CHUYÊN ĐỀ 12: HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN THEO THAM SỐ m

HPT bậc nhất hai ẩn phụ thuộc tham số: $\begin{cases} a_m x + b_m y = c_m \\ a'_m x + b'_m y = c'_m \end{cases}$

Trong đó: a_m ; b_m ; c_m ; a'_m ; b'_m ; c'_m là những hệ số phụ thuộc tham số **m**.

A. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

1. Giải và biện luận hệ phương trình : (I) $\begin{cases} a_m x + b_m y = c_m & (1) \\ a'_m x + b'_m y = c'_m & (2) \end{cases}$

Bước 1: *Rút ẩn mà hệ số của nó không chứa* ***m*** *ở một trong hai phương trình (**VD rút y**)*

$$y = f(m)x + g(m) \quad (1')$$

Bước 2: *Thay ẩn* ***y*** *vừa rút vào phương trình còn lại để được phương trình một ẩn.*

$$H(m)x = K(m) \quad (2')$$

Lập luận: *Nhận thấy (1') có nghiệm y khi (2') có nghiệm x.*

*=> Hệ có (**I**) nghiệm, vô số nghiệm hay vô nghiệm PHỤ THUỘC vào (2') có 1 nghiệm x, vô số nghiệm x hay vô nghiệm.*

** Xét phương trình (2):*

+ Khi $H(m) = 0 \Leftrightarrow m = m_o$ ta có:

- Nếu $K(m_o) = 0$ thì (2') có vô số nghiệm x

=> (1') có vô số nghiệm y tương ứng.

=> Hệ có vô số nghiệm (x, y) = (x, $f(m_o)x + g(m_o)$)

- Nếu $K(m_o) \neq 0$ thì (2') vô nghiệm => (1') vô nghiệm.

=> Hệ vô nghiệm.

+ Khi $H(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq m_o$ ta có (2') luôn có nghiệm duy nhất x = $\dfrac{K(m)}{H(m)}$

=> (1') có nghiệm duy nhất y = $f(m).\dfrac{K(m)}{H(m)} + g(m)$

=> Hệ có nghiệm duy nhất khi $m \neq m_o$

2. Điều kiện của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất, vô số nghiệm, vô nghiệm.

** Thường trong bài toán **tìm m** để hệ có nghiệm, vô nghiệm còn liên quan đến các ý **b), ý c)** của bài toán nên ta thường làm theo các bước như bài toán **Giải và biện luận hệ**:*

** Sau đó lập luận để tìm **m** theo yêu cầu bài toán.*

** Từ đó cũng tìm được luôn nghiệm **x, y** theo **m** để làm các ý tiếp theo.*

3. Điều kiện của tham số m để hệ có nghiệm thỏa mãn điều kiện đã cho.

Bước 1:** Tìm điều kiện của **m** để hệ có nghiệm duy nhất rồi suy ra nghiệm **x ; y** của hệ theo **m

***Bước 2:** Giải điều kiện bài toán:*

** Hệ có nghiệm nguyên:*

Viết Viết x, y của hệ về dạng: n + $\frac{k}{f(m)}$ *với n, k nguyên*

*Tìm **m** nguyên để f(m) là ước của k*

** Hệ có nghiệm x, y dương (âm):*

*Giải bất phương trình ẩn **m** => Tập giá trị của **m***

** Hệ có nghiệm x, y thỏa mãn một hệ thức đã cho:*

*Thay biểu thức nghiệm x , y vào hệ thức rồi giải phương trình ẩn **m***

*=> Giá trị của **m***

***Bước 4:** Giải điều kiện trên kết hợp với giá trị **m** để hệ có nghiệm duy nhất*

*=> Kết luận giá trị **m** (tập giá trị **m**) thỏa mãn điều kiện.*

4. Tìm m đề ba đường thẳng đã cho đồng quy.

- *Xác định giao điểm của 2 trong 3 đường thẳng (giao điểm của 2 đường thẳng không chứa **m**)*
- *Thay giao điểm tìm được vào đường thẳng còn lại chứa **m**, giải phương trình tìm ẩn **m.***

5. Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau tại điểm thỏa mãn điều kiện đã cho:

***Bước 1:** Xét hệ hai đường thẳng*

=> Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau tại điểm M chính là điều kiện hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2:** Giải hệ hai đường thẳng, tìm nghiệm x, y theo **m

***Bước 3:** Giải điều kiện của M*

***Bước 4:** Kết luận tập giá trị **m** thỏa mãn bài toán.*

6. Tìm m để hai hệ phương trình tương đương.

***Bước 1:** Tìm điều kiện của **m** để mỗi hệ đã cho có nghiệm.*

***Bước 2:** Tìm nghiệm **x ; y** theo **m** của mỗi hệ*

*+ Cho nghiệm **x** của hệ này bằng nghiệm **x** của hệ kia (1)*

*+ Cho nghiệm **y** của hệ này bằng nghiệm **y** của hệ kia (2)*

*⇨ Giá trị **m** cần tìm cùng thỏa mãn (1) , (2) và điều kiện của **m***

7. Chứng tỏ nghiệm (x ; y) của hệ luôn nằm trên đường thẳng cố định.

Từ hệ, bằng phương pháp thế, cộng trừ đại số tạo ra một phương trình mới f(x,y) = 0 không phụ thuộc vào m

=> Phương trình biểu thị mối liên hệ (x ; y) là đường thẳng cố định cần tìm.

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx - y = 2m - 1 \\ x - (m+1)y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = m + 3 \\ mx - 3y = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax - y = 2 \\ x - ay = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} ax + y = 3 \\ 4x + ay = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} mx - 2my = m + 1 \\ x + (m+1)y = 2 \end{cases}$

Bài 2: Tìm **m** để hệ phương trình sau: Vô nghiệm ; Vô số nghiệm: $\begin{cases} x - my = m & (1) \\ mx - 9y = m + 6 & (2) \end{cases}$

Bài 3: Cho hệ phương trình: $mx+4y=9$¿¿¿¿. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất, vô nghiệm.

Bài 4: Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - my = 2 \\ mx - 4y = m - 2 \end{cases}$

Bài 5: Cho hệ phương trình (m là tham số) : $\begin{cases} mx - y = 3 \\ -x + 2my = 1 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 1.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài 6. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 5 & (1) \\ mx - y = 4 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) trong đó x, y trái dấu.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x = |y|$.

Bài 7: Định m để hệ phương trình $\{mx+4y=9$¿¿¿¿ có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn hệ thức cho trước:

$2x + y + \frac{38}{m^2-4} = 3$

Hướng dẫn

- Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm duy nhất: m ¿ ± 2

- Hệ $\{mx+4y=9$¿¿¿¿ $\Leftrightarrow$ $\{mx+4y=9$¿¿¿¿ $\Leftrightarrow$ $\{(m^2-4)y=8m-9$¿¿¿¿ $\Leftrightarrow$ $\{y=\frac{8m-9}{m^2-4}$¿¿¿¿

- Thay x = $\frac{9m-32}{m^2-4}$; y = $\frac{8m-9}{m^2-4}$ vào hệ thức đã cho ta được:

$2.\frac{9m-32}{m^2-4} + \frac{8m-9}{m^2-4} + \frac{38}{m^2-4} = 3$

$\Leftrightarrow$ $18m - 64 + 8m - 9 + 38 = 3m^2 - 12$

$\Leftrightarrow$ $3m^2 - 26m + 23 = 0$ $\Leftrightarrow$ $m_1 = 1$; $m_2 = \frac{23}{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy m = 1 ; m = $\frac{23}{3}$

Bài 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình với m = 1

b)Tìm m để hệ có nghiệm (x;y) thỏa mãn : $x^2 - 2y^2 = 1$.

Bài 9: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3m - 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm $(x; y)$ sao cho $\frac{x^2 - y - 5}{y + 1} = 4$.

Bài 10. Cho hệ phương trình : $\{mx+2y=18$¿¿¿¿ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x ;y) trong đó x = 2.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x ;y) thoả mãn 2x + y = 9.

Bài 11: Cho hệ phương trình: $x+my=9$¿¿¿¿

a) Chứng tỏ rằng hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

b) Với giá trị nào của m để hệ có nghiệm (x ; y) thỏa mãn hệ thức: x - 3y = $\frac{28}{m^2+3}$ - 3

Bài 12: Cho hệ phương trình: $mx-y=2$¿¿¿¿. Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn hệ thức $x+y=1-\frac{m^2}{m^2+3}$.

Bài 13: Cho hệ phương trình $3x-my=-9$¿¿¿¿

a) Chứng tỏ rằng hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

b) Tìm giá trị nguyên của m để hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại một điểm nằm trong góc phần tư thứ IV trên mặt phẳng tọa độ Oxy

c) Với trị nguyên nào của m để hệ có nghiệm (x ; y) thỏa mãn x + y = 7

Bài 14: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+(m-1)y=2 \\ (m+1)x-y=m+1 \end{cases}$

a) Giải hệ với $m=\frac{1}{2}$

b) Tìm **m** để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) thỏa mãn điều kiện x > y

Bài 15: Cho hệ phương trình $3x+2y=4$¿¿¿¿

Tìm m nguyên sao cho hệ có nghiệm (x; y) với x < 1, y < 1

Bài 16: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 \\ 2x-y=m+5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với m = 2

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho $x^2-y^2<4$

Bài 17: Định m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên: $mx+2y=m+1$¿¿¿¿

Hướng dẫn

$\Leftrightarrow \{mx+2y=m+1$¿¿¿¿ $\Leftrightarrow \{2mx+4y=2m+2$¿¿¿¿ $\Leftrightarrow \begin{cases}(m^2-4)y=2m^2-3m-2\\ 2x+my=2m-1\end{cases}$

Hệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m^2-4)y=(m-2)(2m+1) & (1)\\ 2x+my=2m-1 & (2)\end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất ⇔ Phương trình (1) có nghiệm y duy nhất

$\Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Vậy với $m \neq \pm 2$ thì hệ có nghiệm duy nhất (x,y) là:

$$\left\{ y=\frac{(m-2)(2m+1)}{m^2-4}=\frac{2m+1}{m+2}=2-\frac{3}{m+2} \right.$$¿¿¿¿

Để x, y là những số nguyên thì m + 2 ∈ Ư(3) = $\{1;-1;3;-3\}$

Vậy: m + 2 = ± 1, ± 3 => m = -1; -3; 1; -5

Bài 18: Định m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên: $\{(m+1)x+2y=m-1$¿¿¿¿

Bài 19: Cho hệ phương trình $\begin{cases}(2m+1)x+y=2m-2\\ m^2x-y=m^2-3m\end{cases}$

Trong đó **m** ∈ Z ; **m** ≠ - 1. Xác định **m** để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

Bài 20: Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx-y=2m\\ x-my=m+1\end{cases}$

a) Tìm **m** để hệ có nghiệm duy nhất

b) Tìm **m** để hệ có nghiệm nguyên.

c) Chứng tỏ rằng điểm M(x ; y) (với (x ; y) là nghiệm của hệ đã cho) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 21: Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+2my=m+1\\ x+(m+1)y=2\end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng nếu hệ có nghiệm (x y) thì điểm điểm M(x ; y) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

b) Xác định m để điểm M thuộc góc phần tư thứ nhất.

Gợi ý: Điểm M thuộc góc phần tư thứ nhất ⇔ $x > 0$ và $y > 0$

c) Xác định m để điểm M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Gợi ý: Điểm thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

⇔ $x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$. *Giải phương trình tìm được m.*

Bài 22: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng nếu hệ có nghiệm (x y) thì điểm điểm M(x ; y) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

b) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x, y) với x, y là các số nguyên.

c) Xác định m để điểm M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 23: Cho hệ phương trình $\{ mx+4y=10-m$¿¿¿¿ (m là tham số)

a) Xác định các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) sao cho x > 0, y > 0

b) Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm (x;y) với x, y là các số nguyên dương

Bài 24: Cho hệ phương trình : $\{ (m-1)x-my=3m-1$¿¿¿¿

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo m

b) Với giá trị nguyên nào của m để hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại một điểm nằm trong góc phần tư thứ IV của hệ tọa độ Oxy

c) Định m để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) sao cho P = $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 25: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2y - x = m + 1 \\ 2x - y = m - 2 \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ phương trình (1) khi m =1.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình (1) có nghiệm (x ; y) sao cho biểu thức P = $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 26: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2y - x = m + 1 \\ 2x - y = m - 2 \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ phương trình (1) khi m =1.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình (1) có nghiệm (x ; y) sao cho biểu thức P = $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 27: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$

Tìm giá trị của a để hệ phương trình thỏa mãn tích x.y đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 28: Tìm **m** để hai hệ phương trình sau tương đương

a) Hệ (I) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ Hệ (II) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x - \frac{1}{2}y = m \end{cases}$

a) Hệ (I) $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$ Hệ (II) $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 3x + my = 2 \end{cases}$