

CD9: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ

Dạng 1. Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Giá trị của x trong biểu thức $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,25$ là:

A. $\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$ C. $\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}$ D. $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$ với a, b, c thỏa mãn: $(3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0$.

Câu 2. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa 2022 - 2023)

Cho $\frac{a - 2b + c}{b} = \frac{b - 5c + a}{2c} = \frac{c - 8a + b}{3a}$ và a, b, c khác 0.

Tính $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Phong, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2023$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phải là một số nguyên:

$$A = \frac{a}{2023 - c} + \frac{b}{2023 - a} + \frac{c}{2023 - b}$$

Câu 4. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thỏa mãn: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$.

Tính tổng: $S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Duyên Hải 2022 - 2023)

Tìm ba phân số tối giản. Biết tổng của chúng bằng $\frac{269}{30}$. Tử số của chúng tỉ lệ thuận với $5; 7; 11$. Mẫu số của chúng tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$.

Câu 6. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tìm phân số có tử là 7 biết nó lớn hơn $-\frac{9}{10}$ và nhỏ hơn $-\frac{9}{11}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tìm ba phân số tối giản biết tổng của chúng là $4\frac{9}{40}$; các tử của chúng tỉ lệ với $2; 3; 5$ còn các mẫu của chúng tương ứng tỉ lệ với $5; 4; 3$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với $3; 4; 5$ và các mẫu tương ứng của chúng tỉ lệ với $5; 1; 2$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Kim Thành, năm học 2017 - 2018)

Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}; B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$.

Tính $\frac{A}{B}$

Câu 10. (HSG 7 huyện Việt Yên, năm học 2018 - 2019)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $B = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$

Chứng minh rằng $\frac{A}{B}$ là một số nguyên.

Câu 11. (HSG 7 cấp huyện Thạch Thành, tỉnh Thanh Hoá 2017 - 2018)

Tìm số hữu tỉ x , sao cho tổng của số đó với nghịch đảo của nó có giá trị là một số nguyên.

Câu 12. (HSG 7 trường THCS Nguyễn Trãi 2018-2019)

Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với $3; 4; 5$, các mẫu của chúng tỉ lệ với $5; 1; 2$. Tìm ba phân số đó.

Câu 13. (HSG 7 trường THCS Phú Trường 2017-2018)

Tính giá trị của biểu thức $\frac{2a - 5b}{a - 3b}$ với $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

Dạng 2. Chứng minh phân số đã cho tối giản

Câu 1. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho số nguyên tố P . Giả sử x, y là các số tự nhiên khác 0 , thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng $\frac{x^2 + py^2}{xy}$ là phân số tối giản.

Câu 2. (HSG 7 huyện Hoa Lư, tỉnh Ninh Bình 2020 - 2021)

Chứng minh với n là số nguyên thì phân số $\frac{2n+5}{n+3}$ là phân số tối giản.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Ba, tỉnh Phú Thọ 2020 - 2021)

Chứng minh phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Câu 4. (HSG 7 huyện Sơn Tịnh, tỉnh Quảng Ngãi 2020 - 2021)

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n , phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Câu 5. (HSG 7 huyện Nho Quan, tỉnh Ninh Bình 2020 - 2021)

Chứng tỏ rằng với n là số nguyên dương thì $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản.

Câu 6. (HSG 7 huyện Chí Linh năm học 2022 - 2023)

Chứng tỏ phân số có dạng $\frac{n-4}{3n-11}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n .

Dạng 3. Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản

Câu 1. (HSG 7 huyện Than Uyên, tỉnh Lai Châu, 2022 - 2023)

Tìm phân số tối giản $\frac{m}{n}$ biết rằng nếu cộng tử với 6 và cộng mẫu với 9 thì giá trị phân số đó không đổi ?

Câu 2. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh Bình Định 2020 - 2021)

Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản.

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2020 - 2021)

Tìm các số tự nhiên n để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Câu 4. (HSG 7 huyện Phú Lương, tỉnh Thái Nguyên 2020 - 2021)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:

$$\frac{7}{n+9}; \frac{8}{n+10}; \frac{9}{n+11}; \dots; \frac{100}{n+102}$$

Dạng 4. Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được

Câu 1.

Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $B = \frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Câu 2.

Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ không là phân số tối giản.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{3}{x-1}$ và $\frac{x+1}{3}$ là một số nguyên.

Dạng 5. Một số bài toán có lời văn

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn năm học 2022 - 2023)

Cả ba vòi nước cùng chảy vào một bể nước. Nếu vòi 1 và vòi 2 cùng chảy thì $\frac{6}{5}$ giờ được $\frac{7}{12}$ bể. Nếu vòi 2 và vòi 3 cùng chảy thì $\frac{3}{4}$ giờ chảy được $\frac{3}{4}$ bể, nếu vòi 1 và vòi 3 cùng chảy thì $\frac{9}{4}$ giờ chảy được $\frac{3}{4}$ bể. Thời gian cả ba vòi cùng chảy đầy bể là:

- A. 6 giờ. B. $\frac{10}{3}$ giờ. C. $\frac{20}{3}$ giờ. D. 3 giờ.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Trong đợt ôn thi học sinh giỏi môn Toán lớp 7, bạn Nam đã giải một số bài toán trắc nghiệm. Sau khi thầy giáo kiểm tra kết quả thì có một số câu sai. Nếu bạn Nam sửa hai câu từ đáp án sai thành đáp án đúng thì tỉ lệ số câu đúng của bạn sẽ là 76% . Nếu bạn Nam bỏ hẳn hai câu đó thì tỉ lệ số câu đúng của bạn là 75% . Hỏi trong đợt ôn thi bạn Nam đã giải bao nhiêu bài toán trắc nghiệm?

- A. 150 B. 100 C. 50 D. 20

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Câu	Câu hỏi	Đáp án đúng
Câu 2	Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5 . Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68 . Số đó là?	
Câu 3	Tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng. Tìm hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỷ đã cho?	
Câu 4	Một cửa hàng mua sắm trên Internet cứ cách 495 giờ lại gửi email quảng cáo đến khách hàng. Nếu lần gần đây nhất Nam nhận quảng cáo là thứ Ba, thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ là ngày thứ mấy?	
Câu 5	Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $21m$ và tỉ lệ giữa chúng là 5 và 8 . Diện tích khu vườn bằng bao nhiêu.	
Câu 6	Mai mua nhầm 5 ổ bánh mì và 2 chai sữa, nên đã trả lại hàng và đồng thời mua lại 2 ổ bánh mì và 5 chai sữa. Tổng số tiền lần này rẻ hơn lần trước 4200 đồng. Vậy giá tiền 1 chai sữa ít hơn giá tiền 1 ổ bánh mì là bao nhiêu đồng?	

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

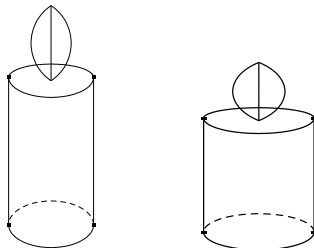
Nhân dịp trồng cây đầu xuân, một trường THCS có ba lớp 7A; 7B; 7C tham gia trồng cây. Nhà trường giao chỉ tiêu trồng cây cho từng lớp. Sau buổi làm việc thứ nhất thì thấy $\frac{1}{3}$ số cây trồng được của lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số cây trồng được của lớp 7B và bằng $\frac{3}{5}$ số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C. Tính số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C sau buổi làm việc thứ nhất. Biết rằng tổng số cây đã trồng trong buổi thứ nhất của hai lớp 7A và 7B là 39 cây.

Câu 2. (HSG 7 huyện Ý Yên, tỉnh Nam Định 2021 - 2022)

Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A và B , đi ngược chiều nhau trên cùng một tuyến đường. Đến điểm gặp nhau, xe thứ hai đi được quãng đường dài hơn xe thứ nhất là 20 km. Biết rằng nếu đi hết quãng đường AB , xe thứ nhất đi hết 4 giờ 15 phút, xe thứ hai đi hết 3 giờ 45 phút. Tính độ dài quãng đường AB .

Câu 3. (HSG 7 huyện Quế Võ năm học 2022 - 2023)

Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao. Tìm tỉ lệ chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến.



Câu 4. (HSG 7 huyện Đồng Xuân năm học 2022 - 2023)

Một người gửi tiết kiệm tại ngân hàng với số tiền là 200 triệu đồng, gửi theo lãi suất 6% kỳ hạn một năm lĩnh lãi mỗi quý (3 tháng). Theo quy định nếu đến hạn mà người gửi không đến lĩnh lãi thì số tiền lãi đó sẽ được nhập vào vốn gửi ban đầu. Do công việc người đó không đến lĩnh kỳ quý thứ nhất, các quý còn lại thì vẫn được lĩnh lãi bình thường. Vậy tổng số tiền gửi và lãi sau 1 năm là bao nhiêu?

Câu 5. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm học 2022 - 2023)

Hai cửa hàng A và B bán cùng một loại bút với giá 15000 đồng một chiếc, nhưng mỗi cửa hàng áp dụng hình thức khuyến mãi khác nhau:

Cửa hàng A : Nếu mua 3 chiếc trở lên thì được giảm 25% cho tổng số bút mua, nếu mua từ 10 chiếc trở lên thì từ chiếc thứ 10 trở đi thì mỗi chiếc lại được giảm thêm 5% so với giá giảm ban đầu.

Cửa hàng B : Cứ mua 3 chiếc thì được tặng thêm 1 chiếc.

Bạn An cần mua đúng 13 chiếc bút cho hoạt động nhóm thì bạn ấy nên mua ở cửa hàng nào để tiết kiệm và tiết kiệm bao nhiêu tiền so với cửa hàng kia.

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5 . Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68 . Số đó là?

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng. Tìm hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỷ đã cho?

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Một cửa hàng mua sắm trên Internet cứ cách 495 giờ lại gửi email quảng cáo đến khách hàng. Nếu lần gần đây nhất Nam nhận quảng cáo là thứ Ba, thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ là ngày thứ mấy?

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 21m và tỉ lệ giữa chúng là 5 và 8 . Diện tích khu vườn bằng bao nhiêu.

Câu 10. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Mai mua nhằm 5 ổ bánh mì và 2 chai sữa, nên đã trả lại hàng và đồng thời mua lại 2 ổ bánh mì và 5 chai sữa. Tổng số tiền lần này rẻ hơn lần trước 4200 đồng. Vậy giá tiền 1 chai sữa ít hơn giá tiền 1 ổ bánh mì là bao nhiêu đồng?

Câu 11. (HSG 7 Huyện Tam Điệp, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Ba tổ công nhân có mức sản xuất tỉ lệ với $5;4;3$. Tổ I tăng năng suất 10% , tổ II tăng năng suất 20% và tổ III tăng năng suất 30% . Do đó trong cùng một thời gian tổ I làm được nhiều hơn tổ III là 16 sản phẩm. Tính tổng số sản phẩm mà ba tổ làm được.

Câu 12. (HSG 7 Huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Diện tích ba mặt của một hình hộp chữ nhật là 30 cm^2 , 40 cm^2 và 75 cm^2 . Hỏi thể tích của hình hộp đó bằng bao nhiêu cm^3 ?

Câu 13. (HSG 7 Thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh 2022 - 2023)

Ông Bình mua một con nghé và một con bê vàng. Ông bán lại đồng giá 18 triệu mỗi con, do nghé mất giá nên ông chịu lỗ 20% , nhưng bù lại nhờ bê vàng lên giá nên ông lời được 20% . Hỏi ông Bình lời hay lỗ? Giải thích.

Câu 14. (HSG 7 huyện năm 2017 - 2018)

Bốn con Ngựa ăn hết một xe cỏ trong một ngày, một con Dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày, hai con Cừu trong 24 ngày ăn hết 2 xe cỏ. Hỏi chỉ ba con (ngựa, dê và cừu) ăn hết hai xe cỏ trong mấy ngày ?

Dạng 6. Các bài toán về so sánh

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 Huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Cho biểu thức
$$N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}.$$
 Khẳng định đúng là:

A. $N < \frac{3}{16}.$ B. $N > \frac{3}{16}.$ C. $\frac{3}{16} < N < \frac{3}{4}.$ D. $N > \frac{3}{4}.$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Tp. Thanh Hóa 2022 - 2023; trường THCS Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn 2017-2018)

Cho
$$B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}.$$
 Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Câu 2. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Cho
$$A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}.$$
 Chứng minh rằng: $A < \frac{1}{2}.$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thọ Xuân, tỉnh Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{36}$

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Hoàng Quyên 2018 - 2019; huyện Hương Sơn 2017 - 2018; huyện Hương Khê 2016 - 2017)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Chứng minh: $99 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}$

Câu 8. (HSG 7 thị xã Nghi Sơn 2022 - 2023)

Cho $S_n = \frac{1^2 - 1}{1} + \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$). Chứng minh S_n không là số nguyên.

Câu 9. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$

Câu 10. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3^{2023} - 4}{3^{2022} - 1}$ và $C = \frac{3^{2022} - 4}{3^{2021} - 1}$. Hãy so sánh B và C.

Câu 11. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)

Giả sử x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2, chứng minh:

$$S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Hồng Lĩnh 2022 - 2023)

Cho $B = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$. Hãy so sánh B với $-\frac{1}{2}$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Dân Chủ 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng $B < 1$.

Câu 14. (HSG 7 trường Trần Đức Thông, huyện Hưng Hà; huyện Mường Lát 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh rằng: $P < \frac{3}{16}$.

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2 + 1} + \frac{2001}{2000^2 + 2} + \dots + \frac{2001}{2000^2 + 2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

So sánh B và C , biết:

$$B = \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

$$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Cho $B = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right)$. So sánh B với 2 .

Câu 18. (HSG 7 huyện Hiệp Đức; trường Lục Nam, huyện Thái Thụy; huyện Bến Lức 2018 - 2019; huyện Than Uyên 2017 - 2018; tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không là số tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 2$

Câu 19. (HSG 7 trường Thanh Thùy; trường Bảo Phương 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$

Câu 20. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2022 - 2023)

Cho $M = \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{53.55}$. Tính M và so sánh M với $\frac{1}{2}$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$. So sánh S với 1 .

Câu 22. (HSG 7 Bắc Giang năm học 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2.2024^2} < 1$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Đồng Xuân năm học 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Câu 24. (HSG 7 trường Điện Hồng; trường Hồng Dương 2018-2019; trường Bích Hòa 2017-2018; huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$.

Câu 25. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thường Tín 2018 - 2019)

$$A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Chứng minh rằng:

Câu 26. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì:

Câu 27. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Cát Tiên 2018 - 2019)

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Hãy so sánh $\frac{a}{b}$ với $\frac{a+c}{b+d}$.

Câu 28. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Lục Nam 2018 - 2019)

$$\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$$

Chứng minh rằng:

Câu 29. (HSG 7 trường THCS Hương - Điền – Nam Hương năm 2017 - 2018)

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

Chứng minh:

Câu 30. (HSG 7 huyện Năm Căn, huyện Dương Nam Căn 2017 - 2018)

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng:

Câu 31. (HSG 7 trường THCS Tào Sơn, huyện Anh Sơn 2017-2018)

$$A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$$

Chứng minh rằng:

Câu 32. (HSG 7, trường THCS Trường Sa, NH: 2017-2018)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Câu 33. (HSG 7 Đề 240)

$$M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Cho $a, b, c > 0$ với

a) Chứng minh $M > 1$.

b) Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Câu 34. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2017 - 2018)

Tìm tỉ số của A và B , biết rằng:

$$A = \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{n.(1980+n)} + \dots + \frac{1}{25.2005}$$

$$B = \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{m.(25+m)} + \dots + \frac{1}{1980.2005}$$

Trong đó, A có 25 số hạng và B có 1980 số hạng.

Câu 35. (HSG 7 năm 2022 - 2023)

$$A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$$

Không dùng máy tính, hãy so sánh: A với 4.

Câu 36. (HSG 7 năm 2022 - 2023; huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

So sánh A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \frac{-2012}{4025}$; $B = \frac{-1999}{3997}$

b) $A = \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000}$; $B = \frac{2012}{1001} + \frac{2012}{1002} + \frac{2012}{1003} + \dots + \frac{2012}{2000}$

Câu 37. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

a) Chứng minh: $\frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$

b) Cho $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $P < \frac{1}{10}$

Câu 38. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$.

Câu 39. (HSG 7 huyện, Thái Thụy 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}$. So sánh B với $\frac{1}{10}$.

Câu 40. (HSG 7 trường Tri Thức 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$

Câu 41. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 1$; $a_2 = 1 + \frac{1}{2}$; $a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$;;
 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Câu 42. (HSG 7 huyện Tiên Du 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$

Câu 43. (HSG 7 huyện Trực Ninh năm 2017 - 2018)

Cho $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{7}{36}$.

Câu 44. (HSG 7 huyện, Nga Sơn 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Câu 45. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

Chứng minh rằng:

Câu 46. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

Cho (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng: $B < 1$.

Câu 47. (HSG 7 huyện Sơn Dương năm 2016 - 2017)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a^{2014} + b^{2014}}{c^{2014} + d^{2014}} = \left(\frac{a-b}{c-d} \right)^{2014}$$

Chứng minh rằng: Nếu

Câu 48. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

$$A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$$

Chứng minh rằng:

Câu 49. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

$$M = \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}}; N = \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}$$

Cho . Hãy so sánh M và N .

Câu 50. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2021.2023} \right)$$

So sánh A với 1 biết:

Câu 51. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

$$S_1 = 1 + \frac{1}{5}; S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}; \dots; S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Cho

$$\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$$

Chứng minh rằng:

Câu 52. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015; huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017)

$$A = \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2015} - 1 \right) \left(\frac{1}{2016} - 1 \right).$$

Cho

So sánh A với $\frac{-1}{2015}$

Câu 53. (HSG 7 huyện Tư Nghĩa, Trường Nghĩa Điền năm 2017 - 2018)

$$A = \frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1} \quad B = \frac{10^{2012} + 1}{10^{2013} + 1}$$

So sánh các số sau:

và

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>