1 = (n+1) + x_{n+1} - y_1 + x_1 - 1 \\ &= (n+1) + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 \\ &= (n+1) + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \geq n + 1 \end{aligned}$$

do $x_1 < 1, x_{n+1} > 1$. Đpcm

Sử dụng định lý về giới hạn tương đương

Định lý 3.1. *Cho dãy số* (c_k) *với* $0 < c_k < 1,\ k = 1, 2, 3, ...$ *Xét các dãy số*

$$x_n = \prod_{i=1}^{n} (1 + c_i)\ ;\ y_n = \prod_{i=1}^{n} (1 - c_i).$$

Khi đó ba đẳng thức sau là tương đương

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty \tag{3.16}$$

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = 0 \tag{3.17}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right) = +\infty \tag{3.18}$$

Chứng minh.

- Chứng minh (3.16) $\Rightarrow$ (3.18).

Giả sử $\sum_{i=1}^{n} c_i < M$ với $0 < M < +\infty$. Khi đó

$$\prod_{i=1}^{n}(1+c_i) < \left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^n < \left(1+\frac{M}{n}\right)^n < e^M,$$

vô lý vì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, hay (3.18) được chứng minh.

- Chứng minh (3.18) $\Rightarrow$ (3.16).

Điều này là hiển nhiên vì $\prod_{i=1}^{n}(1+c_i) > \sum_{i=1}^{n} c_i$.

- Chứng minh (3.17) $\Rightarrow$ (3.18).

Nhận xét rằng ứng với bộ n số bất kì $a_1, a_2, ..., a_n$ với $0 < a_i < 1$ bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-a_i).$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n}(1-c_i) = 0$ nên ứng với mỗi m luôn tồn tại $n > m$ sao cho

$$\prod_{i=1}^{n}(1-c_i) < \frac{1}{2}.$$

Từ đó ta có

$$\sum_{i=1}^{n} c_i > 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-c_i) > \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i = +\infty$.

- Chứng minh (3.16) $\Rightarrow$ (3.17). Ta có

$$1 > \prod_{i=1}^{n}(1-c_i^2) = \prod_{i=1}^{n}(1+c_i)\prod_{i=1}^{n}(1-c_i).$$

Nhưng vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n}(1+c_i) = +\infty$ nên theo nguyên lý kẹp ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n}(1-c_i) = 0 \qquad \text{(đpcm.)}$$

Ví dụ 3.31. *Cho dãy số thực dương tăng (u_n) thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Chứng minh rằng tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho*

$$\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_k}{u_{k+1}} < k - 2010. \qquad (3.19)$$

Hướng dẫn.

$$(3.19) \Leftrightarrow k - \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_k}{u_{k+1}}\right) > 2010 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{u_i}{u_{i+1}}\right) > 2010.$$

Do (u_n) là dãy tăng nên $0 < 1 - \dfrac{u_i}{u_{i+1}} < 1$. Đặt $c_i = 1 - \dfrac{u_i}{u_{i+1}}$, suy ra $0 < c_i < 1$. Mặt khác, ta có

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - c_i) = \prod_{i=1}^{n}\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{u_1}{u_{n+1}}$$

tiến dần tới 0 khi $n \to +\infty$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = +\infty$. Do đó tồn tại $k \in \mathbb{N}$ để

$$\sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i > 2010.$$

Nhận xét: Ta có thể thay số 2010 bằng một số thực dương bất kì mà không thay đổi lời giải. Thực chất bài toán này chứng minh

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = +\infty.$$

Ví dụ 3.32. *Cho dãy số thực dương (u_n) thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Chứng minh rằng với $a > 0$ cho trước, tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho*

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{u_i}{u_1 + u_2 + \cdots + u_i} > a. \qquad (3.20)$$

Hướng dẫn. Đặt $c_i = \dfrac{u_i}{u_1 + u_2 + \cdots + u_i}$. Vì $u_i > 0$ nên $0 < c_i < 1$ và

$$1 - c_1 = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{i-1}}{u_1 + u_2 + \cdots + u_i}, \text{ với } i \geq 2.$$

Suy ra

$$\prod_{i=1}^{n}(1-c_i)=\frac{u_1}{u_1+u_2+\cdots+u_n}$$

tiến dần tới 0 khi $n\to+\infty$, vì $u_i>0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}c_i=+\infty$ hay tồn tại $k\in\mathbb{N}$ để $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i>a$. Đpcm

Nhận xét. Ta có thể cho a một giá trị dương cụ thể nào đó, chẳng hạn cho $a=2010$, lời giải không thay đổi, bởi vì bản chất của nó là

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{u_1+u_2+\cdots+u_i}=+\infty.$$

3.8.2 Chứng minh tính chất của dãy số

Tính chất của dãy số rất đa dạng, có thể là tính chất về số học, về giải tích, liên quan đến đẳng thức, bất đẳng thức, tính tuần hoàn... Với những bài chứng minh tính chất của dãy số, ta thường áp dụng một số phương pháp đã trình bày trong phần trước. Ngoài ra, ta cũng hay sử dụng các phương pháp khác như phản chứng, tuyến tính hóa phương trình sai phân,...

Tính chất số học

Giới thiệu về tính chất số học

Số học liên quan đến số nguyên. Trong dãy số, có thể có tất cả các số hạng đều là số nguyên (dãy số nguyên), hoặc một số số hạng nguyên. Tính chất số học của dãy số thường liên quan đến số hạng là số nguyên trong dãy số đó, tính chất đó được thể hiện ở tính chất chia hết, nguyên tố cùng nhau, chính phương, đồng dư,...

Ví dụ 3.33. *Xét dãy số (x_n) xác định như sau*

$$x_1=x_2=1,x_{n+2}=14x_{n+1}-x_n-4.\tag{3.21}$$

Chứng minh rằng với mọi n, x_n là số chính phương.

Hướng dẫn. Xét dãy số $u_1 = u_2 = 1, u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$. Ta có

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (4u_{n+1} - u_n)u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}(4u_n - u_{n+1}) - u_n^2$$
$$= u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = \cdots = u_3u_1 - u_2^2 = 2, \quad \forall n.$$

Tiếp theo, ta chứng minh $x_n = u_n^2$ bằng phương pháp quy nạp.

Thật vậy, ta có $x_1 = 1 - u_1^2, x_2 = 1 - u_2^2$.

Giả sử $x_k = u_k^2$ với mọi $k \le n$. Ta chứng minh $x_{n+1} = u_{n+1}^2$.

Thật vậy, ta có

$x_{n+1} = 14x_n - x_{n-1} - 4 = 14u_n^2 - u_{n-1}^2 - 2(u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2)$

$= 16u_n^2 - 8u_{n-1}u_n + u_{n-1}^2 = (4u_n^2 - u_{n-1})^2 = u_{n+1}^2$.

Như vậy ta có $x_n = u_n^2$ với mọi n. Đpcm

Dãy số nguyên

Như đã nói trên, dãy số nguyên có liên quan rất nhiều đến tính chất số học của dãy số. Trong nhiều trường hợp dãy số chỉ là bề ngoài, bản chất bài toán lại là bài toán số học. Chính vì vậy, ngoài những kiến thức về dãy số, chúng ta cần biết thêm những kết quả của số học về tính chất chia hết, ước số chung lớn nhất, bội số chung nhỏ nhất, đồng dư, số nguyên tố, hợp số,... Chẳng hạn, nguyên lý Diriclet, là nguyên lý rất đơn giản nhưng lại vô cùng hữu hiệu trong các bài chứng minh, đặc biệt là chứng minh sự tồn tại hay không tồn tại của một đối tượng thoả mãn một điều kiện nào đó.

Ví dụ 3.34. *Cho dãy số nguyên gồm $n+1$ số: $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$, các số hạng của nó nằm trong đoạn $[1; 2n]$. Chứng minh rằng tồn tại hai số hạng của dãy số trên sao cho số này chia hết cho số kia.*

Hướng dẫn

Do các số a_i đều là các số nguyên dương nên chúng đều có thể viết được dưới dạng $a_i = 2^{s_i} r_i$, với r_i là số lẻ. Các số r_i chỉ có thể nhận n giá trị $1, 3, ..., 2n-1$. Vì dãy (a_n) có $n+1$ số nên theo nguyên lý Diriclet tồn tại 2 số $k, j, k \neq j$ sao cho $r_k = r_j$ hay dãy số đã cho tồn tại hai số a_k, a_j sao cho một trong hai số chia hết cho số còn lại.

Ví dụ 3.35. *Cho dãy số nguyên gồm n số: $a_1, a_2, ..., a_n$, các số hạng của nó nằm trong đoạn $[1; 2n]$, thoả mãn $[a_i, a_j] > 2n$ với mọi $i \neq j$. Chứng minh rằng mỗi số hạng của dãy số đều lớn hơn $\frac{2n}{3}$.*

Hướng dẫn

Không làm mất tính tổng quát, giả sử a_1 là số nhỏ nhất của dãy số đã cho. Ta chỉ cần chứng minh $a_1 > \frac{2n}{3}$. Thật vậy, giả sử $a_1 < \frac{2n}{3}$. Ta có $n+1$ số $2a_1, 3a_1, a_2, ..., a_n$ đều không lớn hơn $2n$ và không có số nào là bội của số nào do $[a_i, a_j] > 2n$ với mọi $i \neq j$. Điều đó mâu thuẫn với kết quả bài toán trên.

Nhận xét. Khi n một số cụ thể, ta có bài toán tương ứng. Chẳng hạn, cho $n = 2010$, ta có thể phát biểu bài toán sau.

" Cho 2010 số nguyên dương không lớn hơn 4020, thoả mãn bội số chung nhỏ nhất của hai số bất kì luôn lớn hơn 4020. Chứng minh rằng mỗi số trong 2010 số đó đều lớn hơn 1340".

Một dãy số truy hồi tuyến tính với hệ số nguyên và các số hạng đầu đều nguyên thì dãy số đó là dãy số nguyên. Nhưng có dãy số mà công thức truy hồi phi tuyến tính (có phân thức, có căn thức) mà các số hạng của nó vẫn nguyên.

Ví dụ 3.36. *Chứng minh rằng, mọi số hạng của dãy số (a_n) xác định bởi*

$a_0 = 1; a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ *đều nguyên.*

Hướng dẫn.

Chuyển vế bình phương công thức truy hồi của dãy số ta được

$$a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} + 4a_n^2 = 3a_n^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} + a_n^2 + 2 = 0.$$

Thay n bằng $n+1$ ta được

$$a_n^2 - 4a_na_{n-1} + a_{n-1}^2 + 2 = 0.$$

Suy ra a_{n-1}, a_{n+1} là nghiệm của phương trình $x^2 - 4a_nx + a_n^2 + 2 = 0$. Theo vieet ta có $a_{n+1} + a_{n-1} = 4a_n$ hay $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$, mà $a_0 = 1, a_1 = 3$ là các số nguyên. Vậy, theo quy nạp tất cả các số hạng trong dãy đều là các số nguyên.

Ví dụ 3.37. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau*

$$a_1 = a_2 = 97, a_{n+1} = a_na_{n-1} + \sqrt{(a_n^2 - 1)(a_{n-1}^2 - 1)}. \tag{3.22}$$

Chứng minh rằng với mọi n, số $2 + \sqrt{2 + 2a_n}$ là số chính phương.

Hướng dẫn. Trước hết ta chỉ ra $a_n \in \mathbb{Z}$. Tiếp theo, ta chứng minh $2(1+a_n)$ là số chính phương. Và cuối cùng là đưa ra điều phải chứng minh.

Với $x \in \mathbb{N}$ không chính phương bất kì, ta luôn có $x = k^2l$, với l là ước của x và l không chính phương. Ta gọi l là phần không chính phương của x.

Ta có $a_3 = 2.97^2 - 1$. Từ công thức truy hồi suy ra

$$a_{n+1} - a_na_{n-1} = \sqrt{(a_n^2 - 1)(a_{n-1}^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}a_na_{n-1} + a_n^2a_{n-1}^2 = a_n^2a_{n-1}^2 - a_n^2 - a_{n-1}^2 + 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2 = 2a_{n+1}a_na_{n-1} + 1. \tag{3.23}$$

Từ (3.23) thay n lần lượt bằng $m+2$ và $m+1$ ta được

$$\Rightarrow a_{m+3}^2 + a_{m+2}^2 + a_{m+1}^2 = 2a_{m+2}a_{m+3}a_{m+1} + 1. \tag{3.24}$$

$$\Rightarrow a_{m+2}^2 + a_{m+1}^2 + a_m^2 = 2a_{m+2}a_m a_{m+1} + 1 \tag{3.25}$$

Trừ vế với vế của (3.24) và (3.25) ta được

$$a_{m+3}^2 - a_m^2 = a_{m+2}a_{m+1}(a_{m+3} - a_m)$$

$$\Rightarrow a_{m+3} + a_m = 2a_{m+1}a_{m+2} \tag{3.26}$$

(từ giả thiết dễ suy ra dãy số (a_n) tăng nên $a_{m+3} - a_m > 0$).

Vì $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \in \mathbb{N}^*$.

Từ (3.24) ta có $a_{m+3}(a_{m+3} - 2a_{m+1}a_{m+2}) + a_{m+2}^2 + a_{m+1}^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow a_{m+3}a_m + 1 = a_{m+2}^2 + a_{m+1}^2. \tag{3.27}$$

Từ (3.26) và (3.27) suy ra

$$(a_{m+3} + 1)(a_m + 1) = (a_{m+2} + a_{m+1})^2. \tag{3.28}$$

Như vậy tích của $(a_{m+3} + 1)$ và $(a_m + 1)$ luôn là một số chính phương. Vì vậy phần không chính phương của $(a_{m+3} + 1)$ và $(a_m + 1)$ là bằng nhau. Chú ý là phần không chính phương của $a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 + 1$ là 2, do đó bằng quy nạp ta thu được phần không chính phương của $a_n + 1$ là 2 với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $a_n + 1 = 2k_n^2$. Từ (3.28) ta được

$$k_{m+3}k_m = k_{m+1}^2 + k_{m+2}^2 - 1. \tag{3.29}$$

Mặt khác, trừ vế với vế của (3.26) và (3.27) ta thu được

$$(a_{m+3} - 1)(a_m - 1) = (a_{m+2} - a_{m+1})^2.$$

Lập luận như trên ta được $a_n - 1 = 6l_n^2$ (do $a_1 - 1, a_2 - 1, a_3 - 1$ có phần không chính phương là 6). Khi đó, ta có

$$6l_m^2 + 2 = 2k_m^2 \Leftrightarrow (k_m + 1)(k_m - 1) = 3l_m^2. \tag{3.30}$$

Bằng quy nạp kết hợp với (3.26) ta dễ dàng chứng minh được với $\forall n, a_n$ đều có dạng $4k+1$.

Suy ra k_m là số lẻ, nên (k_m+1) và (k_m-1) đều có ước là 2. Từ (3.30) suy ra một trong 2 số (k_m+1) và (k_m-1) có dạng $2b^2$ số còn lại là $6c^2$. Lại từ (3.29) bằng quy nạp ta thấy k_m luôn có dạng $6q+1$ nên k_m+1 phải có dạng $2b^2$.

Vì vậy $2+\sqrt{2+2a_m} = 2+\sqrt{2.2k_m} = 2+2k_m = 2.2b^2 = 4b^2$. Đpcm

Rõ ràng, với ví dụ này, đầu tiên ta phải chứng minh dãy số (a_n) là dãy số nguyên, sau đó chứng minh $2+2a_n$ là số chính phương rồi mới chứng minh yêu cầu bài toán. ở đây, ta phải sử dụng nhiều tính chất số học như tính chất chia hết, chia có dư, tính chất về số chính phương,...

Như vậy, ta có thể xây dựng dãy số nguyên từ lời giải của phương trình nghiệm nguyên. Chẳng hạn, từ phương trình Pell $x^2 - Dy^2 = k$, giả sử nó có nghiệm không tầm thường $(x_0; y_0)$, a, b là nghiệm cơ sở của phương trình liên kết với nó $x^2 - Dy^2 = 1$. Khi đó hai dãy số $(x_n), (y_n)$ xác định bởi $x_{n+1} = ax_n + bDy_n$, $y_{n+1} = bx_n + ay_n$ thì $(x_n), (y_n)$ là nghiệm của phương trình $x^2 - Dy^2 = k$. Từ đó ta có thể tìm được

$$x_{n+1} = ax_n + b\sqrt{D(x_n^2 - k)}; \quad y_{n+1} = ay_n + b\sqrt{Dy_n^2 + k}$$

và như vậy đã xuất hiện hai dãy số nguyên được cho bởi công thức không nguyên.

Mặt khác, ta cũng có thể tạo ra dãy số nguyên xác định bởi công thức truy hồi mà có phân số từ phương trình bậc hai: $x^2 - 4a_nx + a_n^2 + 2 = 0$ như sau.

Theo định lí Vieet thì $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 2$, nên $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{a_{n-1}}$. Khi đó ta có bài toán: *"Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{a_{n-1}}$. Chứng minh rằng a_n nguyên với mọi n"*. Để giải bài toán này ta có thể dùng phương pháp tuyến tính hoá phương trình sai phân.

Ví dụ 3.38. *(Bulgari 1978) Cho dãy số* (a_n) *thỏa mãn* $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + c}{a_{n-1}}$.

Chứng minh rằng, nếu a_0, a_1 *và* $\dfrac{a_0^2 + a_1^2 + c}{a_0 a_1}$ *là các số nguyên thì* a_n *nguyên với mọi* n.

Hướng dẫn. Từ công thức truy hồi ta có $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = c$.

Từ đó suy ra $a_{n+1} = \dfrac{a_0^2 + a_1^2 + c}{a_0 a_1} a_n - a_{n-1}$.

Bài tập

Bài toán 3.13. *Cho dãy số* (u_n) *xác định như sau*

$$u_1 = \alpha; u_2 = \beta, u_{n+1} = au_n - u_{n-1}.$$

Chứng minh rằng $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = a\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2, \forall n \geq 2$.

Bài toán 3.14. *Cho dãy số* (x_n) *xác định như sau*

$$x_1 = \alpha^2; u_2 = \beta^2, x_{n+1} = (a^2 + 2)x_n - x_{n-1} - 2(a\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2).$$

Chứng minh rằng x_n *là số chính phương với mọi* n.

Bài toán 3.15. *Cho dãy số* (a_n) *xác định như sau*

$$a_1 = 1; a_2 = 2, a_3 = 24, a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}.$$

Chứng minh rằng, mọi n, a_n *nguyên và* a_n *chia hết cho* n.

Hướng dẫn.

Từ công thức truy hồi ta có

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 6\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} - 8\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}.$$

Đặt $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, ta có $b_1 = 2; b_2 = 12; b_n = 6b_{n-1} - 8b_{n-2}$. Giải phương trình sai phân tuyến tính này, ta được $b_n = 4^n - 2^n$.

Khi đó ta có $a_{n+1} = (4^n - 2^n)a_n = 2^n(2^n - 1)a_n$. Rõ ràng $a_1 \vdots 1, a_2 \vdots 2, a_3 \vdots 3$. Giả sử $a_n \vdots n, n \geq 3$, ta sẽ chứng minh $a_{n+1} \vdots (n+1)$. Thật vậy, ta có

Nếu $(n+1)$ là số nguyên tố thì $(2^n - 1) \vdots (n+1)$ (Định lý Fermat) nên $a_{n+1} \vdots (n+1)$.

Nếu $(n+1)$ là hợp số thì $(n+1)$ phân tích thành tích các số nguyên tố p nhỏ hơn n.

Mặt khác $a_{n+1} = 2^n(2^n - 1)a_n, a_n \vdots n \Rightarrow a_{n+1} \vdots k, \forall k \leq n \Rightarrow a_{n+1} \vdots p$, với p nguyên tố nhỏ hơn bằng n. Hay $a_{n+1} \vdots (n+1)$. Đpcm

Bài toán 3.16. *Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Cho dãy số (a_n) xác định như sau*

$$a_1 = k + 1; a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng $\forall m \neq n, (a_m, a_n) = 1$.

Hướng dẫn. Ta chỉ cần chứng minh với $m > n, \quad (a_m, a_n) = 1$. Thật vậy, với $m > n$ ta có:

$$\begin{aligned} a_m - k &= a_{m-1}^2 - ka_{m-1} = a_{m-1}(a_{m-1} - k) \\ &= a_{m-1}a_{m-2}...a_n(a_n - k) = a_{m-1}a_{m-2}...a_1. \end{aligned}$$

Rõ ràng $(a_m, a_1) = 1$. Giả sử $(a_m, a_k) = 1, 1 \leq k \leq n - 1 < m - 2$. Ta sẽ chứng minh $(a_m, a_n) = 1$. Giả sử $(a_m, a_n) = d$.

Ta có $a_m \vdots d, a_n \vdots d \Rightarrow k \vdots d \Rightarrow a_n - k \vdots d \Rightarrow a_{n-1}a_{n-2}...a_1 \vdots d$, theo giả thiết $(a_m, a_k) = 1 \forall k \leq n - 1 \Rightarrow (a_m, a_{n-1}a_{n-2}...a_1) = 1 \Rightarrow d = 1$.

Tính chất giải tích

Tính chất giải tích của dãy số được thể hiện ở tính bị chặn, tính hội tụ hay phân kì, tính tăng giảm, quy luật của dãy số như cấp số cộng, cấp số nhân,...Ngoài ra tính chất giải tích của dãy còn thể hiện ở các biểu thức chứa các số hạng của dãy số.

Ví dụ 3.39. *Cho dãy số* (u_n) *thoả mãn điều kiện*

$$u_1 = u_2 = 1, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}, \forall n \geq 2.$$

Đặt $S_n = \sum_{i=1}^{n} arccotu_i$. *Chứng minh* S_n *hội tụ. Tìm giới hạn của* S_n.

Hướng dẫn.

Gọi (f_n) là dãy Phibonacci thoả mãn

$$f_1 = f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \leq 2.$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp

$$u_n = f_{2n-3}. \tag{3.31}$$

Ta có $u_3 = 2 = 1 + 1 = f_1 + f_2 = f_3$, (3.31) đúng với $n = 3$. Giả sử (3.31) đúng với $\forall k \leq n$. Ta phải chứng minh, (3.31) đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1} = 3f_{2n-3} - f_{2n-5} = 2f_{2n-3} + f_{2n-4} = f_{2n-3} + f_{2n-2} = f_{2n-1}$.

Mà dãy Phibonacci (f_n) có tính chất $f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^{n-1}$ (dễ dàng chứng minh bằng quy nạp).

Từ đó $f_{2k-3}^2 = f_{2k-2}f_{2k-4} + (-1)^{2k-4}, \forall k \geq 3$ hay $f_{2k-3} = \dfrac{f_{2k-2}f_{2k-4} + 1}{f_{2k-2} - f_{2k-4}}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} arccotu_k = arccotf_{2k-3} &= arccot\left(\frac{f_{2k-2}f_{2k-4} + 1}{f_{2k-2} - f_{2k-4}}\right) \\ &= arccotf_{2k-4} - arccotf_{2k-2}, \forall k \geq 3. \end{aligned}$$

$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} arccotu_i = \dfrac{3\pi}{4} - arccotf_{2n-2}$. Vậy $\lim S_n = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ví dụ 3.40. *Cho dãy số* (u_n) *thoả mãn điều kiện*

$$u_0 = 2; u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1, \forall n \geq 1.$$

CMR với $\forall n \geq 1, [u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$.

Hướng dẫn.
Ta đặt $a_k = \dfrac{2^k - (-1)^k}{3}, k \geq 0$. Ta chứng minh $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$.
Vì $a_0 = 0; a_1 = 1$ nên a_k đều nguyên.

Ta chứng minh bằng quy nạp công thức sau

$$u_n = 2^{a_n} + 2^{-a_n}, n \geq 0. \tag{3.32}$$

Với $k = 0, 1$ dễ thấy. Giả sử (3.32) đúng với $k = n-1$ và $k = n$. Ta phải chứng minh (3.32) đúng với $k = n+1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n(u_{n-1}^2 - 2) - \frac{5}{2}\\
&= (2^{a_n} + 2^{-a_n})[(2^{a_{n-1}} + 2^{-a_{n-1}})^2 - 2] - \frac{5}{2}\\
&= (2^{a_n} + 2^{-a_n})(2^{2a_{n-1}} + 2^{-2a_{n-1}}) - \frac{5}{2}\\
&= (2^{a_n} + 2^{-a_n})(2^{a_n-(-1)^{n-1}} + 2^{(-1)^{n-1}-a_n}) - \frac{5}{2}\\
&= 2^{2a_n+(-1)^n} + 2^{(-1)^{n-1}} + 2^{-(-1)^{n-1}} + 2^{-2a_n-(-1)^n} - \frac{5}{2}\\
&= 2^{a_{n+1}} + 2^{-a_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có $\forall n \geq 1, [u_n] = [2^{a_n} + 2^{-a_n}] = 2^{a_n}$,do $0 < 2^{-a_n} < 1, n \geq 0$.

Ví dụ 3.41. *Chứng minh rằng nếu (a_n) là dãy số dương tăng chặt và không bị chặn thì dãy* $\dfrac{a_2 - a_1}{a_2} + \dfrac{a_3 - a_2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_n - a_{n-1}}{a_n}$ *không bị chặn.*

Hướng dẫn. Trước hết ta chứng minh *Bổ đề.* Tồn tại dãy số nguyên dương $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{k_i} - a_{k_{i-1}}}{a_{k_i}}. \tag{3.33}$$

không bị chặn.

Thật vậy, chúng ta có thể xây dựng dãy (k_n) thỏa mãn $\dfrac{a_{k_i} - a_{k_{i-1}}}{a_{k_i}} \geq \dfrac{2}{3}$ như sau.

Giả sử đã xây dựng được $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-1}$. Vì a_k không bị chặn nên luôn tồn tại môt số k_n thỏa mãn $a_{k_n} \geq 3a_{k_{n-1}}$ suy ra
$\dfrac{a_{k_n} - a_{k_{n-1}}}{a_{k_n}} \geq \dfrac{2}{3}$.

Từ đó mỗi số hạng trong chuỗi (3.33) luôn lớn hơn hoặc bằng $\dfrac{2}{3}$. Từ đó ta được chuỗi (3.33) không bị chặn.

Bây giờ, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{k_i+1} - a_{k_i}}{a_{k_i+1}} + \frac{a_{k_i+2} - a_{k_i+1}}{a_{k_i+2}} + \cdots + \frac{a_{k_{i+1}} - a_{k_{i+1}-1}}{a_{k_{i+1}}} \\
&\geq \frac{a_{k_i+1} - a_{k_i}}{a_{k_{i+1}}} + \cdots + \frac{a_{k_{i+1}} - a_{k_{i+1}-1}}{a_{k_{i+1}}} \geq \frac{a_{k_{i+1}} - a_{k_i}}{a_{k_{i+1}}}.
\end{aligned}$$

Như vậy chuỗi đã cho lớn hơn chuỗi (3.33). Đpcm

Tính tuần hoàn của dãy số

Định nghĩa 3.1. *Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tuần hoàn (cộng tính) nếu tồn tại $s \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_{n+s} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Số s như vậy được gọi là chu kì của dãy. Chu kì nguyên dương nhỏ nhất của một dãy số tuần hoàn được gọi là chu kì cơ sở dãy số đó.

Trong thực hành, để chứng minh một dãy số là tuần hoàn không nhất thiết phải xác định chu kì cơ sở của nó. Một dãy số tuần hoàn với chu kì 1 là dãy hằng.

Định lý 3.2. *(Về tính tuần hoàn của dãy số dư) Cho $m, k \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$ và dãy số nguyên (a_n) thoả mãn*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n + c_{k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Trong đó $a_1, a_2, ..., a_k, c_1, c_2, ..., c_k, c_{k+1}$ là những số nguyên. Gọi r_n là số dư trong phép chia a_n cho m. Khi đó, nếu $(c_k, m) = 1$ thì dãy (r_n) trên tuần hoàn.

Ví dụ 3.42. *Cho dãy số (u_n) xác định như sau*

$$u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{2 + u_n}{1 - 2u_n}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng

a) $u_n \neq 0$ với mọi n nguyên dương.

b) Dãy không tuần hoàn.

Hướng dẫn.

Nhận xét: từ công thức truy hồi của dãy, ta liên tưởng đến công thức cộng của hàm số lượng giác tang, và yêu cầu bài toán có liên quan đến tính tuần hoàn. Vì thế, có thể nghĩ đến việc dùng đến phép thế lượng giác.

Gọi α là góc sao cho $\tan \alpha = 2$.

Ta có $u_1 = \tan \alpha, u_2 = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan \alpha^2} = \tan 2\alpha$.

Theo quy nạp, ta chứng minh được $u_n = \tan n\alpha$.

a) Từ công thức tính u_n ta suy ra $u_{2n} = \dfrac{2u_n}{1 - u_n^2}$.

Từ đó suy ra nếu tồn tại n để $u_n = 0$ thì sẽ tồn tại n lẻ để $u_n = 0$.

Giả sử $u_{2k+1} = 0$, khi đó $u_{2k} = -2$ và ta có

$-2 = u_{2k} = \dfrac{2u_k}{1 - u_k^2} \Rightarrow u_k^2 + u_k - 1 = 0 \Rightarrow u_k$ vô tỉ, trong khi đó theo công thức truy hồi cho trong giả thiết thì u_k luôn hữu tỉ.

Như vậy, $u_n \neq 0, \forall n \geq 1$.

b) Giả sử dãy tuần hoàn.

Khi đó tồn tại hai số nguyên dương n và $k, (n > k)$ sao cho $u_n = u_k$

hay $\tan n\alpha = \tan k\alpha \Rightarrow (n - k)\alpha = m\pi \Rightarrow u_{n-k} = 0$.

Mâu thuẫn với kết quả phần a).

Ví dụ 3.43. *Cho dãy số (x_n) xác định như sau $x_1 = 19, x_2 = 5, x_3 = 1890$,*

$x_{n+3} = 30x_{n+2} + 4x_{n+1} + 2011x_n + 1664, \forall n \geq 1.$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có vô số số hạng chia hết cho 2010.

Hướng dẫn.

Gọi r_n là số dư trong phép chia x_n cho 2010. Ta có $(2010, 2011) = 1$ nên dãy số (r_n) tuần hoàn, giả sử với chu kì s.

Ta có $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} 2011x_{ks} &= x_{ks+3} - 30x_{ks+2} - 4x_{ks+1} - 1664 \\ &\equiv x_3 - 30x_2 - 4x_1 - 1664 \pmod{2010} \\ &\equiv 1890 - 30.5 - 4.19 - 1664 \pmod{2010} \\ &\equiv 0 \pmod{2010}. \end{aligned}$$

Mà $(2011, 2010) = 1$ nên $x_{ks} \vdots 2010$.

Đặt $n = ks$, do có vô số $k \in \mathbb{N}^*$ nên cũng có vô số $n = ks \in \mathbb{N}^*$ để $x_n \vdots 2010$.

Ví dụ 3.44. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau*

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n, \forall n \geq 1, \\ a_{4n+1} = 1, \forall n \geq 1, \\ a_{4n+3} = 0, \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số đó không tuần hoàn.

Hướng dẫn.

Giả sử dãy (a_n) tuần hoàn, nghĩa là tồn tại $s \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$a_{n+s} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nếu $s \equiv 0 \pmod 4$ thì $s + 1 \equiv 1 \pmod 4$ suy ra $a_{s+1} = 1$, mà $a_{s+1} = a_1$ nên $a_1 = 1$.

Mặt khác, do $s \equiv 0 \pmod 4$ nên $s = 2^k t$, với $k, t \in \mathbb{N}^*, k > 1, t$ lẻ. Khi đó, $s + 2^{k-1} = 2^{k-1}(2t+1)$. Từ đó, $1 = a_1 = a_{2^{k-1}} = a_{s+2^{k-1}} = a_{2t+1} = 0$ (do t lẻ). Mâu thuẫn.

Nếu $s \equiv 1 \pmod 4$ thì $s + 2 \equiv 3 \pmod 4$ suy ra $a_{s+2} = 0$, mà $a_{s+2} = a_2 = a_1$ nên $a_1 = 0$. Cũng có $s + 4 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow a_{s+4} = 1$ mà $a_1 = a_4 = a_{s+4} \Rightarrow a_1 = 1$. Mâu thuẫn.

Nếu $s \equiv 2\ (mod\ 4)$ thì $s + 3 \equiv 1 \quad (mod \quad 4)$ suy ra $0 = a_3 = a_{s+3} = 1$. Mâu thuẫn.

Nếu $s \equiv 3 \quad (mod \quad 4)$ thì $s + 4 \equiv 3 \quad (mod \quad 4)$ suy ra $a_{s+4} = 0$, mà $a_{s+4} = a_4 = a_2 = a_1$ nên $a_1 = 0$.

Lại có $s + 2 \equiv 1 \quad (mod \quad 4) \Rightarrow a_1 = a_2 = a_{s+2} = 1$. Mâu thuẫn.

Như vậy, giả sử sai hay dãy đã cho không là dãy tuần hoàn.

Ví dụ 3.45. *Cho dãy số thực (a_n) thỏa mãn*

$$|a_n| = a_{n+1} + a_{n-1},\ \forall n = 1, 2, 3, ...$$

Chứng minh rằng dãy số tuần hoàn với chu kì 9.

Hướng dẫn.

Từ công thức truy hồi ta suy ra tổng của hai số kề nhau có ít nhất một số không âm. Ta có $|a_n| = a_{n+1} + a_{n-1}\ \forall n = 1, 2, 3, ...$, suy ra trong số a_{n+1}, a_{n-1} ít nhất một số không âm. Vì thế tồn tại hai số đứng kề nhau không âm, giả sử là a_m và a_{m+1}. Ta có

$$a_{m-1} = a_m - a_{m+1}; \quad a_{m+2} = a_{m+1} - a_m.$$

Suy ra a_{m-1} và a_{m+2} đối nhau hay một trong 2 số đó phải không âm. Do đó ta có 3 số đứng kề nhau đều không âm. Đặc biệt số ở giữa 2 số đó sẽ bằng tổng của 2 số còn lại. Ta kí hiệu chúng là $a, a + b, b$ $(a, b > 0)$. Theo công thức truy hồi, nếu biết hai số hạng liên tiếp thì ta luôn xác định được số hạng đứng liền trước và đứng liền sau 2 số đó. Vì vậy, ta có:

Nếu $a \leq b$ thì một phần của dãy sẽ là

$$..., b, 2b - a, -b, a, a + b, b, -a, a - b, b, 2b - a, ...$$

Nếu $a \leq b$ thì một phần của dãy sẽ là

$$..., 2a - b, a, b - a, -b, a, a + b, b, -a, a - b, 2a - b, a, ...$$

Điều đó chứng tỏ dãy đã cho tuần hoàn với chu kì 9.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán này bằng cách khác như sau.

Từ công thức truy hồi ta suy công thức truy hồi lùi $a_{n+1} = |a_n| - a_{n-1}$ và công thức truy hồi tiến $a_{n-1} = |a_n| - a_{n+1}$. Với số tự nhiên n bất kì, ta sẽ chứng minh $a_{n+9} = a_n$. Thật vậy, ta đặt $a_{n+4} = x, a_{n+5} = y$. Từ hai công thức truy hồi lùi và tiến trên ta biểu diễn được a_{n+9} và a_n theo x, y như sau.

$$a_{n+9} = ||||y| - x| - y| - |y| + x| - ||y| - x| + y; \tag{3.34}$$

$$a_n = ||||x| - y| - x| - |x| + y| - ||x| - y| + x. \tag{3.35}$$

Đặt biểu thức bên phải của (3.34) là $g(x, y)$, khi đó biểu thức bên phải của (3.35) là $g(y, x)$. Ta chứng minh $g(x, y) = g(y, x)$ bằng cách xét 3 trường hợp $0l \leq y; x \leq 0 \leq y; x \leq y \leq 0$.

Ta có bài toán áp dụng: Dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện

$$x_{10} = 3; x_{11} = -2; x_{n+1} = |x_n| - x_{n-1}, \forall n \geq 12.$$

Hãy tính $S := x_{2001}^2 + x_{2002}^2 + \cdots + x_{2010}^2$.

Hướng dẫn. Xét dãy số $y_n = x_{n+10}$. Rõ ràng dãy (y_n) tuần hoàn với chu kì 9. Đáp số $S = 87$.

Dãy số và đẳng thức

Những bài toán về dãy số mà cần chứng minh một số số hạng nào đó của nó thoả mãn đẳng thức, ta hay sử dụng đến phương pháp quy nap.

Ví dụ 3.46. *Cho hai dãy số $(x_n), (y_n)$ xác định như sau*

$$\begin{cases} x_0 = 0, x_1 = 1, \\ x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = 1, y_1 = 2, \\ y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi $n, y_n^2 = 3x_n^2 + 1$.

Hướng dẫn.

Ta dùng phương pháp quy nạp. Dễ kiểm tra đẳng thức đúng với $n = 0, 1$. Giả sử đẳng thức đúng với n từ 1 đến $k, (k \in \mathbb{N}^*)$. Ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} y_{k+1}^2 &= (4y_k - y_{k-1})^2 = 4y_k^2 - 8y_k y_{k-1} + y_{k-1}^2 \\ &= 3(16x_k^2 - 8x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2) + 1 + 24x_k x_{k-1} - y_k y_{k-1} + 16 \\ &= 3x_{k+1}^2 + 1 + 24x_k x_{k-1} - y_k y_{k-1} + 16. \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} 24x_k x_{k-1} - y_k y_{k-1} + 16 &= 6(x_{k+1} + x_{k-1})x_{k-1} - 2(y_{k+1} + y_{k-1})y_{k-1} + 16 \\ &= 6x_{k+1}x_{k-1} + 6x_{k-1}^2 - 2y_{k+1}y_{k-1} - 2y_{k-1}^2 + 16 \\ &= 6(x_k^2 - 1) + 6x_{k-1}^2 - 2y_{k-1}^2 - 2(y_k^2 + 3) + 16 = 0 \end{aligned}$$

(do $x_{k+1}x_{k-1} - x_k^2 = -1; y_{k+1}y_{k-1} - y_k^2 = 3$, theo bài toán 2.1.1). Đpcm

Ví dụ 3.47. *Cho $a, A > 0$ là những số bất kì và dãy (a_n) xác định*

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{A}{a_n}\right), \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\forall n \geq 1$, ta luôn có

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}}. \tag{3.36}$$

Hướng dẫn. Dùng quy nạp.

Hiển nhiên đẳng thức (3.36) cần chứng minh đúng với $n = 1$. Giả sử (3.36) đúng với $n = k, (k \in \mathbb{N}^*)$. Ta sẽ chứng minh (3.36) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có

$$\frac{a_{k+1}-\sqrt{A}}{a_{k+1}+\sqrt{A}}=\frac{\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{A}{a_k}\right)-\sqrt{A}}{\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{A}{a_k}\right)+\sqrt{A}}=\frac{a_k^2-2a_k\sqrt{A}+A}{a_k^2+2a_k\sqrt{A}+A}$$

$$=\left(\frac{a_k-\sqrt{A}}{a_k+\sqrt{A}}\right)^2=\left(\frac{a_1-\sqrt{A}}{a_1+\sqrt{A}}\right)^{2^k}$$

(theo giả thiết quy nạp). Đpcm

Ví dụ 3.48. *Cho dãy Phibonacci (u_n) với xác định*

$$\begin{cases} u_1=1, u_2=1\\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n, \forall n\geq 1.\end{cases}$$

Chứng minh các đẳng thức sau

1. $u_1+u_2+\cdots+u_n=u_{n+2}-1, (\forall n\geq 2)$;
2. $u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}, (\forall n\geq 2, \forall m\geq 1)$;
3. $u_n^2-u_{n-1}u_{n+1=(-1)^{n+1}}, (\forall n\geq 2)$;
4. $\alpha^n=u_n\alpha+u_{n-1}, (\forall n\geq 2, \alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})$;
5. $2u_n-u_{n+1}=u_{n-2}, (\forall n\geq 3)$;
6. $(2u_nu_{n+1}+2)^2+(u_nu_{n+3})^2=u_{2n+3}^2, (\forall n\geq 1)$;
7. $u_nu_{n+1}=u_{n-1}u_{n+2}+(-1)^n, (\forall n\geq 1)$.

Hướng dẫn. Dùng quy nạp. Chẳng hạn, chứng minh đẳng thức $u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}$ (2) bằng quy nạp theo m. Với $m=1$ ta có

$$u_{n-1}u_1+u_nu_2=u_{n-1}+u_n=u_{n+1},$$

và với $m=2$, ta có

$$u_{n-1}u_2+u_nu_3=u_{n-1}+2u_n=(u_{n-1}+u_n)+u_n=u_{n+1}+u_n=u_{n+2}.$$

Đẳng thức (2) đều đúng. Giả sử với số m nào đó các đẳng thức sau đúng

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} (3),$$

$$u_{n+m+1} = u_{n-1}u_{m+1} + u_n u_{m+2} (4),$$

ta sẽ chứng minh đẳng thức sau đúng

$$u_{n+m+2} = u_{n-1}u_{m+2} + u_n u_{m+3}.$$

Thật vậy, cộng vế với vế của (3) và (4), ta nhận được

$$u_{n+m} + u_{n+m+1} = u_{n-1}(u_m + u_{m+1}) + u_n(u_{m+2} + u_{m+1})$$

$$\Rightarrow u_{n+m+2} = u_{n-1}u_{m+2} + u_n u_{m+3}.$$

Ví dụ 3.49. *Cho dãy số (a_n) được xác định như sau*

$$a_k = k - 1, \forall k = 1, 2, 3, 4; a_{2n-1} = a_{2n-2} + 2^{n-2}, a_{2n} = a_{2n-5} + 2^n, \forall n \geq 3.$$

Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có các đẳng thức sau

1. $1 + a_{2n-1} = \left[\dfrac{12}{7}.2^{n-1}\right]$;
2. $1 + a_{2n} = \left[\dfrac{17}{7}.2^{n-1}\right]$.

Hướng dẫn. Trước hết ta chứng minh các đẳng thức sau bằng quy nạp

1. $\left[\dfrac{12}{7}.2^n\right] = \left[\dfrac{17}{7}.2^{n-1}\right] + 2^{n-1}$;
2. $\left[\dfrac{17}{7}.2^n\right] = \left[\dfrac{12}{7}.2^{n-2}\right] + 2^{n+1}$.

Sau đó ta chứng minh các đẳng thức của bài toán cũng bằng quy nạp.

Với $n = 1, n = 2$, kiểm tra trực tiếp, ta thấy 2 đẳng thức trên đúng. Giả sử hai đẳng thức trên đúng với hai số tự nhiên liên tiếp $n - 1, n$. Ta sẽ chứng minh hai đẳng thức trên đúng cho giá trị tiếp theo $n + 1$.

Từ định nghĩa của dãy $1 + a_{2n+1} = 1 + a_{2n} + 2^{n-1}$. Chú ý tới đẳng thức (2) cho giá trị n, ta có $1 + a_{2n+1} = \left[\dfrac{17}{7}.2^{n-1}\right] + 2^{n-1} = \left[\dfrac{12}{7}.2^{n}\right]$. Suy ra đẳng thức (1) của bài toán đúng với giá trị $n+1$.

Từ định nghĩa của dãy $1 + a_{2n+2} = 1 + a_{2n-3} + 2^{n+1}$. Chú ý tới đẳng thức (1) cho giá trị $n-1$, ta có $1 + a_{2n+2} = \left[\dfrac{12}{7}.2^{n-2}\right] + 2^{n+1} = \left[\dfrac{17}{7}.2^{n}\right]$. Suy ra đẳng thức (2) của bài toán đúng với giá trị $n+1$. Đpcm

Dãy số và bất đẳng thức

Với bài toán liên quan đến bất đẳng thức thì phương pháp quy nạp và phương pháp sai phân tỏ ra rất hữu hiệu.

Ví dụ 3.50. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau*

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{1 - a_n + a_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1, \forall n \geq 1$.

Hướng dẫn. Dùng phương pháp sai phân.

Ta có $a_2 = \dfrac{1}{3}, a_3 = \dfrac{1}{7}$. Từ công thức truy hồi, ta có

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = 1 - \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_n^2}$.

Đặt $u_n = \dfrac{1}{a_n}$. Ta có $u_1 = 2; u_2 = 3; u_3 = 7$ và

$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \Rightarrow u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1) \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_2 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_3 - 1} + \cdots + \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ &= 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} < 1 \end{aligned}$$

(do u_n tăng, $u_1 = 2$ suy ra $u_n > 1$, $\forall n \geq 1$). Đpcm

Nhận xét. Ta có thể chứng minh $\lim \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ bằng cách chứng minh u_n tăng không bị chặn trên, từ đó $\dfrac{1}{u_{n+1} - 1} \to 0$.

Ví dụ 3.51. *Cho dãy số (e_n) xác định như sau*

$$\begin{cases} e_1 = 2 \\ e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k!}, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng, $e_n < 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}, \forall n \geq 3.$

Hướng dẫn. Dùng quy nạp.

Với mọi $n = 3$ ta có $e_3 < 2,67 < 2,75 = 3 - \dfrac{1}{2^{3-1}}$.

Giả sử đẳng thức cần chứng minh thoả mãn với n nào đó. Ta sử dụng bất đẳng thức $(n+1)! > 2^n$ với $n > 1$ và giả thiết quy nạp ta nhận được $e_{n+1} = e_n + \dfrac{1}{(n+1)!} < (3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}) + \dfrac{1}{(n+1)!} < 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n} = 3 - \dfrac{1}{2^n}$. Đpcm

Ví dụ 3.52. *Cho dãy số thực dương (a_n) thoả mãn bất đẳng thức*

$$a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng, $a_n < \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Hướng dẫn. Dùng quy nạp.

Dễ dàng kiểm tra bất đẳng thức đúng với $n = 1, n = 2$.

Giả sử $a_n < \dfrac{1}{n}, n \geq 2$. Xét hàm số $f(x) = x - x^2$, tăng trên $[0; \dfrac{1}{2})$, mà $a_n < \dfrac{1}{n}$ nên ta có

$a_{n+1} \leq f(a_n) < f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n^2(n+1)} < \dfrac{1}{n+1}$. Đpcm

Ví dụ 3.53. *Cho dãy số nguyên không âm (a_n) thoả mãn bất đẳng thức*

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m, \ \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng, $a_n < ma_1 + \left(\dfrac{n}{m} - 1\right) a_m, \forall n > m.$

Hướng dẫn. Dùng quy nạp.

Trước hết bằng quy nạp theo k ta sẽ chứng minh

$$a_n \leq ka_m + a_{n-mk}\ (*), \forall k \geq \frac{n}{m}.$$

Thật vậy, theo giả thiết $a_n = a_{n+(n-m)} \leq a_m + a_{n-m}$, suy ra $(*)$ đúng với $k = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng với k. Ta có

$$\begin{aligned} a_n &\leq ka_m + a_{n-mk} = ka_m + a_{m+n-mk-m} \\ &\leq ka_m + a_m + a_{n-mk-m} \\ &= (k+1)a_m + a_{n-(k+1)m}. \end{aligned}$$

Tiếp theo, từ giả thiết ta có $a_m = a_{1+(m-1)} \leq a_1 + a_{m-1} \leq \cdots \leq ma_1$.

Nếu $n = mk + r, (r = 1, ..., m-1)$ thì từ $a_m \leq ma_1, a_r \leq ra_1$, ta suy ra

$$\begin{aligned} a_n &\leq ka_m + a_{n-mk} = ka_m + a_r = \frac{n-r}{m}a_m + a_r \\ &= \frac{n-m+m-r}{m}a_m + a_r = \frac{n-m}{m}a_m + +a_m - \frac{r}{m}a_m + a_r \\ &\leq \frac{n-m}{m}a_m + ma_1 - ra_1 + ra_1 = ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right)a_m. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.54. *Cho dãy số (x_n) xác định như sau*

$$x_1 = 1; x_n = \frac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}},\ \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 2010$.

Hướng dẫn. Nhận thấy (x_n) là dãy dương. Ta có

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n} = \frac{1}{\dfrac{1}{x_n} + x_n} = \frac{x_n}{1 + x_n^2} \leq x_n.$$

Suy ra (x_n) là dãy giảm bị chặn dưới bởi 0. Suy ra x_n hội tụ về a với a thoả mãn $a = \dfrac{a}{1+a^2}$. Ta được $a = 0$.

Như vậy, tồn tại n_0 sao cho

$$\forall n \geq n_0 : x_{n+1} < \frac{1}{2010} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n} < \frac{1}{2010}.$$

Vậy, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n > 2010$. Đpcm

Nhận xét: Thực chất bài toán trên là chứng minh (x_n) hội tụ về 0.

Ví dụ 3.55. *Cho $X = (x_1, x_2, ..., x_n), n \geq 4$ là dãy gồm n số không âm và tổng của chúng bằng 1.*

1. *Chứng minh rằng $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1 \leq \frac{1}{4}$.*
2. *Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ của X sao cho*

$$y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_ny_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Hướng dẫn. Dùng quy nạp.

a) áp dụng phương pháp quy nạp với n ta chứng minh

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1); \tag{3.37}$$

ở đây $x_i \geq 0, n \geq 4$. Thật vậy, với $n = 4$, bất đẳng thức (3.37) tương đương với $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$.

Giả sử (3.37) đúng với $n = k$ với $k \geq 4$. Ta cần chứng minh

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1})^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1). \tag{3.38}$$

Vì tổng 2 vế của (3.38) là vòng tròn theo chỉ số, ta có thể giả thiết

$x_{k+1} \leq x_i, i = 1, 2, ..., k$. Khi đó từ giả thiết quy nạp suy ra

$$(x_1+x_2+\cdots+(x_k+x_{k+1}))^2 \geq 4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{k-1}(x_k+x_{k+1})+(x_k+x_{k+1})x_1). \tag{3.39}$$

Bởi vì

$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{k-1}(x_k + x_{k+1}) + (x_k + x_{k+1})x_1$

$= (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1) + x_{k-1}x_{k+1} + x_k(x_1 - x_{k+1})$

và $x_1 - x_{k+1} \geq 0$ nên từ (3.39) suy ra (3.38).

Từ đó với $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, ta nhận được ngay kết quả.

b) Với hoán vị bất kì $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ của X ta đặt

$S_Y = y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_ny_1$.

Gọi S là tổng tất cả các S_Y (tính theo tất cả $n!$ hoán vị của X). Với sự cố định i và j, $i \neq j$ số lượng của những hoán vị của X, trong đó x_i đứng trước x_j (xếp theo vòng lặp), là $n(n-2)!$. Từ đây,

$$S = n(n-2)! \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_ix_j = n(n-2)!(1 - \sum_{i=1}^{n} x_k^2)$$
$$\leq n(n-2)!(1 - \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2) = n(n-2)!(1 - \frac{1}{n}) = (n-1)!.$$

Suy ra số nhỏ nhất trong S_Y không vượt quá $\dfrac{S}{n!} = \dfrac{1}{n}$. Đpcm

Ví dụ 3.56. *Cho dãy số (x_n) xác định như sau:*

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_n = \frac{2n-3}{2n}x_{n-1},\ \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1,\ \forall n \geq 1.$

Hướng dẫn. Dùng sai phân. Xét dãy số $y_n = (2n-1)x_n$. Ta có

$y_n = (2n-1)\dfrac{2n-3}{2n}x_{n-1} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)}{2n}.x_{n-1}.\dfrac{y_{n-1}}{2(n-1)-1}$

$\Rightarrow y_n = \dfrac{2n-1}{2n}.y_{n-1},\ \forall n \geq 2$. Công thức trên cũng đúng cho $n = 1$ nếu ta đặt $y_0 = 1$.

Ta lại có $y_{n-1} - y_n = \dfrac{2n}{2n-1}y_n - y_n = \dfrac{y_n}{2n-1} = x_n, \forall n \geq 1$. Vì vậy

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (y_0 - y_1) + (y_1 - y_2) + \cdots + (y_{n-1} - y_y)$$
$$= y_0 - y_n = 1 - y_n < 1.$$

Đpcm.

3.8.3 Bài tập

Bài tập có hướng dẫn giải

Phần này trình bày một số bài toán liên quan đến các tính chất của dãy số có kèm theo hướng dẫn giải chi tiết, đặc biệt lời giải sử dụng các phương pháp đã nêu.

Bài toán 3.17. *Cho dãy số nguyên dương* (a_n) *thỏa mãn*

$$a_1 = 1; a_n \leq 1 + a_1 + \cdots + a_{n-1}, \forall n \geq 2. \tag{3.40}$$

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên có thể biểu diễn như tổng của một vài số được chọn trong dãy số trên.

Hướng dẫn.

Ta sẽ chứng minh mọi số tự nhiên N thỏa mãn bất đẳng thức

$$0 < N < 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

có thể biểu diễn như một tổng của một vài số trong dãy $a_1, a_2, ..., a_n$.

Thật vậy, ta dùng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$ mệnh đề đúng vì $a_1 = 1$, khi đó $0 < N < 1 + 1$ nên $N = 1 = a_1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là mọi số tự nhiên N thỏa mãn bất đẳng thức $0 < N < 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ có thể biểu diễn như một tổng của một vài số trong dãy $a_1, a_2, ..., a_k$. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Ta chỉ xét trường hợp sau là đủ

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k < N < 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}.$$

Do (3.40) ta được

$0 \leq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k - a_{k+1} \leq N - a_{k+1} \leq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$

Nếu $N - a_{k+1} = 0$ thì mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Nếu $N - a_{k+1} > 0$ thì theo giả thiết quy nạp $N - a_{k+1}$ có thể biểu diễn như tổng của một vài số trong $a_1, a_2, ..., a_k$. Khi đó N biểu diễn như tổng trên và cộng thêm a_{k+1}. Đpcm

Bài toán 3.18. *Cho dãy số nguyên tố* (p_n) *thỏa mãn*

$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots \tag{3.41}$$

Chứng minh rằng giữa hai số $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ *và* $p_1 + p_2 + \cdots + p_n + p_{n+1}$ *luôn có một số chính phương.*

Hướng dẫn.

Trước hết, ta chứng minh rằng với $n \geq 7, p_n > 2n + 1(*)$ bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 7, p_7 = 17 > 2.7 + 1, (*)$ đúng. Giả sử $(*)$ đúng với $n = k, p_k > 2k + 1$, ta chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, do p_n là số lẻ với $\forall n > 1$ nên $p_{k+1} - p_k \geq 2$, nghĩa là

$$p_{k+1} \geq p_k + 2 > 2k + 1 + 2 = 2(k + 1) + 1.$$

Tiếp theo, ta chứng minh với $\forall n, y_n > n^2$ $(**)$, với $y_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ cũng bằng quy nạp.

Dễ kiểm tra $(**)$ đúng với $n = 1, ..., 7$.

Giả sử $(**)$ đúng với $n = k \geq 7$ ta có $y_k > k^2$.

Với $n = k + 1$, $y_{k+1} = y_k + p_{k+1} > k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Gọi m^2 là số chính phương lớn nhất không lớn hơn y_n. Theo trên, ta có $m = n + k, k > 0$. Như vậy, với $\forall n \geq 1$, tồn tại số $k > 0$ sao cho $(n + k)^2 \leq y_n < (n + k + 1)^2$.

Ta chứng minh $p_{n+1} > 2(n + k) + 1$.

Giả sử ngược lại, ta có $p_{n+1} \leq 2(n + k) + 1$.

Nhưng với $n \geq 2, p_{n+1} \geq p_n + 2$, suy ra

$$
\begin{aligned}
p_n &\leq 2(n+k) + 1 - 2 = 2(n+k) - 1,\\
p_{n-1} &\leq 2(n+k) + 1 - 4 = 2(n+k) - 3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_{n-j} &\leq 2(n+k) + 1 - 2(j+1) = 2(n+k) - (2j+1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
3 = p_2 &\leq 2(n+k) + 1 - 2(n-1) = 2(n+k) - (2n-3),\\
2 = p_1 &\leq 2(n+k) + 1 - 2n = 2(n+k) - (2n-1).
\end{aligned}
$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên, ta có

$$
\begin{aligned}
y_n =& p_1 + p_2 + \cdots + p_n \leq 2n(n+k) - (1 + 3 + \cdots + (2n-1))\\
=& 2n(n+k) - n^2 = n^2 + 2nk + k^2 - k^2 = (n+k)^2 - k^2.
\end{aligned}
$$

Điều này mâu thuẫn với $y_n \geq (n+k)^2$. Như vậy $p_{n+1} > 2(n+k)+1$. Khi đó $y_{n+1} = y_n + p_{n+} > (n+k)^2 + 2(n+k) + 1 = (n+k+1)^2 > y_n$.

Nghĩa là $y_n < (n+k+1)^2 < y_{n+1}$.

Vậy $(n+k+1)^2$ nằm giữa y_n và y_{n+1}.

Bài toán 3.19. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau*

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng, với mọi $m \in \mathbb{N}^*$, $a_m a_{m+1}$ cũng là số hạng của dãy.

Hướng dẫn.

Tìm ra công thức số hạng tổng quát của dãy số là $a_n = (n-1)^2 + 1$.

Khi đó $a_m a_{m+1} = [(m-1)^2 + 1][m^2 + 1] = (m^2 + m + 1)^2 + 1 = a_{m^2+m+2}$.

Bài toán 3.20. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau*

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $a_n > 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{n} - 1)$.

Hướng dẫn. $a_n < a_{n+1}, \forall n \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1, \forall n \geq 1$.

Mặt khác,

$a_n^2 = \left(a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}\right)^2 = a_{n-1}^2 + \dfrac{1}{a_{n-1}^2} + 2 \leq a_{n-1}^2 + 3, \forall n \geq 2$

$\Rightarrow a_n^2 \leq a_1^2 + 3(n-1) = 3n - 2 \Rightarrow a_n \leq \sqrt{3n-2}$.

Từ đó ta được $\dfrac{1}{a_{n-1}} > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$. Suy ra

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} = a_1 + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Mà $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \geq 2(\sqrt{n} - 1) \quad (*)$.

Vậy $a_n > 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{n} - 1)$. Đpcm

Chú ý. Chứng minh (*) bằng phương pháp sai phân.

Bài toán 3.21. *Cho dãy số* (a_n) *xác định như sau*

$$a_1 = 0, |a_{n+1}| = |a_n + 1|, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq -\dfrac{n}{2}$.

Hướng dẫn.

Ta giả thiết ta có $a_{n+1}^2 = (a_n + 1)^2 = a_n^2 + 2a_n + 1, \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{n+1}^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2S + n$$

$$\Rightarrow 2S + n = a_{n+1}^2 - a_1^2 = a_{n+1}^2 \geq 0 \Rightarrow S \geq -\frac{n}{2}.$$

Đpcm

Bài toán 3.22. *Xét dãy số* (a_n) *có*

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 119, a_{n+1} = a_1 a_2 ... a_n - 1, \forall n \geq 5.$$

Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{70}^2 = a_1.a_2...a_{70}$.

Hướng dẫn.

Đặt $b_n = a_1.a_2...a_n - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2 = a_{n+1} + 1 - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2$. Với $\forall n \geq 5$ ta có

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_1.a_2...a_n a_{n+1} - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_{n+1}^2 \\ &= (a_{n+1} + 1)a_{n+1} - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_{n+1}^2 \\ &= a_{n+1} - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2 = b_n - 1 \\ \Rightarrow b_{n+1} &= b_5 - (n-4) \Rightarrow b_{70} = b_5 - 65 = 0. \end{aligned}$$

Bài toán 3.23. *Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện*

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{n^2}{x_n} + \frac{x_n}{n^2}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $\forall n \geq 4$ ta luôn có $[x_n] = n$.

Hướng dẫn.

$x_2 = 3; x_3 = \dfrac{49}{12}, x_4 = \dfrac{9.12}{49} + \dfrac{49}{9.12} + 2$. Rõ ràng $4 + \dfrac{2}{4} < x_4 < 4 + 1$.

Như vậy, bất đẳng thức kép $n + \dfrac{2}{n} < x_n < n + 1 (*)$ đúng với $n = 4$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k, k \geq 4$, nghĩa là $k + \dfrac{2}{k} < x_k < k + 1$.

Ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng với $n = k+1$, nghĩa là chứng minh

$$k + 1 + \frac{2}{k+1} < x_{k+1} < k + 2.$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp

$x_k < k + 1 \Rightarrow \dfrac{k^2}{x_k} > \dfrac{k^2}{k+1} = k - 1 + \dfrac{1}{k+1}$ và

$x_k > k + \dfrac{2}{k} \Rightarrow \dfrac{x_k}{k^2} > \dfrac{k^2+2}{k^3} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{2}{k^3}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{k^2}{x_k} + \dfrac{x_k}{k^2} > k - 1 + \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{2}{k^3} > k - 1 + \dfrac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow x_{k+1} > k + 1 + \frac{2}{k+1}.$$

Mặt khác, cũng từ giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} x_{k+1} - 2 = \frac{k^2}{x_k} + \frac{x_k}{k^2} &< \frac{k^3}{k^2+21} + \frac{k+1}{k^2} \\ &= k + \frac{k^2+2k+2-k^2}{k^2(k^2+2)} < k \\ &\Rightarrow x_{k+1} < k+2. \end{aligned}$$

Như vậy $n + \dfrac{2}{n} < x_n < n+1, \forall n \geq 4$, suy ra $\forall n \geq 4$ ta luôn có $[x_n] = n$.

Bài toán 3.24. *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn điều kiện*

$$a_0 = 1, a_1 = 6, a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n, \forall n \geq 0.$$

Chứng minh rằng

1. $a_{n+1}^2 - 6a_na_{n+1} + a_n^2 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$,

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}^* : a_n = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

Hướng dẫn.

1) Từ công thức truy hồi ta có $a_{n+2} + a_n = 6a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow a_{n+2}^2 - a_n^2 = 6a_{n+1}(a_{n+2} - a_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{n+2}^2 - 6a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 &= a_{n+1}^2 - 6a_na_{n+1} + a_n^2 \\ &= \cdots = a_1^2 - 6a_0a_1 + a_0^2 = 1. \end{aligned}$$

2) Dễ thấy $a_n \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned} 8a_n^2 + 1 &= 8a_n^2 + a_{n+1}^2 - 6a_na_{n+1} + a_n^2 \\ &= a_{n+1}^2 - 6a_na_{n+1} + 9a_n^2 \\ &= (a_{n+1} - 3a_n)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $8a_n^2 + 1$ là số chính phương lẻ, nghĩa là tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $8a_n^2 + 1 = (2k+1)^2$ hay $a_n = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Đpcm

Bài toán 3.25. *Cho dãy số tự nhiên (a_n) thỏa mãn điều kiện*

$$a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-3}^2, \forall n \geq 3.$$

Chứng minh rằng nếu $a_k = 2010$ thì $k \leq 3$.

Hướng dẫn. Phản chứng.

Giả sử $k > 3$, ta có $a_n \in \mathbb{N}, \forall n$ và

$2010 = a_k = a_{k-1}^2 + a_{k-2}^2 + a_{k-3}^2 \Rightarrow a_{k-1}^2 < 2010 \Rightarrow a_{k-1} \leq 44$ $(*)$.

Mặt khác $a_{k-1} = a_{k-2}^2 + a_{k-3}^2 + a_{k-4}^2$ (do $k > 3$)

$\Rightarrow a_{k-1} \geq a_{k-2}^2 + a_{k-3}^2 \Rightarrow a_{k-1} + a_{k-1}^2 \geq 2010 \Rightarrow a_{k-1} \geq 45$ $(**)$.

$(*)$ và $(**)$ mâu thuẫn với nhau hay giả sử sai. Vậy ta có đpcm.

Bài toán 3.26. *Cho các dãy số $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ thỏa mãn điều kiện*

$$a_{n+1} = a_n + b_n, b_{n+1} = b_n + c_n, c_{n+1} = c_n + d_n, d_{n+1} = d_n + a_n, \forall n \geq 0.$$

Giả sử tồn tại hai số nguyên dương k, r sao cho

$$a_{k+r} = a_k,\ b_{k+r} = b_k,\ c_{k+r} = c_k,\ d_{k+r} = d_k,$$

Chứng minh rằng $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$.

Hướng dẫn.

Đặt $s_n = a_n + b_n + c_n + d_n$. Từ giả thiết suy ra

$$s_{k+r} = s_k;\ s_{n+1} = 2s_n,\ \forall n \geq 0.$$

Bằng quy nạp ta tìm được $s_n = 2^n s_0$, $\forall n \geq 0$.

Vì vậy ta có $2^{k+r} s_0 = 2^r s_0 \Rightarrow s_0 = 0 \Rightarrow s_n = 0\ \forall n \geq 0$.

Lại có $\forall n \geq 1$

$$a_n + c_n = (a_{n-1} + b_{n-1}) + (c_{n-1} + d_{n-1}) = s_{n-1} = 0. \ (1)$$

Đặt $w_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$. Ta có $w_{k+r} = w_k$ và

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= (a_n + b_n)^2 + (b_n + c_n)^2 + (c_n + d_n)^2 + (d_n + a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + (a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n) \\ &= 2w_n + 2(a_n + c_n)(b_n + d_n). \end{aligned}$$

Do (1) nên $w_{n+1} = 2w_n$, với $n \geq 1$.

Theo quy nạp ta được $w_n = 2^{n-1} w_1,\ \forall n \geq 1$.

Từ đó $2^{k+r-1} w_1 = 2^{k-1} w_1 \Rightarrow w_1 = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$. Đpcm

Bài toán 3.27. *Cho hai dãy số $(x_n), (y_n)$ thỏa mãn điều kiện*

$$x_0 = y_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}, y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 2}{2y_n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Chứng minh rằng $y_n = x_{2^n - 1},\ \forall n \geq 0$.

Hướng dẫn.

Xét hai dãy số $(a_n), (b_n)$ xác định

$$a_n = \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}}, \quad b_n = \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Ta có $a_0 = b_0 = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} := \lambda$. Từ công thức trên ta chứng minh được $a_{n+1} = \lambda a_n, b_{n+1} = b_n^2$. Bằng quy nạp ta có

$$a_n = \lambda^{n+1}, \quad b_n = \lambda^{2^n},\ \forall n \geq 0.$$

Thay n bởi $2^n - 1$ ta được $a_{2^n - 1} = \lambda^{(2^n - 1) + 1} = \lambda^{2^n} = b^n$. Khi đó

$\dfrac{x_{2^n-1} - \sqrt{2}}{x_{2^n-1} + \sqrt{2}} = \dfrac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}}$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{x_{2^n-1} + \sqrt{2}} = 1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}}$

$\Rightarrow x_{2^n-1} = y_n$. Đpcm

Bài tập tự giải

Bài toán 3.28. *Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_2}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{n}.$$

Bài toán 3.29. *Tìm phần nguyên của tổng $S=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{100}}$.*

Bài toán 3.30. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau*

$$a_0=1, a_1=a, a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2, \forall n\geq 1.$$

Chứng minh rằng, với nếu $a\in\mathbb{N}^*$ thì $\forall n\in\mathbb{N}$ tồn tại $m\in\mathbb{N}$ sao cho $a_na_{n+1}=a_m$.

Bài toán 3.31. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau*

$$a_1=a, a>1, 2011a_{n+1}=a_n^2+2010a_n, \forall n\geq 1.$$

Chứng minh rằng, với $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có $\sum_{i=1}^n\dfrac{a_i}{a_{i+1}-1}<\dfrac{2011}{a-1}$.

HDG. Sử dụng phương pháp sai phân.

Bài toán 3.32. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau*

$$a_1=3, a_{n+1}=a_n^2-3a_n+4, \forall n\geq 1.$$

Chứng minh rằng, với $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có $\sum_{i=1}^n\dfrac{1}{u_i-1}<1$.

HDG. Sử dụng phương pháp sai phân.

Bài toán 3.33. *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn*

$$0<a_1<1, a_{n+1}=\frac{a_n^2}{n^2}+a_n, \forall n\geq 1.$$

Chứng minh rằng, dãy số (a_n) bị chặn.

HDG. Sử dụng phương pháp sai phân.

Bài toán 3.34. *Cho dãy số thực (a_n) thỏa mãn*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{2a_n}, \forall n \geq 0.$$

Chứng minh rằng, dãy số (a_n) chứa vô hạn số hạng âm, vô hạn số hạng dương.

HDG. Sử dụng phương pháp phép thế lượng giác, đặt $a_0 = \cot \pi t$.

Bài toán 3.35. *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1.2.3, a_n = n(n+1)(n+2)$. Kí hiệu $S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$. Chứng minh rằng $4S_n + 1$ là số chính phương.*

HDG. Sử dụng phương pháp sai phân, với
$a_{n+1} = \dfrac{1}{4}((n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - n(n+1)(n+2)(n+3))$.

Bài toán 3.36. *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn*

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1, a_{n+6}a_{n+1} = a_{n+2}a_{n+5} + a_{n+3}a_{n+4} \ \forall n \geq 0.$$

Chứng minh rằng $a_n \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*$.

HDG. Sử dụng phương pháp quy nạp.

Đã có $n+5$ số hạng đầu tiên là số tự nhiên, ta cần chứng minh $a_{n+6} \in \mathbb{N}$ bằng cách chứng minh $a_{n+2}a_{n+5} \equiv -a_{n+3}a_{n+4} (\mod a_{n+1})$.

Bài toán 3.37. *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn*

$$a_1 < 0 a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n} \ \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại $k, 1 \leq k \leq 2010$ thỏa mãn $a_k < 0$.

HDG. Chứng minh tồn tại $k, 1 \leq k \leq 1626$ thỏa mãn $a_k < 0$.

Bài toán 3.38. *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn*

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+1} = 2a_{n-1} \textit{ hoặc } a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1},\ \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng không có số hạng nào của dãy nằm trong đoạn từ 1600 đến 2010.

HDG. Sử dụng phương pháp quy nạp chứng minh $a_n = 2^{x_n} + a_n = 2^{y_n}$ với $x_n, y_n \in \mathbb{N}$ và hoặc $x_n = x_{n-1}; y_n = y_{n-1} + 1$ hoặc $x_n = x_{n-1} + 1; y_n = y_{n-1}$.

Bài toán 3.39. *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn*

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2x_n,\ \forall n \geq 1.$$

Đặt $y_n = x_n^2 + 2^{n+2}$. Chứng minh rằng y_n là số chính phương lẻ.

HDG. Tìm số hạng tổng quát của (x_n).

Bài toán 3.40. *Xét các số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn $\sum x_i = \sum \frac{1}{x_i}$. Chứng minh rằng $\sum \frac{1}{n-1+x_i} \leq 1$.*

HDG. Đặt $y_n = \frac{1}{n-1+x_i}$. Khi đó ta cần chứng minh $\sum y_i \leq 1$. Sử dụng phương pháp phản chứng.

Bài toán 3.41. *Xét dãy số (a_n) thỏa mãn $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Giả sử tổng của 2009 số hạng đầu tiên là 2011, tổng của 2011 số hạng đầu tiên là 2009. Hỏi tổng của 2020 số hạng đầu tiên là bao nhiêu?*

HDG. Chứng minh dãy số trên tuần hoàn với chu kì 6.

3.8.4 Kết luận

Chuyên đề đã trình bày một số phương pháp giải bài toán về dãy số có liên quan đến tính chất, cùng với các ví dụ minh họa, áp dụng chúng để chứng minh tính chất của dãy số. Trong phần áp dụng này, người viết có giới thiệu một số tính chất thường gặp về dãy số, chủ yếu minh họa qua các ví dụ cùng hướng dẫn giải kết hợp với nhận xét về lời và bản chất của bài toán để người đọc hiểu và nắm bắt được vấn đề dễ dàng. Cuối cùng, người viết đưa ra các bài tập liên quan, một số bài có hướng dẫn giải chi tiết để một lần nữa người đọc thấy rõ hơn về các bài toán dạng này, một số bài có đưa ra định hướng phương pháp giải nhưng không hướng dẫn chi tiết để người đọc tự giải, rèn luyện, thu hoạch kết quả của mình khi đọc chuyên đề. Qua chuyên đề này, người viết thấy rằng cần phải nghiên cứu sâu hơn nữa về các tính chất đã nêu của dãy số, còn rất nhiều các phương pháp giải khác chưa được đưa ra, rất nhiều tính chất khác về dãy số vẫn chưa được khám phá. Người viết rất mong quý đọc giả quan tâm và bổ sung thêm.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề chọn lọc dãy số và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2008.

2. Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Nguyễn Văn Tiến, *Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông*, NXB Giáo Dục Việt Nam, 2009.

3. Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp quy nạp toán học*, NXB Giáo Dục, 2001.

4. Nguyễn Văn Nho, *Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Trung Quốc*, NXB Giáo Dục, 2003.

5. Andrei Negut, *Problems for the Mathematican Olympiad.*

6. Tạp chí toán học và tuổi trẻ, *Tuyển tập 5 năm*, NXB Giáo Dục, 2003.

7. Tài liệu từ Internet.

3.9 Một số phương pháp giải hệ phương trình trong các bài thi học sinh giỏi

Huỳnh Tấn Châu **Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên**

3.9.1 Dùng các phép biến đổi đại số

Bài toán 1. (CHọN ĐộI TUYểN TP Hà NộI Ọ 2005)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = \left(x^2 + 3y^2\right)\left(3x^2 + y^2\right) \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2\left(y^4 - x^4\right) \end{cases}$

Lời giải.

ĐK: $x \neq 0, y \neq 0$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x} = x^4 + 5y^4 + 10x^2y^2 \\ \dfrac{1}{y} = 5x^4 + y^4 + 10x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4 \\ 1 = 5x^4y + 10x^2y^3 + y^5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ 1 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = (x+y)^5 \\ 1 = (x-y)^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[5]{3} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 + \sqrt[5]{3}}{2} \\ y = \dfrac{-1 + \sqrt[5]{3}}{2} \end{cases}$$

Bài toán 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt[4]{y}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y}\right) = 1 \end{cases}$$

Lời giải.

Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ hoặc $x = y = 0$ thì hệ vô nghiệm.

Do đó điều kiện của hệ: $x > 0$ và $y > 0$.

Đặt $\sqrt{x} = u, \sqrt{y} = v\,(u, v > 0)$, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{u}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{2u+v}{u^2+v^2}\right) = 2 \\ \sqrt{v}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{2u+v}{u^2+v^2}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{\sqrt{v}} = \dfrac{1}{2}\,(1) \\ \dfrac{2}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{v}} = \dfrac{4u+2v}{u^2+v^2}\,(2) \end{cases}$$

Nhân (1) và (2) vế theo vế ta được: $2v\left(u^2 + 2v^2\right) - u\left(u^2 + 2v^2\right) = 0$ hay $(2v - u)\left(u^2 + 2v^2\right) = 0$, suy ra $u = 2v$.

Thay $u = 2v$ vào (1) ta được $\sqrt{v} = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)$ hay $v = 4\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$ và $u = 8\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$, suy ra $x = 64\left(17 + 12\sqrt{2}\right)$; $y = 16\left(17 + 12\sqrt{2}\right)$.

Bài toán 3.

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = -\dfrac{1}{2} + 3\sqrt{3}(1) \\ y^4 + 2x^3 - y = -\dfrac{1}{2} - 3\sqrt{3}(2) \\ z + y - x = \log_3 (y - x)\,(3) \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện : $yx > 0$

Cộng phương trình (1) và (2) vế theo vế ta được

$$x^4+2x^3-x+\frac{1}{4}+y^4+2y^3-y+\frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y^2 + y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0(4)$$

$$\Rightarrow x, y \in \left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Xét phương trình $t^2 + t - \dfrac{1}{2} = 0$ (*) . Giả sử α là một nghiệm của pt (*)

$$\Rightarrow \alpha^2 = -\alpha + \frac{1}{2}, \alpha^3 = -\alpha^2 + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha - 1}{2}, \alpha^4 = -2\alpha + \frac{3}{4}$$

Tức là $x^4 = -2x + \dfrac{3}{4}, y^3 = \dfrac{3y-1}{2}$, thay vào (1) ta được $yx = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, y = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ thoả mãn (1) , (2) và (4)

Với $yx = \sqrt{3}$ (thoả điều kiện) , thay vào (3) ta được

$$z + \sqrt{3} = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là

$$x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, z = \frac{1-2\sqrt{3}}{2}$$

Bài toán 4. (CHọN ĐổI TUYểN PTNK- ĐHQG TPHCM Ọ 2004) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} u + v = 2(1) \\ ux + vy = 3(2) \\ ux^2 + vy^2 = 5(3) \\ ux^3 + vy^3 = 9(4) \end{cases}$$

Lời giải.

Cách 1. Từ (1) $\Rightarrow v = 2 - u$, thế vào (2) : $ux + (2-u)y = 3 \Leftrightarrow u(x-y) = 3 - 2y$ Thế $v = 2 - u$ vào (3) : $ux^2 + (2-u)\,y^2 = 5$

$\Rightarrow u\left(x^2 - y^2\right) = 5 - 2y^2$

$\Rightarrow (3-2y)\,(x+y) = 5 - 2y^2 \ \langle dou\,(x-y) = 3 - 2y\rangle$

$\Leftrightarrow 3(x+y) - 2xy = 5$ (5)

Thế $v = 2 - u$ vào (4) : $ux^3 + (2-u)\,y^3 = 9$

$\Rightarrow u\left(x^3 - y^3\right) + 2y^3 = 9$

$\Rightarrow (3-2y)\left(x^2 + xy + y^2\right) + 2y^3 = 9$

$\Rightarrow 3(x+y)^2 - 3xy - 2xy(x+y) = 9$ (6)

Từ (5) và (6): $\begin{cases} 3(x+y) - 2xy = 5 \\ 3(x+y)^2 - 3xy - 2xy(x+y) = 9 \end{cases}$

Đặt $x + y = a, xy = b$

Ta có :

$$\begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ 3a^2 - 2ab - 3b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Thế các giá trị của x và y vào hai phương trình đầu:

* Với $x = 2, y = 1$

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ 2u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y,u,v) = (2,1,1,1)$$

* Với $x = 1, y = 2$

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u + 2v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y,u,v) = (1,2,1,1)$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm x, y, u, v là $2, 1, 1, 1$ và $(1, 2, 1, 1)$

Cách 2.

* Xét $x = 0 \Rightarrow vy = 3, vy^2 = 5, vy^3 = 9$

- Nếu $y = 0$ hoặc $v = 0$, hệ phương trình vô nghiệm.

- Nếu $y \neq 0, v \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{9}{5} \end{cases}$: Hệ phương trình vô nghiệm

* Vậy $x \neq 0$, hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} ux + vx = 2x(1') \\ ux^2 + vxy = 3x(2') \\ ux^3 + vxy^2 = 5x(3') \\ ux^3 + vy^3 = 9(4') \end{cases}$

Lấy $(1) - (2)$ vế theo vế: $v(xy) = 2x3$ (a)

$(2) - (3) : vy(xy) = 3x5$ (b)

$(3) - (4) : vy2(xy) = 5x9$ (c)

- Nếu $v = 0$ hoặc $y = 0$, hệ phương trình vô nghiệm

- Nếu $x = y$, hệ phương trình vô nghiệm

Suy ra $v \neq 0, y \neq 0, x \neq 0$

Lấy (a) chia (b) vế theo vế: $\dfrac{1}{y} = \dfrac{2x-3}{3x-5}$ (5)

Lấy (b) chia (c) vế theo vế : $\dfrac{1}{y} = \dfrac{3x-5}{5x-9}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra: $\dfrac{2x-3}{3x-5} = \dfrac{3x-5}{5x-9}$

$\Leftrightarrow (2x-3)(5x-9) = (3x-5)^2$

$\Leftrightarrow 10x^2 - 33x + 27 = 9x^2 - 30x + 25 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array} \right.$

* Thế $x = 1$ vaò (5) ta được $y = 2$

Thế $x = 1$ vaò (a): $v = 1 \Rightarrow u = 1$

* Thế $x = 2$ ta được: $y = 1, v = 1, u = 1$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (x, y, u, v) là $2, 1, 1, 1$ và $(1, 2, 1, 1)$ **Bài toán 5.** (VMO Ọ 2010) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

Lời giải.

Cách 1. Nhân phương trình thứ hai với -8 rồi cộng với phương trình thứ nhất, ta được $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = y^4 - 16y^3 + 96y^2 - 256y + 256$

$\Leftrightarrow (x-2)^4 = (y-4)^4$

$x - 2 = y - 4 \vee x - 2 = 4 - y$

$x = y - 2 \vee x = 6 - y$

Thay vào phương trình đầu, ta được :

(1) $-8y^3 + 24y^2 - 32y + 16 = 240 \Leftrightarrow y^3 - 3y^2 + 4y + 28 = 0$

$\Leftrightarrow (y+2)(y^2 - 5y + 14) = 0$. Suy ra $y = -2$ và $x = -4$.

(2) $-24y^3 + 216y^2 - 864y + 1296 = 240 \Leftrightarrow y^3 - 9y^2 + 36y - 44 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y^2 - 7y + 22) = 0$. Suy ra $y = 2$ và $x = 4$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm là $(x, y) = (-4, -2)$ và $(x, y) = (4, 2)$.

Cách 2. Đặt $y = 2t$ thay vào phương trình và viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} x^4 + 16 = 16(t^4 + 16) \quad (1) \\ x^3 - 3x^2 + 4x = 16(t^3 - 3t^2 + 4t) \quad (2) \end{cases}$$

Nhân chéo 2 phương trình này, ta được

$$(x^4 + 16)(t^3 - 3t^2 + 4t) = (t^4 + 16)(x^3 - 3x^2 + 4x) \ (3)$$

Dễ thấy nếu (x, t) là nghiệm của hệ thì $xt \neq 0$ nên ta chia hai vế của phương trình trên cho x^2t^2 thì được :

$$(x^2 + \frac{16}{x^2})(t - 3 + \frac{4}{t}) = (t^2 + \frac{16}{t^2})(x - 3 + \frac{4}{x})$$

Từ đây nếu đặt $u = x + 4/x$ và $v = t + 4/t$ thì ta có phương trình

$(u^2 - 8)(v - 3) = (v^2 - 8)(u - 3)$

$\Leftrightarrow u^2v - v^2u - 3(u^2 - v^2) + 8(u - v) = 0$

$(u - v)(uv - 3(u + v) + 8) = 0$ (4)

Từ (1) ta suy ra rằng x và t cùng dấu. Do đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta dễ dàng suy ra u, v hoặc cùng ≥ 4 hoặc cùng ≤ -4.

Suy ra $(u - 3)$ và $(v - 3)$ luôn lớn hơn hay bằng 1 hoặc luôn nhỏ hơn hay bằng -7. Suy ra $uv - 3(u + 3) + 8 = (u - 3)(v - 3) - 1 \geq 0$.

Dấu bằng chỉ có thể xảy ra khi $u = v = 4$.

Từ lý luận trên và từ (2) ta suy ra $u = v$, từ đó suy ra $x = t$ hoặc $x = 4/t$.

Trường hợp $x = t$. Thay vào phương trình (1) ta được $t^4 + 16 = 16(t^4 + 16)$, vô nghiệm.

Trường hợp $x = 4/t$. Thay vào phương trình (1), ta được :

$256/t^4 + 16 = 16(t^4 + 16)$

$\Leftrightarrow t^8 + 15t^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (t^4 - 1)(t^4 + 16) = 0$ Suy ra $t = \pm 1$. Từ đó ta được các nghiệm $(x, y) = (4, 2)$ và $(-4, -2)$.

Nhận xét. Lời giải 1 khá ngắn gọn nhưng đó là 1 ý tưởng không dễ nghĩ ra. Nếu như đặt $x = 2u, y = 2v$ và đưa về hệ phương trình

$$\begin{cases} u^4 - v^4 = 15 \\ 2(u^3 - 2v^3) = 3(u^2 - 4v^2) - 2(u - 8v) \end{cases}$$

thì có lẽ sẽ dễ nhìn thấy các hệ số nhị thức hơn.

Dù sao thì đây là một ý tưởng không mới. Nó đã được sử dụng ở VMO 2004, bảng B. Thậm chí xét về một mặt nào đó thì bài VMO 2004 còn khó hơn bài năm nay. Cụ thể bài VMO 2004 như sau:

Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x. \end{cases}$$

Cách giải đáp án của bài này như sau: Đặt $x + y = u, x - y = v$ thì $x = (u + v)/2, y = (u - v)/2$ và hệ có thể đưa về dạng :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -98 \\ -3u^2 + 5v^2 = -9u - 25v \end{cases}$$

Sau đó nhận phương trình thứ hai với 3 rồi cộng với phương trình thứ nhất thì được $(u - 3)^3 + (v + 5)^3 = 0$.

Rõ ràng cách giải này tương ứng với cách giải thứ nhất của VMO 2010. Tuy nhiên, bài VMO 2004 còn có 1 cách giải đơn giản hơn là nhân phương trình thứ hai (của hệ ban đầu) với 3 rồi cộng với phương trình thứ nhất và đưa về dạng : $(x + 1)((x - 1)2 + 3(y - 4)2) = 0$.

Bài toán 6.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2 + x + 1)\, y^2z^2 (1) \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2 + y + 1)\, z^2x^2 (2) \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2 + z + 1)\, x^2y^2 (3) \end{cases}$ (I)

Lời giải.

Trường hợp 1: $xyz = 0$

* Nếu $x = 0$, (I)$\Leftrightarrow y = 0$ hay $z = 0$

Khi đó hệ nhận nghiệm $(0; 0; z)$ và $(0; y; 0), \forall y, z \in \mathbb{R}$

* Tương tự cho trường hợp $y = 0$ hay $z = 0$

Trường hợp 2: $xyz \neq 0$

Chia hai vế các phương trình của (I) cho $x^2y^2z^2$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y}\right)^2 = 3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \\ \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}\right)^2 = 4 + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^2} \\ \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 5 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} (b+c)^2 = 3 + a + a^2 (4) \\ (c+a)^2 = 4 + b + b^2 (5) \\ (a+b)^2 = 5 + c + c^2 (6) \end{cases}$$

Cộng các vế của phương trình, rút gọn ta được :

$$(a+b+c)^2 - (a+b+c) - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c = 4 \\ a+b+c = -3 \end{array} \right.$$

ã Khi $a + b + c = 4$ thay và (4), (5), (6) ta tính được:

$$\begin{cases} a = \dfrac{13}{9} \\ b = \dfrac{4}{3} \\ c = \dfrac{11}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{13} \\ y = \dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{9}{11} \end{cases}$$

ã Khi $a + b + c = -3$ thay và (4), (5), (6) ta tính được:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{6}{5} \\ b = -1 \\ c = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{6} \\ y = -1 \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có các nghiệm là :
$(x;0;0)$, $(0;y;0)$, $(0;0;z)$ $(\forall x,y,z\in\mathbb{R})$, $\left(\dfrac{9}{13};\dfrac{3}{4};\dfrac{9}{11}\right)$, $\left(-\dfrac{5}{6};-1;-\dfrac{5}{4}\right)$

Bài tập áp dụng

Bài tập 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+y=3x+4\\ 2y^3+z=6y+6\\ 3z^3+x=9z+8 \end{cases}$$

Bài tập 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2=2x-y\\ y^2=2y-z\\ z^2=2z-t\\ t^2=2t-x \end{cases}$$

Bài tập 3. Cho số nguyên $n\geq 3$. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3=0\\ 2x_2-5x_3+3x_4=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 2x_n-5x_1+3x_2=0 \end{cases}$$

Bài tập 4. (VMO Ọ 1996) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2\\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài tập 5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2=a+(y-z)^2\\ y^2=b+(z-x)^2\\ z^2=c+(x-y)^2 \end{cases}$$

Bài tập 6. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2(y+z) = xyz + 14 \\ y^3 + z^3 + y^2(z+x) = xyz - 21 \\ z^3 + x^3 + z^2(x+y) = xyz + 7 \end{cases}$$

Bài tập 7.

Cho a là một số thực cho trước. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1^2 + \mathrm{ax}_1 + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_2 \\ x_2^2 + \mathrm{ax}_2 + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1000}^2 + \mathrm{ax}_{1000} + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_1 \end{cases}$$

Bài tập 8. Tìm bộ bốn số (x, y, u, v) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4 \\ xu + yv = -xv - yu \\ xyu + yuv + uvx + vxy = -2 \\ xyuv = -1 \end{cases}$$

Bài tập 9. (IRAN Ọ 2006) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + zx = \dfrac{1}{2} \\ y + z + xy = \dfrac{1}{2} \\ z + x + yz = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Bài tập 10. (VMO Ọ 2004 BảNG A) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}$$

Bài tập 11. (BULGARIAN Ọ 2003)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=3xy \\ x^2+y^2+z^2=3xz \\ x^3+y^3+z^3=3yz \end{cases}$$

3.9.2 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Bài toán 1. (OLYMPIC 30 Ọ 4 Ọ 2009 LớP 11)

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y \\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z \\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x \end{cases}$$

Lời giải.

Đặt $f(t)=2t^3+3t^2-18$ và $g(t)=t^3+t$. Ta có $g'(t)=3t^2+1>0,\ \ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó hệ phương trình được viết lại: $\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x) \end{cases}$

Giả sử $x=\max(x,y,z)$ thì

$$\begin{cases} x\geq y \\ x\geq z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq g(y) \\ g(x)\geq g(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x)\geq f(x) \\ f(z)\geq g(z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x\geq 2x^3+3x^2-18 \\ 2z^3+3z^2-18\geq z^3+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+5x+9)\leq 0 \\ (z-2)(z^2+5z+9)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ z\geq 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $2\leq z\leq x\leq 2\Rightarrow x=z=2$

Thế vào hệ phương trình ta được $y=2$

Thử lại ta thấy $x=y=z=2$ thỏa mãn hệ phương trình.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=y=z=2$.

Bài toán 2. (VMO Ọ 2006 BảNG A)

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}.\log_3(6-y)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}.\log_3(6-z)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}.\log_3(6-x)=z \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện : $x, y, z < 6$.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(6-y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} \\ \log_3(6-z)=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} \\ \log_3(6-x)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} \end{cases}$

Ta thấy hàm số $f(t)=\log_3(6-t)$ là hàm số nghịch biến trên $(-\infty,6)$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}}$ có $g'(t)=\dfrac{6-t}{\sqrt{(t^2-2t+6)^3}}>0\forall t \in$ $(-\infty;6)$

Suy ra $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty,6)$.

Từ đó ta có được $x=y=z=3$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=y=z=3$.

Bài toán 3.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+xy+\dfrac{3}{2}=2^y\,(1) \\ (x^2y+2x)^2-2x^2y-4x+1=0\,(2) \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \left(x^2y+2x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow y=\frac{1-2x}{x^2}$$

Thay $y=\dfrac{1-2x}{x^2}$ vào (1) : $2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+\dfrac{1-2x}{x}+\dfrac{3}{2}=2^{\frac{1-2x}{x^2}}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-2x}{2x^2}-\dfrac{1-x^2}{2x^2}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+\dfrac{1-x^2}{2x^2}=2^{\frac{1-2x}{x^2}}+\dfrac{1-2x}{2x^2}\,(3)$

Đặt $f\left(t\right)=2^t+\dfrac{t}{2}$, là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(3)\Leftrightarrow f\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)=f\left(\frac{1-2x}{x^2}\right)\Leftrightarrow\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{1-2x}{x^2}\Leftrightarrow x=2$$

Vậy hệ có nghiệm $x=2; y=-\dfrac{3}{4}$

Bài toán 4. (VMO Ọ 2008) Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình (ẩn x, y) sau:

$$\begin{cases} x^2+y^3=29 \\ \log_3 x.\log_2 y=1 \end{cases}$$

Lời giải.

ĐK: $x, y>0$

Đặt $\log_3 x=a,\ \log_2 y=b\ \Rightarrow\ x=3^a,\ y=2^b$

Ta có hệ mới $\begin{cases} 9^a+8^b=29 \\ ab=1 \end{cases}$. Thay $b=\dfrac{1}{a}$: $9^a+8^{\frac{1}{a}}=29$

Xét hàm: $f(x)=9^a+8^{\frac{1}{a}}-29$

$$f'(x)=\ln 9.9^a-\frac{1}{a^2}\ln 8.8^{\frac{1}{a}}$$
$$f''(x)=\ln^2 9.9^a+\frac{1}{a^2}\ln 8.8^{\frac{1}{a}}.\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^3}.\ln 8.8^{\frac{1}{a}}>0$$

Mặt khác, ta có: $f'(1)>0, f'\left(\dfrac{1}{2}\right)<0\Rightarrow f'$ có nghiệm

Do đó nó có nghiệm duy nhất a_0; $a_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ nên $f(x)$ tăng trên $(a_0,+\infty)$, giảm trên $(-\infty,a_0)$.

Và do f đơn điệu trên từng khoảng ấy nên nghiệm đó là nghiệm duy nhất trên các khoảng ấy.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 5.

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - 2y^3 - 2\left(x^2 - 3y^2\right) + 3\left(x - 2y\right) - 1 = 0 \\ y^3 - 2z^3 - 2\left(y^2 - 3z^2\right) + 3\left(y - 2z\right) - 1 = 0 \\ z^3 - 2x^3 - 2\left(z^2 - 3x^2\right) + 3\left(z - 2x\right) - 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 2y^3 - 6y^2 + 6y \\ y^3 - 2y^2 + 3y - 1 = 2z^3 - 6z^2 + 6z \\ z^3 - 2z^2 + 3z - 1 = 2x^3 - 6x^2 + 6x \end{cases}$

Đặt $f\left(t\right) = t^3 - 2t^2 + 3t - 1, g\left(t\right) = 2t^3 - 6t^2 + 6t$

Ta có $f'\left(t\right) = 3t^2 - 4t + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, $g'\left(t\right) = 6t^2 - 12t + 6 = 6{(t-1)}^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó $f(t), g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right) = g\left(y\right)(1) \\ f\left(y\right) = g\left(z\right)(2) \\ f\left(z\right) = g\left(x\right)(3) \end{cases}$

Giả sử $(x; y; z)$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho. Không mất tổng quát, giả sử: $x \geq y$

Từ (1) và (2) suy ra : $g\left(y\right) \geq g\left(z\right) \Rightarrow y \geq z$

Từ (2) và (3) suy ra : $g\left(z\right) \geq g\left(x\right) \Rightarrow z \geq x$

Do đó $x = y = z$.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ -x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0\,(4) \end{cases}$

Đặt $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$

$$(4) : {(t+1)}^3 - 4{(t+1)}^2 + 3\left(t+1\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0\,(5)$$

Đặt $h\left(t\right) = t^3 - t^2 - 2t + 1$, ta có $h(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì $h\left(-2\right) = -7 < 0, h\left(0\right) = 1 > 0, h\left(1\right) = -1 < 0, h\left(2\right) = 1 > 0$, nên PT: $h(t) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2, 2)$

Đặt $t = 2\cos\varphi, \varphi \in (0; \pi)$. Khi đó $\sin\varphi \neq 0$

$(5) : 8\cos^3\varphi - 4\cos^2\varphi - 4\cos\varphi + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos\varphi\left(2\cos^2\varphi - 1\right) - 4\left(1 - \sin^2\varphi\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos\varphi.\cos 2\varphi + 4{\sin}^2\varphi - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos\varphi.\cos 2\varphi.\sin\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$

$\Leftrightarrow \sin 4\varphi = \sin 3\varphi$

Với $\varphi \in (0;\pi)$ ta thu được $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}\right\}$. Do đó $t = 2\cos\varphi, \varphi \in \left\{\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}\right\}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $x = y = z = 2\cos\varphi + 1, \varphi \in \left\{\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}\right\}$

Bài tập áp dụng

Bài tập 1. (OLYMPIC 30 - 4 - 2008)

Giải hệ phương trình : $\left\{\begin{array}{l} 2^x - 2 = 3y - 3^x \\ 3^y - 2 = 3x - 2^y \end{array}\right.$

ĐS: $x = y = 0; x = y = 1$

Bài tập 2.

Giải hệ phương trình : $\left\{\begin{array}{l} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{array}\right.$

ĐS: $x = y = 1$

Bài tập 3. (VMO Ọ 1994 BảNG B)

Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{l} x^2 + 3x + \ln(2x+1) = y \\ y^2 + 3y + \ln(2y+1) = x \end{array}\right.$

ĐS: $x = y = 0$

Bài tập 4. (VMO Ọ 1994 BảNG A)

Giải hệ phương trình:

$$\left\{\begin{array}{l} x^3 + 3x - 3 - \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 - \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 - \ln(z^2 - z + 1) = x \end{array}\right.$$

ĐS: $x = y = z = 1$

Bài tập 5. (VMO Ọ 1998)

Giải hệ sau : $\left\{\begin{array}{l} (1 + 4^{2x-y}).5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{array}\right.$ ĐS: $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \end{array}\right.$

Bài tập 6.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 3x + \sqrt{3x+1} - 5 - y = 0 \\ y^3 + 3y + \sqrt{3y+1} - 5 - z = 0 \\ z^3 + 3z + \sqrt{3z+1} - 5 - x = 0 \end{cases}$$

ĐS: $x = y = z = 1$

Bài tập 7.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 4y \\ y^3 - 3y^2 + 5y + 1 = 4z \\ z^3 - 3z^2 + 5z + 1 = 4x \end{cases}$

ĐS: $x = y = z = 1$; $x = y = z = 1 \pm \sqrt{2}$

Bài tập 8.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 30x^2 - 9x^2y - 25y = 0 \\ 30y^2 - 9y^2z - 25z = 0 \\ 30z^2 - 9z^2x - 25x = 0 \end{cases}$

ĐS: $x = y = z = 0$; $x = y = z = 2$

Bài tập 9.

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 5^x = 5\left(4y - 3\right) \\ 5^y = 5\left(4z - 3\right) \\ 5^z = 5\left(4x - 3\right) \end{cases}$

ĐS: $x = y = z = 1$; $x = y = z = 2$

3.9.3 Phương pháp đánh giá

Bài toán 1. (VMO Ọ 2006 BảNG B)

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$$

Lời giải.

Cách 1. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x^2 + 4x + 6\right) = y - 1 \\ (y-1)\left(y^2 + 4y + 6\right) = z - 1 \\ (z-1)\left(z^2 + 4z + 6\right) = x - 1 \end{cases}$

Ta có $x^2 + 4x + 6 > 0, y^2 + 4y + 6 > 0, z^2 + 4z + 6 > 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

TH 1: Nếu $x = 1$, thì suy ra $y = 1, z = 1$. Hệ phương trình có nghiệm (1, 1, 1)

TH 2: Nếu $x \neq 1$, suy ra $y \neq 1, z \neq 1$

Nhân các PT trong hệ vế theo vế ta được :

$$(x-1)(y-1)(z-1)\left(x^2+4x+6\right)\left(y^2+4y+6\right)\left(z^2+4z+6\right)=(x-1)(y-1)(z-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4x+6\right)\left(y^2+4y+6\right)\left(z^2+4z+6\right)=1$$

Điều này không thể xảy ra.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y,z)=(1,1,1)$

Cách 2. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^3-6=y+x\,(1) \\ (y+1)^3-6=z+y\,(2) \\ (z+1)^3-6=x+z\,(3) \end{cases}$

Không mất tổng quát giả sử $x \geq y$

Từ (1) và (2) suy ra $y+x \geq z+y \Rightarrow x \geq z$

Từ (1) và (3) suy ra $y+x \geq x+z \Rightarrow y \geq z$

Từ (2) và (3) suy ra $z+y \geq x+z \Rightarrow y \geq x$

Vậy ta có $x=y=z$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x^3+3x^2+2x-5=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ (x-1)\left(x^2+4x+5\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x=y=z=1$

Bài toán 2. (USA Math Olympiad Progam Ọ 1995)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^4\left(1-2x^2\right)=y^2 \\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=x^3\left(x^3-x+2y^2\right) \end{cases}$$

Lời giải.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-\left(1-x^2y\right)^2}=2x^6-x^4+y^2(1) \\ -\sqrt{1+(x-y)^2}=1-x^6+x^4-2x^3y^2(2) \end{cases}$

Cộng (1) và (2): $\sqrt{4-\left(1-x^2y\right)^2}-\sqrt{1+(x-y)^2}=x^6-2x^3y+y^2+1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-\left(1-x^2y\right)^2}=\sqrt{1+(x-y)^2}+\left(x^3-y\right)^2+1\,(3)$$

Ta có $\sqrt{4-\left(1-x^2y\right)^2} \leq 2$ và $\sqrt{1+(x-y)^2}+\left(x^3-y\right)^2+1 \geq 2$

Do đó PT (3) thỏa mãn khi và chỉ khi : $\begin{cases} 1 - x^2y = 0 \\ x - y = 0 \\ x^3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

Thế $x = y = 1$ vào hệ phương trình ta thấy hệ thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Bài toán 3.

Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2}\,(1) \\ 4xy^3 + y^3 + \dfrac{1}{2} \geq 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2}\,(2) \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $xy - x^2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq xy \leq 1$

Ta có $xy - x^2y^2 = -\left(xy - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{xy - x^2y^2} \leq \dfrac{1}{2}\,(3)$

Từ (1) và (3) suy ra : $\dfrac{1}{2} \geq y^6 + y^3 + 2x^2\,(4)$

Cộng (2) và (4) vế theo vế ta được:

$$4xy^3 + 1 \geq y^6 + 4x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 + (2x - y)^2} \geq \left(y^3 - 2x\right)^2$$

Do $1 - \sqrt{1 + (2x - y)^2} \leq 0, (y^3 - 2x)^2 \geq 0$

Nên ta có: $1 - \sqrt{1 + (2x - y)^2} = (y^3 - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y^3 - 2x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1/2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy chỉ có cặp $\begin{cases} x = -1/2 \\ y = -1 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Kết luận : $\begin{cases} x = -1/2 \\ y = -1 \end{cases}$

Bài toán 4.

Tìm tất cả các số thực x, y, z thoả hệ:

$$\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3\,(1) \\ (2z - y)\,(y + 2) = 9 + 4y\,(2) \\ x^2 + z^2 = 4x\,(3) \\ z \geq 0\,(4) \end{cases}$$

Lời giải.

Ta đánh giá ẩn z. Ta có: (2) $\Leftrightarrow y^2 + 2y(3-z) + 9 - 4z = 0$

PT (2) có nghiệm y khi và chỉ khi:

$\Delta'_y = (3-z)^2 - (9-4z) \geq 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z \leq 0 \\ z \geq 2 \end{array}\right.$ (5)

(3) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + z^2 = 0$

PT (3) có nghiệm x khi và chỉ khi: $\Delta'_x = 4 - z^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq z \leq 2$ (6)

Kết hợp (4), (5), (6) ta có $z = 0$ hoặc $z = 2$.

TH 1: $z = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow y = -3$, (3) $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Thế vào (1) ta có $x = 4; y = -3$ thoả mãn.

TH 2: $z = 2$ thì (2) $\Leftrightarrow y = -1$, (3) $\Leftrightarrow x = 2$

Thế vào (1) ta có $x = 2; y = -1$ thoả mãn.

Tóm lại $\left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}\right.$ và $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}\right.$

Bài toán 5. Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{ll} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right) & (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} & (2) \end{array}\right.$

(I)

Lời giải.

Điều kiện: $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ và $xy \geq 0$.

Từ (1) suy ra $0 \leq x \leq 1$. Do đó $0 \leq y \leq 1$.

Ta có $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y}}\right)^2 \leq 2\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y}\right)$ (3) Ta chứng minh được $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} \leq \dfrac{2}{1+\sqrt{xy}}$ (4) Thật vậy : (4) $\Leftrightarrow 2 + x + y + 2\sqrt{xy} + \sqrt{xy}(x+y) \leq 2 + 2(x+y) + 2xy$

$\Leftrightarrow (1-\sqrt{xy})(x+y) - 2\sqrt{xy}(1-\sqrt{xy}) \geq 0$

$\Leftrightarrow (1-\sqrt{xy})(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ (Bất đẳng thức đúng với mọi x, y thuộc $[0,1]$)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Thay $y = x$ vào (2) ta được $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$ (5)

Đặt $x = \sin t, t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, phương trình (5) trở thành
$\sqrt{1+\cos t} = \sin t(1+2\cos t)$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\dfrac{t}{2} = 2\sin\dfrac{t}{2}.\cos\dfrac{t}{2}.\left[1+2\left(1-2\sin^2\dfrac{t}{2}\right)\right]$
$\Leftrightarrow 3\sin\dfrac{t}{2} - 4\sin^3\dfrac{t}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 3\dfrac{t}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{4\pi}{3} \\ t = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{4\pi}{3} \end{array}\right.$
Với $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ ta được $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{6} \\ t = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$
Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ và (1 ;1)

Bài toán 6. (BA LAN Ọ 1997)

Giải hệ phương trình sau trong tập số thực :

$$\begin{cases} 3\left(x^2+y^2+z^2\right) = 1(1) \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = xyz(x+y+z)^3(2) \end{cases}$$

Lời giải.

* Nếu $x = 0$, (2) $\Rightarrow x^2z^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \vee z = 0$
\+ Với $y = 0$, (1): $3z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
\+ Với $z = 0$, (1): $3y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
Hệ phương trình có các nghiệm

$$\left(0; 0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 0\right)$$

* Nếu $x, y, z \neq 0$, (2) $\Rightarrow x+y+z \neq 0$
(2) $\Leftrightarrow xyz(x+y+z) = \dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{(x+y+z)^2} \geq 0$
Với $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Như vậy:

$$1 = 3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 = \frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz(x+y+z)} \geq \frac{xy^2z+x^2yz+xyz^2}{xyz(x+y+z)} = 1$$

do đó các BĐT trên phải xảy ra dấu bằng nên $x = y = z = \pm\frac{1}{3}$

Kết luận: Hệ phương trình có các nghiệm

$$\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};0;0\right),\left(0;\pm\frac{1}{\sqrt{3}};0\right),\left(0;0;\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Bài tập áp dụng

Bài tập 1. (CA NA ĐA Ọ 2003) Tìm tất cả các nghiệm thực dương của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3 = x+y+z \\ x^2+y^2+z^2 = xyz \end{cases}$$

ĐS: Hệ phương trình vô nghiệm

Bài tập 2. (OLYMPIC ANH Ọ 1998)

Tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} xy+yz+zx = 12 \\ xyz = 2+x+y+z \end{cases}$

trong tập hợp các số thực dương.

ĐS: $x = y = z = 2$.

Bài tập 3. (OLYMPIC ANH Ọ 1996)

Tìm tất cả các nghiệm thực dương của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \mathrm{w}+x+y+z = 12 \\ \mathrm{w}xyz = \mathrm{w}x+\mathrm{w}y+\mathrm{w}z+xy+xz+yz+27 \end{cases}$$

ĐS: $\mathrm{w} = x = y = z = 3$

Bài tập 4. (UKRAINA Ọ 1997)

Tìm tất cả các nghiệm trong tập hợp số thực của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1+x_2+...+x_{1997} = 1997 \\ x_1^4+x_2^4+...+x_{1997}^4 = x_1^3+x_2^3+...+x_{1997}^3 \end{cases}$$

ĐS: $x_1 = x_2 = ... = x_{1997} = 1$

Bài tập 5. (VMO Ọ 2009)

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

ĐS: $x = y = \dfrac{9+\sqrt{73}}{18}; x = y = \dfrac{9-\sqrt{73}}{18}$

Bài tập 6.

Cho a là một số thực dương cho trước. Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{a}{x_1}\right) \\ x_3 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{a}{x_2}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right) \\ x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) \end{cases}$$

ĐS: $x_1 = x_2 = ... = x_n = \sqrt{a}; x_1 = x_2 = ... = x_n = -\sqrt{a}$

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục, 1993.

2. Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Nguyễn Văn Tiến, *Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông*, NXB Giáo Dục Việt Nam, 2009.

3. Tạp chí toán học và tuổi trẻ, *Tuyển tập 5 năm*, NXB Giáo Dục, 2003.

4. Tài liệu từ Internet.

3.10 Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số và ứng dụng của nó

Nguyễn Tiến Tuấn

Trường THPT Chuyên Chu Văn An, Lạng Sơn

3.10.1 Phần lý thuyết

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D. Khi đó

+) M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số trên D. KH: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ thoả mãn $f(x) \leq M$, $\forall x \in D$

Tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $M = f(x_0)$.

+) m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D. KH: $M = \min\limits_{x \in D} f(x)$ thoả mãn $f(x) \geq M$, $\forall x \in D$

Tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $M = f(x_0)$.

Tính chất:

a) Tính chất 1: Giả sử $f(x)$ xác định trên D và A, B là hai tập con của $D(A \subseteq B)$. Giả sử tồn tại $\max\limits_{x \in A} f(x), \max\limits_{x \in B} f(x), \min\limits_{x \in A} f(x), \min\limits_{x \in B} f(x)$. Khi đó, ta có $\max\limits_{x \in A} f(x) \leq \max\limits_{x \in B} f(x)$ và $\min\limits_{x \in A} f(x) \geq \min\limits_{x \in B} f(x)$.

CM: Giả sủ $\max\limits_{x \in A} f(x) = f(x_0)$ với $x_0 \in A$. Do $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in B \ (A \subseteq B)$.

Theo định nghĩa ta có $f(x_0) \leq \max\limits_{x \in B} f(x)$ hay $\max\limits_{x \in A} f(x) \leq \max\limits_{x \in B} f(x)$.

b) Tính chất 2: Hàm số $f(x)$ xác định trên D và tồn tại $\max\limits_{x \in D} f(x)$ và $\min\limits_{x \in D} f(x)$

Khi đó, ta có: $\max\limits_{x \in D} f(x) = -\min\limits_{x \in D} (-f(x))$ và $\min\limits_{x \in D} f(x) = -\max\limits_{x \in D} (-f(x))$

c) Tính chất 3: Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số xác định trên D và $f(x) \geq g(x)$ với mọi x thuộc D.

Khi đó $\max\limits_{x \in D} f(x) \geq \max\limits_{x \in D} g(x)$

d) Tính chất 4: Giả sử $f(x)$ xác định trên D và $D = D_1 \cup D_2$. Giả thiết tồn tại $\max\limits_{x\in D_i} f(x)$ và $\min\limits_{x\in D_i} f(x)$ với $i = \overline{1,n}$. Khi đó $\max\limits_{x\in D} f(x) = \max\left\{\max\limits_{x\in D_1} f(x), \max\limits_{x\in D_2} f(x)\right\}$ và $\min\limits_{x\in D} f(x) = \min\left\{\min\limits_{x\in D_1} f(x), \min\limits_{x\in D_2} f(x)\right\}$.

e) Tính chất 5: Cho các hàm số $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ cùng xác định trên D.

Đặt $f(x) = f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$. Giả thiết tồn tại $\max\limits_{x\in D} f(x)$, $\min\limits_{x\in D} f(x), \max\limits_{x\in D} f_i(x), \min\limits_{x\in D} f_i(x)$ với $i = \overline{1,n}$. Khi đó, ta có

$$\max_{x\in D} f(x) \le \max_{x\in D} f_1(x) + \max_{x\in D} f_2(x) + \cdots + \max_{x\in D} f_n(x)$$

Dấu Ỏ = Õ xảy khi và chỉ khi tồn tại x_0 thuộc D sao cho $\max\limits_{x\in D} f_i(x) = f_i(x_0)$ với $i = \overline{1,n}$.

$$\min_{x\in D} f(x) \ge \min_{x\in D} f_1(x) + \min_{x\in D} f_2(x) + \cdots + \min_{x\in D} f_n(x)$$

Dấu Ỏ = Õ xảy khi và chỉ khi tồn tại x_0 thuộc D sao cho $\min\limits_{x\in D} f_i(x) = f_i(x_0)$ với $i = \overline{1,n}$.

f) Tính chất 6: Cho các hàm số $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ cùng xác định trên D và $f_i(x) > 0$.

Đặt $f(x) = f_1(x).f_2(x)\ldots f_n(x)$. Giả thiết tồn tại $\max\limits_{x\in D} f(x)$, $\min\limits_{x\in D} f(x), \max\limits_{x\in D} f_i(x), \min\limits_{x\in D} f_i(x)$ với $i = \overline{1,n}$. Khi đó, ta có

$$\max_{x\in D} f(x) \le (\max_{x\in D} f_1(x))(\max_{x\in D} f_2(x))\ldots(\max_{x\in D} f_n(x))$$

$$\min_{x\in D} f(x) \le \min_{x\in D} f_1(x) \min_{x\in D} f_2(x) \ldots \min_{x\in D} f_n(x)$$

3.10.2 Phần bài tập

Bài toán 3.42. *Chuyên đề 1: Phương pháp bất đẳng thức*

I/ LÝ THUYẾT:

Bất đẳng thức AM-GM: Cho $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ là các số không âm. Khi đó

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}$$

Dấu Ỏ = Õ xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. *Bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski:* Cho $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ là $2n$ số bất kì. Khi đó,

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \qquad (1)$$

Dấu Ỏ = Õ xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

II/ BÀI TẬP:

Bất đẳng thức AM-GM

Bài 1: Cho hàm số

$$y = \sqrt[4]{1 - x^2} + \sqrt[4]{1 - x} + \sqrt[4]{1 + x}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Hàm số có TXĐ: $D = [-1; 1]$.

Với mọi $x \in D$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt[4]{1 - x^2} = \sqrt[4]{1 - x}.\sqrt[4]{1 + x} \leq \frac{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}{2} \qquad (1)$$

$$\sqrt[4]{1 - x} = \sqrt[4]{1 - x}.1 \leq \frac{\sqrt{1 - x} + 1}{2} \qquad (2)$$

$$\sqrt[4]{1 + x} = \sqrt[4]{1 + x}.1 \leq \frac{\sqrt{1 + x} + 1}{2} \qquad (3)$$

Cộng vế với vế 3 đẳng thức trên ta có $f(x) \leq 1 + \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$ (4) với mọi $x \in D$.

Dấu Ò = Õ xảy ra khi và chỉ khi dấu Ò = Õ ở (1), (2) và (3) cùng xảy ra. Mà dấu Ò = Õ ở (1), (2) và (3) xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

áp dụng bất đẳng thức AM-GM, với mọi $x \in D$, ta có:

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x}.1 \leq \frac{1-x+1}{2} \tag{5}$$

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+x}.1 \leq \frac{1+x+1}{2} \tag{6}$$

Suy ra

$$f(x) \leq 1 + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{2-x}{2} + \frac{2+x}{2} = 3 \tag{7}$$

Dấu Ò = Õ xảy ra khi và chỉ khi dấu Ò = Õ trong (5) và (6) xảy ra. Dấu Ò = Õ trong (5) và (6) xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Từ (4) và (7) suy ra $f(x) \leq 3$ với mọi $x \in D$ mà $f(0) = 3$ và $0 \in D$ nên $\max\limits_{x \in D} f(x) = 3$.

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{1 - x - 2x^2}.$$

Hàm số có TXĐ: $D = \left[-1; \frac{1}{2}\right]$ Với mọi $x \in D$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\sqrt{1-x-2x^2} = \sqrt{1(1-x-2x^2)} \leq \frac{1+1-x-2x^2}{2} = \frac{2-x-2x^2}{2}$$

Khi đó $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{1-x-2x^2} \leq \frac{x}{2} + \frac{2-x-2x^2}{2} = 1 - x^2 \leq 1$ với mọi $x \in D$

Dấu Ò = Õ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 = 1 - x - 2x^2 \\ 1 - x^2 = 1 \\ -1 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Suy ra $\max\limits_{x\in D} f(x) = 1$.

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-y}}$ trên miền $D = \{(x,y) : x > 0, y > 0, x + y = 1\}$.

Hướng dẫn. (66)

Lấy $(x,y) \in D$. Khi đó $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-y}} = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{x} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow f(x,y) + \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

Hay

$$f(x,y) \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{4}$$

Mặt khác

$$f(x,y) = \frac{1-y}{\sqrt{y}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra $2f(x,y) \geq \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ hay

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \tag{6}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} \geq \dfrac{2}{\sqrt[4]{xy}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}} = 2\sqrt{2}$ vì $x + y = 1$ (7).

Từ (7) suy ra $f(x,y) \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right) \geq \dfrac{1}{2}2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Dấu Ỏ=Õ xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y}$ hay $x = y = \dfrac{1}{2}$ Mà $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \in D$ và $f\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$. Vậy $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = \sqrt{2}$.

Bài 4: Tìm các giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ trên miền $D = \{(x,y):\ x > y > 0\}$, trong đó

$$f(x,y) = x + \frac{1}{y(x-y)}$$

$$g(x,y) = x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2}$$

$$h(x,y) = x + \frac{1}{y(x-y)^2}$$

Hướng dẫn.

Lấy $(x,y) \in D$ tuỳ ý. Khi đó, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$f(x,y) = x + \frac{1}{y(x-y)} = y + (x-y) + \frac{1}{y(x-y)} \geq 3\sqrt[3]{y(x-y)\frac{1}{y(x-y)}} = 3$$

Dấu Ỏ = Õ xảy ra khi và chỉ khi $y = xy = \dfrac{1}{y(x-y)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Có $(2,1) \in D$ và $f(2,1) = 3$. Vậy $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 3$.

Lấy $(x,y) \in D$ tuỳ ý. Khi đó, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} g(x,y) = x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} &= (x-y) + \frac{y+1}{2} + \frac{y+1}{2} + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} - 1 \\ &\geq 4\sqrt[4]{(x-y).\frac{y+1}{2}.\frac{y+1}{2}.\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}} - 1 = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Dấu Ỏ = Õ xảy ra khi và chỉ khi

$$x - y = \frac{y+1}{2} = \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Có $(2,1) \in D$ và $g(2,1) = 3$. Vậy $\min\limits_{(x,y)\in D} g(x,y) = 3$.

Lấy $(x,y) \in D$ tuỳ ý. Khi đó, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$h(x,y) = y + \frac{x-y}{2} + \frac{x-y}{2} + \frac{1}{y(x-y)^2} \geq 4\sqrt[4]{y.\left(\frac{x-y}{2}\right)^2.\frac{1}{y(x-y)^2}} = \frac{4}{\sqrt[4]{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Dấu Ỏ = Õ xảy ra khi và chỉ khi

$$y = \frac{x-y}{2} = \frac{1}{y(x-y)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{3} \\ y = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

Có $\left(\sqrt[3]{3}, \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}\right) \in D$ và $h\left(\sqrt[3]{3}, \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$. Vậy $\min\limits_{(x,y)\in D} h(x,y) = 2\sqrt{2}$.

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y,z) = (xyz+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} - x - y - z$$

trên miền $D = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$

Hướng dẫn.

Ta có $f(x,y,z) = yz + \dfrac{y}{z} + xz + \dfrac{z}{x} + xy + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - x - y - z$ Lấy (x,y,z) tuỳ ý thuộc D. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$yz + \frac{y}{z} \geq 2y,\ xz + \frac{z}{x} \geq 2z,\ xy + \frac{x}{y} \geq 2x$$

Khi đó

$$f(x,y,z) \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+x+y+z = \left(\frac{1}{x}+x\right)+\left(\frac{1}{y}+y\right)+\left(\frac{1}{z}+z\right) \geq 6$$

Dấu Ỏ = Õ xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vì (1, 1, 1) thuộc D và $f(1,1,1) = 6$ nên $\min\limits_{x\in D} f(x,y,z) = 6$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y,z) = \left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(2+\dfrac{1}{y}\right)\left(2+\dfrac{1}{z}\right)$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x,y,z) = x + 16xyz, h(x,y,z) = x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}$ trên miền $D = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z = 1\}$.

Hướng dẫn. (57)

Lấy $(x,y,z) \in D$ tuỳ ý. áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$2 + \frac{1}{x} = 1 + 1 + \frac{x+y+z}{x} = 1 + 1 + 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \geq 5\sqrt[5]{\frac{yz}{x^2}}$$

$$2+\frac{1}{y}=1+1+\frac{x+y+z}{y}=1+1+1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}\geq 5\sqrt[5]{\frac{xz}{y^2}}$$

$$2+\frac{1}{z}=1+1+\frac{x+y+z}{z}=1+1+1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\geq 5\sqrt[5]{\frac{xy}{z^2}}$$

Nhân vế với vế của ba bất đẳng thức ta có, $f(x,y,z)\geq 125$ với mọi (x,y,z) thuộc D.

Dấu Ỏ=Õ xảy ra khi và chỉ khi $\frac{y}{x}=\frac{z}{x}=\frac{x}{y}=\frac{z}{y}=\frac{x}{z}=\frac{y}{z}=1\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$

Mà $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\in D$ và $f\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=125$. Vậy $\min\limits_{(x,y,z)\in D} f\left(x,y,z\right)=125.$

Lấy $(x,y,z)\in D$ với $x+y+z=1$ khi đó

$$g(x,y,z)=1-(y+z)+16yz(1-y-z)=1+16yz-(y+z)(1+16yz)$$

áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $y+z\geq 2\sqrt{yz}$ và $1+16yz\geq 8\sqrt{yz}\Rightarrow (y+z)(1+16yz)\geq 16yz$

Khi đó $g(x,y,z)\leq 1+16yz-16yz=1$

Dấu Ỏ=Õ xảy ra khi và chỉ khi

$$\left\{\begin{array}{l} y=z\\ 16yz=1\\ x+y+z=1\\ x>0,y>0,z>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\\ y=z=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

Mà $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\in D$ và $g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=1$. Vậy $\max\limits_{(x,y,z)\in D}=g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=1.$

Bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x,y,z)=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$ trên miền $D=\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}$.

Hướng dẫn. Lấy (x,y,z) thuộc D. Khi đó, ta có

$$f(x,y,z)=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{y+1}\right)+\left(1-\frac{1}{z+1}\right)=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\quad(1)$$

(1) áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski cho hai cặp số $\left(\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}, \sqrt{\dfrac{1}{y+1}}, \sqrt{\dfrac{1}{z+1}}\right)$ và $\left(\sqrt{x+1}, \sqrt{y+1}, \sqrt{z+1}\right)$

có

$$\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)((x+1)+(y+1)+(z+1)) \geq (1+1+1)^2 = 9 \tag{2}$$

Mà $x+y+z=1$ từ (2) suy ra

$$\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right) \geq \frac{9}{4} \tag{3}$$

Kết hợp (1) và (3) suy ra $f(x,y,z) \leq 3-\dfrac{9}{4} = \dfrac{4}{3}$ có $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \in D$ và $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$.

Vậy $\max\limits_{x\in D} f(x,y,z) = \dfrac{4}{3}$.

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x,y,z) = y(z-x)$ trên miền $D = \{(x,y,z) : x^2+z^2 = 1,\ y^2+2y(x+y) = 6\}$.

Hướng dẫn. Ta có $f(x,y,z) = y(zx) = z(2x+y)+(-x)(2z+y)$

áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski cho hai cặp số $(z,(-x))$ và $(2x+y, 2z+y)$ ta có

$$\left(z^2+(-x)^2\right)\left((2x+y)^2+(2z+y)^2\right) \geq [z(2x+y)+(-x)(2z+y)]^2 = [y(z-x)]^2$$

Mà $x^2+z^2=1$ và $(2x+y)^2+(2z+y)^2 = 2y^2+4y(x+z)+4(x^2+y^2) = 16$ vì $y^2+2y(x+z)=6$

Khi đó $[y(z-x)]^2 \leq 1.16 = 16 \Leftrightarrow y(z-x) \leq 4$ hay $f(x,y,z) \leq 4$.

Dấu Ỏ = Õ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y^2+2y(x+z)=6 \\ \dfrac{z}{-x} = \dfrac{2x+y}{2z+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ y = \sqrt{10} \\ z = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Có $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}, \sqrt{10}, \dfrac{1}{10}\right) \in D, f\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}, \sqrt{10}, \dfrac{1}{10}\right) = 4$. Vậy $\max\limits_{x\in D} f(x,y,z) = 4$.

Bài 9 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y) = \dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{y^2}{1-y} + \dfrac{1}{x+y} + x + y$ trên miền $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Hướng dẫn. Với mọi (x,y) thuộc D ta có

$$f(x,y) = \frac{x^2}{1-x} + 1 + x + \frac{y^2}{1-y} + 1 + y + \frac{1}{x+y} - 2 = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} - 2 \quad (1)$$

áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski cho hai cặp số $\left(\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}, \sqrt{\dfrac{1}{1-y}}, \sqrt{\dfrac{1}{x+y}}\right)$ và $(\sqrt{1-x}, \sqrt{1-y}, \sqrt{x+y})$.

Ta có

$$\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z}\right)((1-x) + (1-y) + (x+y)) \geq (1+1+1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{9}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(x,y) \geq \dfrac{9}{2} - 2 = \dfrac{5}{2}$. Dấu Ỏ = Õ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x+y} \\ \dfrac{1}{1-y} = \dfrac{1}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$$

Có $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \in D, f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{2}$. Vậy $\min\limits_{x\in D} f(x,y) = \dfrac{5}{2}$.

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y,z) = x+y+z$ trên miền $D = \left\{(x,y,z) : x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq \dfrac{4}{3}\right\}$

Hướng dẫn. Lấy (x,y,z) thuộc D. Khi đó

$$x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \leq 3(x+y+z) + 4$$

áp dụng bất đẳng thứ Cauchy-Bunhiacovski cho hai cặp số $(1,1,1)$ và (x,y,z) ta có:

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

Bài 10: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x, y, z) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} + \sqrt[4]{z}$ trên miền $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$

Hướng dẫn.

Xét hàm số $f(x, y, z) = x^3+y^3+z^3$ trên $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z$

Lấy (x, y, z) thuộc D. áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski cho hai cặp số $\left(x\sqrt{x}, y\sqrt{y}, z\sqrt{z}\right)$ và $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$

Ta có

$$f(x, y, z) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \tag{1}$$

do $x + y + z = 1$.

áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski cho cặp số $(1, 1, 1)$ và (x, y, z)

Ta có

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x, y, z) \geq \dfrac{1}{9}$.

Dấu Ỏ = Õ xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ Có $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \in D, f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{9}$. Vậy $\min\limits_{x \in D} f(x, y, z) = \dfrac{1}{9}$.

Lấy (x, y, z) thuộc D. áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski cho hai cặp số $\left(\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{z}\right)$ và (1, 1, 1) Ta có

$$3(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} + \sqrt[4]{z}\right)^2 \tag{3}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski cho hai cặp số $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$ và (1, 1, 1)

Ta có

$$3(x + y + z) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3} \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra $g^2(x,y,z) \le 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ hay $g(x,y,z) \le \sqrt[4]{27}$.

Dấu Ỏ = Õ xảy ra dấu Ỏ = Õ ở (3) và (4) cùng xảy ra hay $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Có $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in D, g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{27}$. Vậy $\max\limits_{x \in D} f(x,y,z) = \sqrt[4]{27}$

Chuyên đề 2: Phương pháp miền giá trị hàm số

Phương pháp: Xét bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên một miền D cho trước.

B 1: Gọi y_0 là một giá trị tuỳ ý của hàm số $f(x)$ trên D.

B 2: Giải điều kiện để hệ phương trình (ẩn x): $\begin{cases} f(x) = y_0 \\ x \in D \end{cases}$

B 3: Biến đổi đưa hệ phương trình về dạng: $\alpha \le y_0 \le \beta$.

B 4: Vì y_0 là giá trị bất kì trên D. Đưa ra kết luận.

BàI TậP:

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+23}{x^2+2x+10}$ trên toàn trục số.

TXĐ: $\mathbb{R}$. Gọi y_0 là một giá trị của hàm số. Khi đó, phương trình $\dfrac{2x^2+7x+23}{x^2+2x+10} = y_0$ (1) có nghiệm.

Vì $x^2+2x+10 > 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2+7x+23 = y_0(x^2+2x+10) \Leftrightarrow (y_0-2)x^2+(2y_0-7)x+10y_0-23 = 0 \quad (2)$$

có nghiệm

TH 1: $y_0 = 2$ phương trình (2) trở thành $-3x-3=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow$ (1) có nghiệm.

TH 2: $y_0 \ne 0$, khi đó phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \ge 0$

$$\Leftrightarrow \Delta = (2y_0-7)^2 - 4(y_0-2)(10y_0-23) \ge 0$$

$$\Rightarrow 9y_0^2 - 16y_0 + 15 \le 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le y_0 \le \frac{5}{2}, y_0 \ne 2$$

Vì y_0 là một giá trị tuỳ ý của hàm số $y = f(x)$, nên

$$\max_{x\in R} f(x) = \frac{5}{2}, \quad \min_{x\in R} f(x) = \frac{3}{2}$$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1}$$

Đ/S: $-1 \le y_0 \le 5$.

Bài 3: (98 Ọ 191) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{2x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$$

Đ/ S: $\dfrac{1 - \sqrt{153}}{4} \le y_0 \le \dfrac{1 + \sqrt{153}}{4}$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2$ trên một miền $D = \left\{(x, y) : (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0\right\}$.

Hướng dẫn. Gọi t_0 là một giá trị tuỳ ý của hàm số $f(x, y)$ trên D.

Khi đó, hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t_0 & (1) \\ (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

có nghiệm

Từ (2) $\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = 0$ thế (1) vào được phương trình $t_0^2 - 3t_0 + 1 + 4x^2 = 0$ (3)

Để hệ có nghiệm thì (3) có nghiệm $\Leftrightarrow t_0^2 - 3t_0 + 1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \le t_0 \le \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Khi đó, (3) có nghiệm $x^2 = \dfrac{-t_0^2 + 3t_0 - 1}{4}$ thế vào (2) $y^2 = \dfrac{t_0^2 + t_0 + 1}{4}$ thoả mãn có nghiệm.

Mà t_0 là một giá trị tuỳ ý của $f(x,y)$ trên D nên $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ và $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y) = \dfrac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$ trên miền $D = \{(x,y) : x+y=1\}$.

Hướng dẫn. Gọi t_0 là một giá trị tuỳ ý của hàm số $f(x,y)$ trên D.

Khi đó, hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x+2y+1}{x^2+y^2+7} = t_0 & (1) \\ x+y=1 & (2) \end{cases}$$

có nghiệm

Từ (2) có $x = 1-y$ thế vào (1) $\Leftrightarrow y+2 = [(1-y^2)+y^2+7]\ \ t_0$ vì $x^2+y^2+7>0$.

$$\Leftrightarrow 2t_0y^2 - (2t_0+1)y + 8t_0 - 2 = 0 \qquad (3)$$

Để hệ có nghiệm thì (3) có nghiệm

TH 1: $t_0 = 0$ khi đó, (3) trở thành $-y-2=0 \Leftrightarrow y=-2, x=3$. Phương trình có nghiệm.

TH 2: $t_0 \neq 0$ được phương trình bậc hai, phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta = (2t_0+1)^2 - 8t_0(8t_0-2) \geq 0 \Leftrightarrow 60t_0^2 - 20t_0 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{5-2\sqrt{10}}{30} \leq t_0 \leq \dfrac{5+2\sqrt{10}}{20},\ t_0 \neq 0$

Kết hợp (3) có nghiệm khi $\dfrac{5-2\sqrt{10}}{30} \leq t_0 \leq \dfrac{5+2\sqrt{10}}{20}$

Vì t_0 là một giá trị bất kì của $f(x,y)$ trên D nên $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = \dfrac{5+2\sqrt{10}}{30}$ và $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = \dfrac{5-\sqrt{10}}{30}$.

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y) = \dfrac{x^2-(x-4y)^2}{x^2+4y^2}$ trên $D = \{(x,y) : x^2+y^2>0\}$.

Hướng dẫn. Xét $D_1 = \{(x, y) : x \neq 0, y = 0\}$ và $D_2 = \{(x, y) : y \neq 0\}$. Khi đó $D = D_1 \cup D_2$.

Nếu $(x, y) \in D_1$ thì $f(x, y) = 0$. Vậy $\max\limits_{x\in D_1} f(x, y) = \min\limits_{x\in D_1} f(x, y) = 0$.

Nếu $(x, y) \in D_2$. Khi đó, ta có $f(x, y) = \dfrac{(x/2y)^2 - (x/2y - 2)^2}{(x/2y)^2 + 1}$

Đặt $t = \dfrac{x}{2y}$, được hàm số $F(t) = \dfrac{t^2 - (t-2)^2}{t^2+1} = \dfrac{4t-4}{t^2+1}$

Khi đó

$$\max_{(x,y)\in D_2} f(x, y) = \max_{t\in R} F(t), \quad \min_{(x,y)\in D_2} f(x, y) = \min_{t\in R} F(t)$$

Gọi α là một giá trị bất kì của hàm số $F(t)$.

Khi đó, phương trình $\dfrac{4t-4}{t^2+1} = \alpha \Leftrightarrow \alpha t^2 - 4t + \alpha + 4 = 0$ (1) có nghiệm

TH 1: Với $\alpha = 0$ phương trình (1) có nghiệm $t = 1$.

TH 2: Với $\alpha \neq 0$ phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - \alpha(\alpha+4) \geq 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{2} \leq \alpha \leq -2 + 2\sqrt{2},\ \alpha \neq 0$$

Kết hợp (1) có nghiệm khi $-2-2\sqrt{2} \leq \alpha \leq -2+2\sqrt{2}$ Suy ra $\max\limits_{(x,y)\in D_2} f(x, y) = \max\limits_{t\in R} F(t) = -2 + 2\sqrt{2}$ và $\min\limits_{(x,y)\in D_2} f(x, y) = \min\limits_{t\in R} F(t) = -2 - 2\sqrt{2}$

Vậy

$$\max_{x\in D} f(x, y) = \max\left\{\max_{x\in D_1} f(x, y), \max_{x\in D_2} f(x, y)\right\} = \max\left\{0, -2 + 2\sqrt{2}\right\} = -2+2\sqrt{2}$$

$$\min_{x\in D} f(x, y) = \min\left\{\min_{x\in D_1} f(x, y), \min_{x\in D_2} f(x, y)\right\} = \min\left\{0, -2 - 2\sqrt{2}\right\} = -2-2\sqrt{2}$$

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1+x^2)^2}$$

Hướng dẫn. Gọi y_0 là một giá trị tuỳ ỳ của $f(x)$.

Khi đó, phương trình $\dfrac{3+4x^2+3x^4}{(1+x^2)^2} = y_0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (y_0-3)x^4 + 2(y_0-2)x^2 + y_0 - 3 = 0 \qquad (1)$$

Để (1) có nghiệm xét hai TH

TH 1: $y_0 = 3$ khi đó (1) trở thành $x^2 = 0$. Vậy (1) có nghiệm.

TH 2: (1) có nghiệm khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ (y_0-3)t^2 + 2(y_0-2) + y_0 - 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Để (1) có nghiệm (2) có nghiệm $t \geq 0$ mà (2) có $P = 1 > 0 \Rightarrow$ (2) có 2 nghiệm cùng dấu.

Khi đó, (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq t_0 \leq 3$$

Kết hợp hai trường hợp (1) có nghiệm khi $\dfrac{5}{2} \leq t_0 \leq 3$.

Bài 8: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+px+q}{x^2+1}$. Tìm p, q để $\max\limits_{x\in R} f(x) = 9$, $\min\limits_{x\in R} f(x) = -1$

Hướng dẫn. Gọi y_0 là một giá trị tuỳ ý của hàm số $f(x)$.

Khi đó, phương trình $\dfrac{x^2+px+q}{x^2+1} = y_0$ (1) có nghiệm.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (y_0-1)x^2 - px + (y_0-q) = 0$ (2).

Để (1) có nghiệm thì (2) có nghiệm, xét 2 trường hợp

TH 1: $y_0 = 1$ thì (2) có nghiệm khi $p \neq 0$ hoặc $p = 0$ và $q = 1$.

TH 2: $y_0 \neq 1$ thì (2) có nghiệm khi $\Delta = p^2 - 4(y_0-1)(y_0-q) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4y_0^2 - 4(q+1)y_0 - (p^2-4q) \leq 0 \Leftrightarrow y_1 \leq y_0 \leq y_2$$

Ta có $y_1 \leq 1 \leq y_2$ vì với $y_0 = 1$ có $\Delta = -p^2 \leq 0\ \forall q$

Kết hợp hai trường hợp ta có để (1) có nghiệm là $y_1 \leq y_0 \leq y_2$.

Khi đó, tacó $\min\limits_{x\in R} f(x) = y_1,\ \max\limits_{x\in R} f(x) = y_2$

Theo viét ta có

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = q + 1 = 8 \\ y_1.y_2 = \dfrac{p^2 - 4q}{4} = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 7 \\ p = \pm 8 \end{cases}$$

Bài 9: Cho hàm số $y = \dfrac{12x(x+a)}{x^2+36}$ tìm a nguyên khác 0 sao cho đại lượng $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ cũng là số nguyên.

Hướng dẫn. Gọi y_0 là một giá trị tuỳ ý của hàm số $f(x)$.

Khi đó, phương trình $\dfrac{12x(x+a)}{x^2+36} = y_0$ (1) có nghiệm

Từ (1) ta có $(y_0 - 12)x^2 + 12ax + 36y_0 = 0 \quad (2)$

Để (1) có nghiệm thì (2) có nghiệm. Để (2) có nghiệm xét hai trường hợp

TH 1: $y_0 = 12$ có (2) trở thành $x = 0$. Vậy (2) có nghiệm

TH 2: $y_0 \neq 12$ thì (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 36a^2 - 36y_0(y_0 - 12) \geq 0 \Leftrightarrow y_0^2 - 12y_0 - a^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - \sqrt{36 + a^2} \leq y_0 \leq 6 + \sqrt{36 + a^2}$$

Nhận thấy $y_0 = 0$ thì $\Delta' = -a^2 < 0 \quad \forall a$ do vậy $6 - \sqrt{36 + a^2} \leq 0 \leq 6 + \sqrt{36 + a^2}$

Kết hợp hai trường hợp để (1) có nghiệm thì $6 - \sqrt{36 + a^2} \leq y_0 \leq 6 + \sqrt{36 + a^2}$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 6 + \sqrt{36 + a^2}$.

Tìm a nguyên khác 0 để $\sqrt{36 + a^2} = k$ (3) nguyên dương.

Nếu $a > 0$ thoả mãn (3) thì $-a$ cũng thoả mãn 3, xét $a > 0$ khi đó, (3)$\Leftrightarrow 36 = k^2 - a^2 = (k - a)(k + a)$

Vì $k + a > 0$ suy ra $k - a > 0$ và $k + a$ và $k - a$ là số nguyên. Suy ra $\begin{cases} k - a = 2 \\ k + a = 18 \end{cases} \Leftrightarrow a = 8.$

Chuyên đề 3: Phương pháp sử dụng đạo hàm của hàm số.

Phương pháp: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a; b]$

B 1: Giải phương trình $f(x) = 0$ để tìm các nghiệm $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ trong $[a; b]$.

B 2: Tính các số $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.

B 3: Kết luận giá trị lớn nhất là số lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là số nhỏ nhất trong các giá trị trên.

BàI TậP:

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin^{20}x + \cos^{20}x$$

Hướng dẫn. Do $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^{20}x + \sin^{20}x \Rightarrow$ hàm số $y = \sin^{20}x + \cos^{20}x$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{2}$. Do vậy, ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên 1 chu kì $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $y' = 20\sin^{19}x.\cos x - 20\cos^{19}x.\sin x$. Xét $y = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

Kết luận:

$$\max_{x \in R} y = 1\, khi\, x = 0; x = \frac{\pi}{2},\ \min_{x \in R} y = \frac{1}{512}\, khi\, x = \frac{\pi}{4}$$

Chuyên đề 4: Phương pháp chiều biến thiên của hàm số

Phương pháp: Dựa vào tính đồng biến và nghịch biến của hàm số bậc nhất và bậc hai. Lập bảng biến thiên của hàm $f(x)$ cần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên D cho trước.

Tính chất 1

+) Hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

+) Hàm số $y = ax^2 + bx + c$:

Nếu $a > 0$: Đồng biến khi $x > -\dfrac{b}{2a}$, nghịch biến khi $x < -\dfrac{b}{2a}$. Nếu $a < 0$: Đồng biến khi $x < -\dfrac{b}{2a}$, nghịch biến khi $x > -\dfrac{b}{2a}$.

Tính chất 2:

+) Nếu $f(x)$ là hàm đồng biến trên D thì $-f(x)$ là hàm nghịch biến trên D.

+) Nếu $f(x)$ là hàm đồng biến trên D và $f(x) > 0$ thì hàm $\dfrac{1}{f(x)}$ nghịch biến trên D.

Tính chất 3:

+) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm đồng biến trên D thì hàm $f(x)+g(x)$ cũng đồng biến trên D.

+) Nếu $f(x), g(x)$ là hai hàm đồng biến trên D và $f(x) > 0, g(x) > 0$ trên D thì hàm $f(x).g(x)$ cũng đồng biến trên D.

BàI TậP

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |2x - 4| + |3x + 6| - |x - 3| + |x + 1|$ xét trên miền $D = \{x : -3 \leq x \leq 4\}$.

Hướng dẫn. Lập bảng biến thiên của hàm số trên D

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 3x + 2| - |2x + 4| + |x^2 - 7x + 12|$ trên miền $D = \{x : -3 \leq x \leq 5\}$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y, z) = x + y + z + xy + yz + zx$ trên miền $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x - 3$ trên miền $D = \{x : -1 \leq x \leq 4\}$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ trên miền $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 2\}$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2}$ trên miền $D = \{x : -3 \leq x \leq 6\}$

Bài 7: Cho hàm số $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$ xét trên miền $D = \{x : -2 \leq x \leq 0\}$. Tìm a để hàm số có $\min\limits_{x\in D} f(x) = 2$.

Bài 8: Cho phương trình $2x^2 + 2(m+2)x + m^3 + 4m + 3 = 0$. Khi phương trình có nghiệm x_1, x_2 xét đại lượng $A = x_1 + x_2 + 3x_1x_2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -x^2 + mx + 1$ trên miền $-1 \leq x \leq 1$. Biện luận kết quả theo m.

Bài 10: Cho hàm số $f(x) = x^2 + |x-a|$. Tìm a để $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) > 1$.

Chuyên đề 5: ứng dụng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong việc giải và biện luận phương trình và bất phương trình.

Phương pháp: Biến đổi phương trình về dạng $f(x) = d(m)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên I và so sánh các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất với a. Từ đó suy ra nghiệm của phương trình.

3.10.3 Bài tập

Bài 1:

a. Tìm m để phương trình $x + \sqrt{2x^2+1} = m$ có nghiệm.

b. Tìm m để bất phương trình $x + \sqrt{2x^2+1} > m \ \forall x \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn. Xét hàm số $y = x + \sqrt{2x^2+1} \Rightarrow y' = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = -2x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x < 0 \\ 2x^2+1 = 4x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ Bảng biến thiên:

Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bất phương trình $f(x) > m$ có nghiệm với mọi m khi $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > m$

Bài 2: Tìm m để phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(2-x)(2+x)} = m$ có nghiệm.

Bài 3: Tìm m để bất phương trình $mx^4 - 4x + m \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn. Bất phương trình $\Leftrightarrow m(x^4+1) \geq 4x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{4x}{x^4+1} \leq m$. Có

$$f'(x) = \frac{4(1-3x^4)}{(1+x^4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

Bảng biến thiên:

Vậy để bất phương trình nghiệm đúng mọi x thì

$$\max_{x\in R} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \sqrt[4]{27} \leq m$$