

HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 2023-2024_BẮC NINH

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1: (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$$
 với $x \geq 0$,
và $x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$. Rút gọn biểu thức P và tìm giá của x để $P = \frac{7}{3}$.

2) Gọi A và B là giao điểm của đường thẳng $(d): y = -x + 2$ với parabol $(P): y = x^2$.
Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Câu 2: (4,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

2) Giải phương trình $3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5$

Câu 3: (3,0 điểm)

1) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y(x-1) = x^2 + 2$.

2) Với mỗi số nguyên a , gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2ax - 1 = 0$.

Chứng minh $(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n})$ chia hết cho 48 với mọi số tự nhiên n .

Câu 4: (6,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, D là điểm bất kì thuộc cạnh BC (D khác B và C). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại P, Q sao cho M nằm giữa P và N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại I (khác B). Các đường thẳng DI và AC cắt nhau tại K.

a) Chứng minh $\widehat{PID} = \widehat{PAC}$. Từ đó suy ra 4 điểm A, I, P, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh ΔPBD đồng dạng với ΔPAK và $\frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PK}$.

c) Đường thẳng CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (khác P). Đường thẳng IG cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh khi D di chuyển trên đoạn

BC thì tỉ số $\frac{CD}{CE}$ không đổi.

2) Cho tứ giác nội tiếp ABCD. Chứng minh $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Câu 5: (3,0 điểm)

1) Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$ và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = a^2 + b^2 + c^2$.

2) Cho đa giác lồi $A_1 A_2 \dots A_{2024}$. Tại mỗi đỉnh A_k ($k = 1, 2, \dots, 2024$), người ta ghi một số thực a_k sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai đỉnh kề nhau bằng một số nguyên dương không lớn hơn 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể được của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh của đa giác đã cho, biết rằng các số ghi tại các đỉnh đã cho đôi một khác nhau.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (4,0 điểm)

1) Với $x \geq 0$, và $x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$ ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} \right) : \left(\frac{(2\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})(x - \sqrt{x} + 1)} \right)$$

$$P = \frac{(2\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} : \left(\frac{(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{(x - \sqrt{x} + 1)} \right)$$

$$P = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} : \frac{(2\sqrt{x} - 1)(x - \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - x)}{(1 - \sqrt{x})(x - \sqrt{x} + 1)}$$

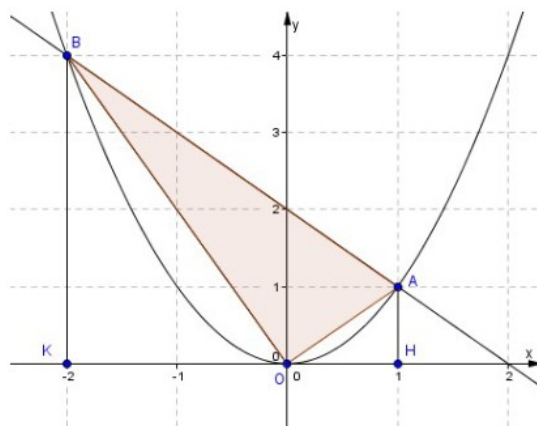
$$P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow 3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases} \quad x \in \left\{ 9; \frac{1}{9} \right\}.$$

(thỏa mãn). Vậy

2)



$$-x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm

Suy ra $A(1; 1), B(-2; 4)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên trục Ox .

$$\text{Có: } S_{AHKB} = \frac{(AH + BK).HK}{2} = \frac{15}{2}; \quad S_{OAH} = \frac{1}{2}OH.AH = \frac{1}{2}; \quad S_{OAH} = \frac{1}{2}OK.BK = 4$$

$$\text{Vậy } S_{OAB} = S_{AHKB} - S_{OAH} - S_{OBK} = 3$$

Câu 2 (4,0 điểm)

$$(1) \Leftrightarrow (2x - y)(x + 2y - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 5 - 2y \end{cases}$$

1) Phương trình

$$\text{Với } y = 2x, \text{ thay vào (2) ta được } -15x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = 2; \text{ với } x = -1 \Rightarrow y = -2$$

$$\text{Với } x = 5 - 2y, \text{ thay vào (2) ta được } 5y^2 - 30y + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 2 \Rightarrow x = 1; \text{ với } y = 4 \Rightarrow x = -3$$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là $(1; 2), (-3; 4), (-1; -2)$

$$2) \text{ Điều kiện } x \geq \frac{2}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow [3\sqrt{4x+1} - (2x+5)] + x[4\sqrt{3x-2} - (3x+2)] = 0 \quad (2)$$

$$\text{Vi } x \geq \frac{2}{3} \text{ nên } \begin{cases} A = 3\sqrt{4x+1} + (2x+5) > 0 \\ B = 4\sqrt{3x-2} + (3x+2) > 0 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{9(4x+1) - (2x+5)^2}{A} + \frac{x[16(3x-2) - (3x+2)^2]}{B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x^2 + 16x - 16}{A} + \frac{x(-9x^2 + 36x - 36)}{B} = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 \left(\frac{4}{A} + \frac{9x}{B} \right) = 0$$

$$\text{Vi } A > 0, B > 0, x \geq \frac{2}{3} \text{ nên } \left(\frac{4}{A} + \frac{9x}{B} \right) > 0$$

Do đó phương trình trên có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Lưu ý:

- Nếu học sinh phân tích về dạng các dạng tương tự) nhưng không giải được phương trình $(x-2) \left(\frac{12}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{12x}{\sqrt{3x-2}+2} - 3x-2 \right) = 0$ (hoặc

$$\frac{12}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{12x}{\sqrt{3x-2}+2} - 3x-2 = 0$$

thì chỉ ghi cho 0.5 điểm.

- Học sinh có thể làm theo cách sử dụng bất đẳng thức.

Câu 3 (3,0 điểm)

1) Dễ thấy $x = 1$ không thỏa mãn phương trình (1).

Với $x \neq 1$ ta có $(1) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 2}{x - 1} \Leftrightarrow y = x + 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $3 \mid (x - 1) \Rightarrow x - 1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$.

Từ đó tìm được các cặp nghiệm $(x; y)$ là $(-2; -2), (0; -2), (2; 6), (4; 6)$.

2) Với mọi a , phương trình $x^2 + 2ax - 1 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$$

Đặt $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$. Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n}) = \frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})^2(x_1^{2n} + x_2^{2n}) \\ &= \frac{1}{8}[(x_1^{2n} + x_2^{2n})^2 - 4x_1^{2n}x_2^{2n}](x_1^{2n} + x_2^{2n}) \\ &= \frac{1}{8}(S_n^2 - 4) \cdot S_n = \frac{(S_n - 2)(S_n + 2)S_n}{8} = \left(\frac{S_n}{2} - 1\right) \cdot \frac{S_n}{2} \cdot \left(\frac{S_n}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

Ta chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$ luôn là số nguyên dương chẵn. (*)

Thật vậy:

Với $n = 0$ thì $S_0 = 2$ là số nguyên dương chẵn.

Với $n = 1$ thì $S_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 + 2 = 2(2a^2 + 1)$ là số nguyên dương chẵn (do a là số nguyên).

Giả sử (*) đúng đến $n = k$, tức là S_{k-1} và S_k là các số nguyên dương chẵn. Ta có

$S_{k+1} = x_1^{2(k+1)} + x_2^{2(k+1)} = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^{2k} + x_2^{2k}) - x_1^2x_2^2[x_1^{2(k-1)} + x_2^{2(k-1)}] = S_1 \cdot S_k - S_{k-1}$ là một số nguyên dương chẵn.

Vậy $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$ là một số nguyên dương chẵn với mọi số tự nhiên n .

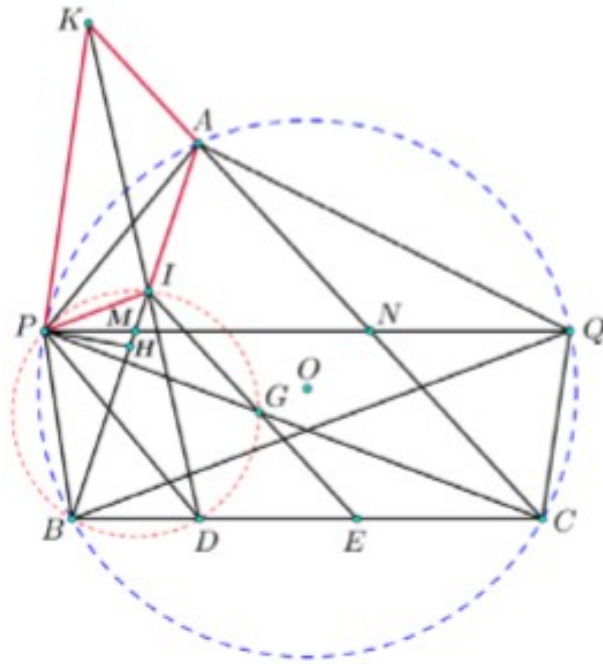
$M = \left(\frac{S_n}{2} - 1\right) \cdot \frac{S_n}{2} \cdot \left(\frac{S_n}{2} + 1\right)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp. Suy ra M chia hết cho

6.

Vậy $(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n}) = 8M : 48$.

Câu 4 (6,0 điểm)

1)



a) Vì tứ giác APBC nội tiếp $\Rightarrow \angle PAC + \angle PBC = 180^\circ$ (1)

Vì tứ giác BDIP nội tiếp $\Rightarrow \angle PID + \angle PBC = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\angle PID = \angle PAC$

Lại có $\Rightarrow \angle PID + \angle PIK = 180^\circ$; $\angle PAC + \angle PAK = 180^\circ$

Do đó $\angle PIK = \angle PAK$; mà hai góc này cùng nhìn cạnh PK $\Rightarrow$ tứ giác AIPK nội tiếp hay 4 điểm A, I, P, K nằm trên cùng một đường tròn.

b) Ta có $\angle APK = \angle AIK = \angle BID = \angle BPD$ và $\angle PBD = 180^\circ - \angle PID = 180^\circ - \angle PAC = \angle PAK$

Suy ra $\triangle PBD$ đồng dạng với $\triangle PAK$ (g – g) $\Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{PD}{PK}$ (3).

Vì tứ giác APBQ nội tiếp nên tam giác PMB đồng dạng với tam giác AMQ (g – g) và tam giác QBM đồng dạng với tam giác APM (g – g). Do đó

$$\begin{cases} \frac{PB}{QA} = \frac{MP}{MA} \\ \frac{QB}{PA} = \frac{MB}{MP} \end{cases} \Rightarrow \frac{PB}{QA} \cdot \frac{QB}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{QA}{QB} \quad (4).$$

Từ (3) và (4), suy ra $\frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PK}$.

c) Trên đoạn AB xác định điểm H sao cho $\angle APH = \angle KPI$.

Vì tứ giác AIPK nội tiếp nên $\angle KPI = \angle BAC$.

Lại có A, P và $\angle BAC$ không đổi nên H là điểm cố định.

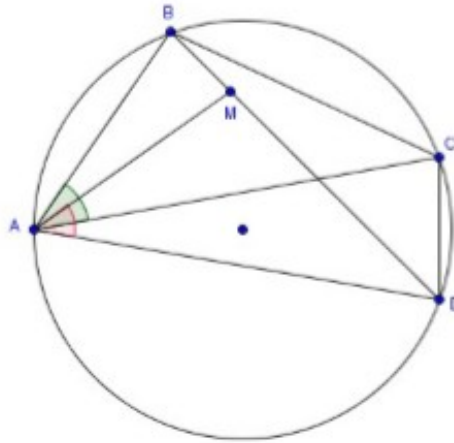
$\triangle KPI$ đồng dạng với $\triangle APH$ (g – g) $\Rightarrow \frac{KI}{AH} = \frac{KP}{AP}$ (5).

ΔPKD đồng dạng với ΔPAB (g - g) $\Rightarrow \frac{KP}{AP} = \frac{KD}{AB}$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{KD}{AB} = \frac{KI}{AH} \Rightarrow \frac{KD}{KI} = \frac{AB}{AH}$ (7).

Ta có $\angle PGI = \angle PBI = \angle PCA$ nên $GI \parallel AC$ hay $IE \parallel AC \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{KD}{KI}$ (8).

Từ (7) và (8) suy ra $\frac{CD}{CE} = \frac{AB}{AH}$ mà $\frac{AB}{AH}$ không đổi nên $\frac{CD}{CE}$ không đổi.
2)



Gọi M là điểm trên đoạn BD sao cho $\angle DAM = \angle CAB$.

Hai tam giác ΔDAM và ΔCAB đồng dạng (g-g) nên $\frac{DA}{CA} = \frac{DM}{CB} \Rightarrow DA.CB = CA.DM$ (1)

Hai tam giác ΔBAM và ΔCAD đồng dạng (g-g) nên $\frac{BA}{CA} = \frac{BM}{CD} \Rightarrow BA.CD = CA.BM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DA.CB + BA.CD = CA.DM + CA.BM \Leftrightarrow AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Câu 5 (3,0 điểm)

1) Ta có $F = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 36 - 2(ab + bc + ca)$.

Vì $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$ nên ta có

$$(a - 3)(b - 3)(c - 3) \leq 0 \Leftrightarrow abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow abc \leq 3(ab + bc + ca) - 27 \quad (1)$$

Và $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0 \Leftrightarrow abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow abc \geq (ab + bc + ca) - 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(ab + bc + ca) - 5 \leq abc \leq 3(ab + bc + ca) - 27$

$$\Rightarrow ab + bc + ca \geq 11 \Rightarrow F = 36 - 2(ab + bc + ca) \leq 14$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 1; b = 2; c = 3$ và các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của F là 14.

2) Xét đa giác lồi $A_1 A_2 \dots A_{2024}$. Khi đó $|a_k - a_{k+1}| \in \{1; 2; 3\}$, $k \in \{1, 3, \dots, 2023\}$. Không mất tính tổng quát, coi a_1 là nhỏ nhất, a_n là lớn nhất (dễ thấy $n \geq 2$). Đặt $d = \max_{i \neq j} |a_i - a_j|$, khi đó $d = a_n - a_1$ và là một số nguyên dương.

Giả sử theo chiều kim đồng hồ có $n - 2$ đỉnh nằm giữa A_1, A_n . Suy ra theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ có $2024 - n$ đỉnh nằm giữa A_1, A_n . Hơn nữa giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số kề nhau không vượt quá 3. Do đó:

$$d = |a_1 - a_n| \leq |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| \leq 3(n-1)$$

Tương tự ta có $d \leq 3(2024 - n + 1)$

$$d \leq \frac{3(n-1) + 3(2024 - n + 1)}{2} = 3036$$

Nếu $d = 3036$ thì hiệu giữa hai số ghi trên hai đỉnh kề nhau đúng bằng 3 hay ta có $|a_i - a_{i+1}| = 3$, $i = 1, 2, \dots, 2023$

$$\Rightarrow |a_i - a_{i+1}| = |a_{i+1} - a_{i+2}| \Rightarrow \begin{cases} a_i - a_{i+1} = a_{i+1} - a_{i+2} \\ a_i = a_{i+2} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, 2022)$$

$$\Rightarrow a_i - a_{i+1} = a_{i+1} - a_{i+2} \Rightarrow a_1 - a_{2024} = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2023} - a_{2024} = 2023(a_1 - a_2)$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_{2024}| = |2023(a_1 - a_2)|$$

$$\Rightarrow 3 = 2023 \times 3$$

Điều này không xảy ra. Suy ra $d \leq 3035$.

Ta xây dựng cho một trường hợp $d = 3035$ như sau:

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_k = a_{k-1} + 3 = 3k - 4 \quad \text{với } k = 3, 4, \dots, 1013;$$

$$a_{1014} = a_{1013} - 2 = 3033, a_k = a_{k-1} - 3 = 6075 - 3k \quad \text{với } k = 1015, 1016, \dots, 2024.$$

Khi đó hiệu lớn nhất là $a_{1013} - a_1 = 3035$.

Các số $a_2, a_3, \dots, a_{1013}$ là các số nguyên dương tăng dần có dạng $3t - 4$ chia cho 3 dư 2. Các số $a_{1014}, a_{1015}, \dots, a_{2024}$ là các số nguyên dương giảm dần có dạng $3075 - 3h$ chia hết cho 3.

Suy ra các số $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ đôi một khác nhau.

Vậy giá trị lớn nhất của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh bằng 3035.