

CHUYÊN ĐỀ 6: SỐ CHÍNH PHƯƠNG
CHỦ ĐỀ 5: PHƯƠNG PHÁP KẸP TRONG BÀI TOÁN SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Không tồn tại số chính phương nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

Cụ thể: Nếu có $q^2 < k < (q+1)^2$ ($k; q \in \mathbb{N}$) thì k không là số chính phương.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI:

Dạng 1: Chứng minh một số, một biểu thức số không là số chính phương.

I. Phương pháp giải:

1. Để chứng tỏ một số k ($k \in \mathbb{N}$) không là số chính phương ta tiến hành theo 3 bước:

Bước 1: Chứng tỏ $k > q^2$ ($q \in \mathbb{N}$)

Bước 2: Chứng tỏ $k < (q+1)^2$ ($q \in \mathbb{N}$)

Bước 3: Từ 2 bước trên suy ra $q^2 < k < (q+1)^2$ ($q \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow k$ không là số chính phương

2. Sử dụng các hằng đẳng thức để biến đổi biểu thức số:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng số 10224 không là số chính phương.

Lời giải:

Nhận thấy: $101^2 = 10201 \Rightarrow 10224 > 101^2$

$$102^2 = 10404 \Rightarrow 10224 < 102^2$$

Suy ra $101^2 < 10224 < 102^2$

Vậy 10224 không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng số 40725 không là số chính phương.

Lời giải:

Nhận thấy: $201^2 = 40401 \Rightarrow 40725 > 201^2$

$$202^2 = 40804 \Rightarrow 40725 < 202^2$$

Suy ra $201^2 < 40725 < 202^2$

Vậy 40725 không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh số 4014025 không là số chính phương.

Lời giải:

Ta có $2003^2 = 4012009 \Rightarrow 4014025 > 2003^2$

$2004^2 = 4016016 \Rightarrow 4014025 < 2004^2$

Suy ra $2003^2 < 4014025 < 2004^2$

Chứng tỏ 4014025 không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh số 4025025 không là số chính phương.

Lời giải:

Ta có $2006^2 = 4024036 \Rightarrow 4025025 > 2006^2$

$2007^2 = 4028049 \Rightarrow 4025025 < 2007^2$

Suy ra $2006^2 < 4025025 < 2007^2$

Chứng tỏ 4025025 không là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng:

a) $S = 2016^{2016} + 2016^{1000} + 2016^{999} + \dots + 2016^2 + 2016$ không là số chính phương.

b) $A = 2018^{2018} + 2018^{1000} + 2018^{999} + \dots + 2018^2 + 2018 + 5$ không là số chính phương

Lời giải:

a) Ta có $S = 2016^{2016} + 2016^{1000} + 2016^{999} + \dots + 2016^2 + 2016$
 $\Rightarrow S > 2016^{2016} = (2016^{1008})^2$ (1)

Ta đi chứng minh $S < (2016^{1008} + 1)^2 = 2016^{2016} + 2 \cdot 2016^{1008} + 1$

Thật vậy :

$2016^{1000} + 2016^{999} + \dots + 2016^2 + 2016 < 2016^{1000} + 2016^{1000} + \dots + 2016^{1000}$ (1000 số 2016^{1000})

$\Rightarrow 2016^{1000} + 2016^{999} + \dots + 2016^2 + 2016 < 1000 \cdot 2016^{1000}$

Mà $1000 \cdot 2016^{1000} < 2016^{1001} < 2 \cdot 2016^{1008} + 1$

$$\Rightarrow S < 2016^{2016} + 2.2016^{1008} + 1 = (2016^{1008} + 1)^2$$

$$\Rightarrow S < (2016^{1008} + 1)^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow (2016^{1008})^2 < S < (2016^{1008} + 1)^2$$

Suy ra S không là số chính phương (ĐPCM)

$$\text{b) Ta có : } A = 2018^{2018} + 2018^{1000} + 2018^{999} + \dots + 2018^2 + 2018 + 5$$

$$\Rightarrow A > 2018^{2018} = (2018^{1009})^2 \quad (1)$$

Lại có:

$$2018^{2018} + 2018^{1000} + \dots + 2018^2 + (2018 + 5) < 2018^{2018} + 2018^{1000} + \dots + 2018^{1000} \quad (1000 \text{ số } 2018^{1000})$$

$$\Rightarrow A < 2018^{2018} + 1000.2018^{1000} < 2018^{2018} + 2018^{1001} < 2018^{2018} + 2.2018^{1009} + 1$$

$$\Rightarrow A < (2018^{1009} + 1)^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow (2018^{1009})^2 < A < (2018^{1009} + 1)^2$$

Suy ra A không là số chính phương (ĐPCM)

Bài 6: Chứng minh rằng:

$$M = 2021^{2020} + 2021^{100} + 2021^{99} + \dots + 2021^2 + 2021^1 + 2021^0 \text{ không là số chính phương.}$$

Lời giải:

$$\text{Ta có : } M = 2021^{2020} + 2021^{100} + 2021^{99} + \dots + 2021^2 + 2021^1 + 2021^0$$

$$\Rightarrow M > 2021^{2020} = (2021^{1010})^2 \quad (1)$$

Lại có:

$$2021^{100} + 2021^{99} + \dots + 2021^2 + (2021^1 + 2021^0) < 2021^{100} + \dots + 2021^{100} \quad (100 \text{ số } 2021^{100})$$

$$\Rightarrow 2021^{100} + 2021^{99} + \dots + 2021^2 + (2021^1 + 2021^0) < 100.2021^{100}$$

$$\Rightarrow M < 2021^{2020} + 100.2021^{100} < 2021^{2020} + 2021^{101} < 2021^{2020} + 2.2021^{1010} + 1$$

$$\Rightarrow M < (2021^{1010} + 1)^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow (2021^{1010})^2 < M < (2021^{1010} + 1)^2$$

Suy ra M không là số chính phương (ĐPCM)

Dạng 2: Chứng minh biểu thức $A(n)$ không là số chính phương.

I. Phương pháp giải:

- Để chứng tỏ biểu thức $A(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) không là số chính phương ta tiến hành theo 3 bước:

Bước 1: Chứng tỏ $A(n) > [B(n)]^2$

Bước 2: Chứng tỏ $A(n) < [B(n) + 1]^2$

Bước 3: Từ 2 bước trên suy ra $[B(n)]^2 < A(n) < [B(n) + 1]^2 \Rightarrow A(n)$ không là số chính phương.

- Sử dụng các hằng đẳng thức sau để biến đổi biểu thức:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng tích của hai số tự nhiên liên tiếp khác 0 không là số chính phương.

Lời giải:

Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp khác 0 là $n; (n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Tích 2 số là $n(n+1)$

Ta có $n(n+1) = n^2 + n > n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$) (1)

Mặt khác $n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow n^2 < n^2 + n < (n+1)^2 \Rightarrow n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n(n+1)$ là không là số chính phương.

Vậy tích của hai số tự nhiên liên tiếp khác 0 không là số chính phương (ĐPCM)

Bài 2: Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải:

Gọi 4 số nguyên dương liên tiếp là $n; (n+1); (n+2); (n+3)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Đặt } S = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\Rightarrow S = [n(n+3)] \cdot [(n+1)(n+2)]$$

$$\Rightarrow S = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2)$$

$$\text{Đặt } (n^2 + 3n) = x \quad (x \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow S = x(x+2) = x^2 + 2x$$

$$\text{Nhận thấy } x^2 < x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 < x^2 + 2x < (x+1)^2$$

Suy ra S không là số chính phương $\forall x \in \mathbb{N}^*$

Suy ra S không là số chính phương $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy tích bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng tổng bình phương của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải:

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $n; (n+1); (n+2); (n+3)$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$\text{Đặt } A = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$$

$$\Rightarrow A = n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9)$$

$$\Rightarrow A = 4n^2 + 12n + 14$$

$$\Rightarrow A = (4n^2 + 12n + 9) + 5$$

$$\Rightarrow A = [(2n)^2 + 2 \cdot 2n \cdot 3 + 3^2] + 5$$

$$\Rightarrow A = (2n+3)^2 + 5$$

$$\Rightarrow A = (2n+3)^2 + 5$$

$$\Rightarrow A > (2n+3)^2 \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$(2n+4)^2 = 4n^2 + 16n + 16 = (4n^2 + 12n + 9) + 4n + 7 = (2n+3)^2 + 4n + 7 > (2n+3)^2 + 5 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A < (2n+4)^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (2n+3)^2 < A < (2n+4)^2 \Rightarrow A$ không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}$ các số sau không là số chính phương

a) $n^2 + 7n + 10$

b) $4n^2 + 5n + 2$

Lời giải:

a) Nhận thấy : $(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Mà $n^2 + 7n + 10 > n^2 + 6n + 9$

nên $n^2 + 7n + 10 > (n+3)^2 \quad (1)$

Cũng có $(n+4)^2 = n^2 + 8n + 16 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Mà $n^2 + 7n + 10 < n^2 + 8n + 16$

nên $n^2 + 7n + 10 < (n+4)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ thì $n^2 + 7n + 10$ không là số chính phương

b) Nhận thấy $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$(2n+2)^2 = 4n^2 + 8n + 4$$

$$4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + 5n + 2 < 4n^2 + 8n + 4$$

$$\Rightarrow (2n+1)^2 < 4n^2 + 5n + 2 < (2n+2)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ thì $4n^2 + 5n + 2$ không là số chính phương

Bài 5 Chứng minh rằng với n là số tự nhiên thì các số sau không phải số chính phương

a) $A = n^2 + 2n + 3$

b) $B = 9n^2 + 8n + 10$

Lời giải:

a) Ta có: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$$

Mà $n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + 3 < n^2 + 4n + 4$

nên $(n+1)^2 < n^2 + 2n + 3 < (n+2)^2$

$\Rightarrow A = n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương

b) Ta có: $(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1$
 $(3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4$

Mà $9n^2 + 6n + 1 < 9n^2 + 8n + 10 < 9n^2 + 12n + 4$

nên $(3n+1)^2 < 9n^2 + 8n + 10 < (3n+2)^2$

$\Rightarrow B = 9n^2 + 8n + 10$ không là số chính phương

Bài 6: Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}; n > 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $B = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$

$$B = n^2 \cdot (n^4 - n^2 + 2n + 2) = n^2 \cdot [(n^4 - n^2) + (2n + 2)]$$

$$\Rightarrow B = n^2 \cdot [n^2(n^2 - 1) + 2(n+1)] = n^2 \cdot [n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)]$$

$$\Rightarrow B = n^2 \cdot (n+1) [n^2(n-1) + 2] = n^2 \cdot (n+1) [n^3 - n^2 + 2]$$

$$\Rightarrow B = n^2(n+1) \cdot [(n^3 + 1) - (n^2 - 1)] = n^2(n+1) \cdot [(n+1)(n^2 - n + 1) - (n-1)(n+1)]$$

$$\Rightarrow B = n^2(n+1) \cdot (n+1) [(n^2 - n + 1) - (n-1)] = n^2(n+1)^2 \cdot (n^2 - 2n + 2)$$

Với $n \in \mathbb{N}, n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n^2 - 2n + 1) + 1 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

$$\Rightarrow B > (n-1)^2 \quad (1)$$

Mặt khác với $n \in \mathbb{N}, n > 1$ ta có $n^2 - 2n + 2 = n^2 - (2n - 2) = n^2 - 2(n-1) < n^2$

$$\Rightarrow B < n^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $(n-1)^2 < B < n^2 \Rightarrow B$ không phải là một số chính phương.

Vậy số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}; n > 1$ không là số chính phương (ĐPCM)

Bài 6: Cho n là số nguyên dương và m là ước nguyên dương của $2n^2$.

CMR: $n^2 + m$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử: $n^2 + m$ là số chính phương.

Đặt: $n^2 + m = k^2 \ (k \in \mathbb{N})$ (1)

$$2n^2 = mp \ (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow m = \frac{2n^2}{p}$$

Theo bài ra ta có:

$$m = \frac{2n^2}{p} \text{ vào (1) ta được: } n^2 + \frac{2n^2}{p} = k^2$$

Thay

$$\Rightarrow n^2 p^2 + 2pn^2 = p^2 k^2$$

$$\Rightarrow n^2 (p^2 + 2p) = (pk)^2$$

Do $n^2, (pk)^2$ là các số chính phương nên $p^2 + 2p$ là số chính phương.

Mặt khác: $p^2 < p^2 + 2p < (p+1)^2 \Rightarrow p^2 + 2p$ không là số chính phương (Mâu thuẫn với giả sử)

Vậy $n^2 + m$ không là số chính phương.

Dạng 3: Tìm giá trị của n để biểu thức $A(n)$ là một số chính phương.

I. Phương pháp giải:

Xét các trường hợp có thể xảy ra của n . Dùng tính chất “Nếu $q^2 < k < (q+1)^2 \ (k; q \in \mathbb{N})$ thì k không là số chính phương” để loại các giá trị không phù hợp của n và từ đó chọn giá trị phù hợp của n .

II. Bài toán:

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để $n(n+1)$ là số chính phương.

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n=0 \Rightarrow n(n+1)=0 \Rightarrow n(n+1)$ là số chính phương

+) $n \geq 1$:

Ta có $n(n+1) = n^2 + n > n^2 \ (n \in \mathbb{N}^*)$ (1)

Mặt khác $n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow n^2 < n^2 + n < (n+1)^2$

$$\Rightarrow n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n(n+1)$ là không là số chính phương.

Vậy $n=0$ thì $n(n+1)$ là số chính phương

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $S = n(n+1)(n+2)(n+3)$ là số chính phương.

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n=0 \Rightarrow S = n(n+1)(n+2)(n+3) = 0 \Rightarrow S$ là số chính phương

+) $n \geq 1$:

Ta có
$$S = [n(n+3)] \cdot [(n+1)(n+2)] = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2)$$

Đặt $(n^2 + 3n) = x \ (x \geq 4) \Rightarrow S = x(x+2) = x^2 + 2x$

Nhận thấy $x^2 < x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 < x^2 + 2x < (x+1)^2$

Suy ra S không là số chính phương $\forall x \geq 4$

Suy ra S không là số chính phương với $n \geq 1$

Vậy $n=0$ thì $S = n(n+1)(n+2)(n+3) = 0$ là số chính phương.

Bài 3: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 3n$ là số chính phương

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n=0 \Rightarrow n^2 + 3n = 0 \Rightarrow n^2 + 3n$ là số chính phương

+) $n=1 \Rightarrow n^2 + 3n = 4 \Rightarrow n^2 + 3n$ là số chính phương

+) $n > 1$:

Ta có
$$n^2 + 3n = n^2 + 2n + n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Cũng có
$$n^2 + 3n = n^2 + 2n + n < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

$$\Rightarrow (n+1)^2 < n^2 + 3n < (n+2)^2$$

$\Rightarrow n^2 + 3n$ không là số chính phương

Vậy với $n=0;1$ thì $n^2 + 3n$ là số chính phương.

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để $n^4 - 3n + 6$ là số chính phương

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n=0 \Rightarrow n^4 - 3n + 6 = 6 \Rightarrow n^4 - 3n + 6$ không là số chính phương.

+) $n=1 \Rightarrow n^4 - 3n + 6 = 4 \Rightarrow n^4 - 3n + 6$ là số chính phương.

+) $n=2 \Rightarrow n^4 - 3n + 6 = 16 \Rightarrow n^4 - 3n + 6$ là số chính phương.

+) $n > 2$:

Ta có $n^4 - 3n + 6 = n^4 + (3n - 6) = n^4 - 3(n - 2) < n^4 = (n^2)^2$ (1)

Mặt khác ta có: $(n^2 - 1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1$

Xét hiệu:

$$n^4 - 3n + 6 - (n^2 - 1)^2 = n^4 - 3n + 6 - (n^4 - 2n^2 + 1)$$

$$= 2n^2 - 3n + 5$$

$$= 2n^2 - 4n + n + 5$$

$$= 2n(n - 2) + n + 5 > 0 \quad \forall n > 2$$

$$\Rightarrow n^4 - 3n + 6 - (n^2 - 1)^2 > 0 \Rightarrow n^4 - 3n + 6 > (n^2 - 1)^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (n^2 - 1)^2 < n^4 - 3n + 6 < (n^2)^2$

$\Rightarrow n^4 - 3n + 6$ không là số chính phương.

Vậy với $n=1;2$ thì $n^4 - 3n + 6$ là số chính phương.

Bài 5: Tìm tất các các số nguyên n để : $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương

Lời giải:

Đặt $y^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 = (n^2 + n + 1)^2 - (n^2 + n + 6)$

$$\Rightarrow y^2 = (n^2 + n)^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{4} \quad \text{hoặc} \quad y^2 = (n^2 + n + 2)^2 - 3(n^2 + n - 1)$$

Khi $n = 0$ hoặc $n = -1 \Rightarrow y^2 = 7$ không phải là số chính phương

Với $n \neq 0, -1 \Rightarrow n^2 + n - 1 = (n-1)(n+1) + n$ và $-3(n^2 + n - 1) < 0$

Ta có : $(n^2 + n)^2 < y^2 < (n^2 + n + 2)^2 \Rightarrow y^2 = (n^2 + n + 1)^2$

$$n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -3 \end{cases}$$

Lúc đó :

Bài 6: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương

Lời giải:

Ta có số tự nhiên n có 2 chữ số nên $10 \leq n \leq 99$

$$\Rightarrow 21 \leq 2n+1 \leq 199$$

Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được $2n+1$ bằng 25; 49; 81; 121; 169

Tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84

Tương ứng $3n+1$ bằng 37; 73; 121; 181; 253. Trong đó chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy số tự nhiên n có 2 chữ số cần tìm là $n = 40$

Bài 7: Tìm số tự nhiên n để $n^4 - n + 2$ là số chính phương

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n = 0 \Rightarrow n^4 - 3n + 6 = 6 \Rightarrow n^4 - 3n + 6$ không là số chính phương.

+) $n \neq 0$ ta xét:

$$(n^4 - n + 2) - (n^2 - 1)^2 = (n^4 - n + 2) - (n^4 - 2n^2 + 1) = 2n^2 - n + 1 > 0$$

$$\Rightarrow (n^4 - n + 2) > (n^2 - 1)^2 \quad (1)$$

$$(n^2 + 1)^2 - (n^4 - n + 2) = (n^4 + 2n^2 + 1) - (n^4 - n + 2) = 2n^2 + n - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (n^2 + 1)^2 > (n^4 - n + 2) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow (n^2 - 1)^2 < (n^4 - n + 2) < (n^2 + 1)^2$$

$$\Rightarrow (n^4 - n + 2) = n^4$$

$$\Leftrightarrow -n + 2 = 0$$

$$\Rightarrow n = 2$$

Vậy $n = 2$ thì $n^4 - n + 2$ là số chính phương

Dạng 4: Tìm một số chính phương thỏa mãn các điều kiện cho trước.

Bài 1: Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số B cũng là số chính phương. Tìm hai số A và B.

Lời giải:

Gọi $A = \overline{abcd} = k^2$, khi đó: $B = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2$ ($k, m \in \mathbb{N}, 32 < k < m < 100$)

Ta có :

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} - \overline{abcd}$$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1000(a+1) + 100(b+1) + 10(c+1) + (d+1) - (1000a + 100b + 10c + d)$$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1000a + 1000 + 100b + 100 + 10c + 10 + d + 1 - (1000a + 100b + 10c + d)$$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111$$

$$\Rightarrow (m - k)(m + k) = 11 \cdot 101 \quad (1)$$

Nhận xét thấy tích với $k, m \in \mathbb{N}, 32 < k < m < 100 \Rightarrow (m - k), (m + k)$ là hai số nguyên dương.

$$\text{và } m - k < m + k < 200 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ k = 45 \end{cases}$$

Vậy hai số $A = 2025, B = 3136$

Bài 2: Tìm 1 số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm hai chữ số sau một đơn vị.

Lời giải:

Gọi số chính phương có 4 chữ số là $\overline{abcd}$

Đặt $\overline{abcd} = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}, 32 \leq k < 100)$

$$\Rightarrow 100\overline{ab} + \overline{cd} = k^2 \quad (1)$$

Mặt khác theo bài ra ta có : $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

$$\Rightarrow 100(\overline{ab} - \overline{cd}) = 100$$

$$\Rightarrow 100\overline{ab} - 100\overline{cd} = 100 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $(100\overline{ab} + \overline{cd}) - (100\overline{ab} - 100\overline{cd}) = k^2 - 100$

$$\Rightarrow 101\overline{cd} = k^2 - 10^2 = (k - 10)(k + 10)$$

$$\Rightarrow k + 10 \vdots 101 \text{ hoặc } k - 10 \vdots 101$$

Mà $k \in \mathbb{N}, 32 \leq k < 100$ nên $(k - 10; 101) = 1 \Rightarrow k + 10 \vdots 101$

Do $32 \leq k < 100$

$$\Rightarrow 42 \leq k + 10 < 110$$

$$\Rightarrow k + 10 = 101$$

$$\Rightarrow k = 91$$

$$\Rightarrow \overline{abcd} = 91^2 = 8281$$

Vậy số chính phương có 4 chữ số cần tìm là 8281

Bài 3: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Lời giải:

Gọi số chính phương phải tìm là : $\overline{aabb} = n^2, (a, b \in \mathbb{N}), 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$

Ta có : $n^2 = \overline{aabb} = 100\overline{aa} + \overline{bb} = 11 \cdot 100a + 11b$

$$\Rightarrow n^2 = 11(100a + b) = 11(99a + a + b) \quad (1)$$

$$\Rightarrow n^2 \vdots 11$$

Mà 11 là số nguyên tố $\Rightarrow n^2 \vdots 11^2 \quad (2)$

Từ (1), (2) ta suy ra $a + b \vdots 11$

Mà $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$

$$\Rightarrow 1 \leq a+b \leq 18$$

$$\Rightarrow a+b=11$$

Thay $a+b=11$ vào (1) ta được : $n^2=11^2(9a+1) \Rightarrow 9a+1$ là số chính phương

Bằng phép thử a từ 1 đến 9 ta thấy có $a=7$ là thỏa mãn $\Rightarrow b=4$

Vậy số cần tìm là 7744 .

Bài 4: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Lời giải:

Gọi số chính phương đó là: $\overline{abcd}$

Theo bài ra ta có $\overline{abcd}=x^2=y^3 (x,y \in \mathbb{N})$

Vì $y^3=x^2 \Rightarrow y$ cũng là một số chính phương.

Mặt khác ta có : $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999$

$$\Rightarrow 1000 \leq y^3 \leq 9999$$

$$\Rightarrow 10^3 \leq y^3 \leq 21^3$$

$$\Rightarrow 10 \leq y \leq 21$$

Mà y là số chính phương nên $y=16$

$$\Rightarrow \overline{abcd}=16^3$$

$$\Rightarrow \overline{abcd}=4096$$

Vậy số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương là 4096

Bài 5: Tìm số có hai chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Lời giải:

Gọi số phải tìm là $\overline{ab} (a,b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9)$

Theo bài ra ta có: $\overline{ab}^2=(a+b)^3 \Leftrightarrow (10a+b)^2=(a+b)^3$

Khi đó $\overline{ab}$ là một lập phương và $a+b$ là một số chính phương

Đặt $\overline{ab}=t^3 (t \in \mathbb{N}), a+b=m^2 (m \in \mathbb{N})$

$$\forall i \quad 10 \leq \overline{ab} \leq 99$$

$$\Rightarrow 10 \leq t^3 \leq 99$$

$$\Rightarrow t = 27 \text{ hoặc } t = 64$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 27 \text{ hoặc } \overline{ab} = 64$$

TH1 : $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a + b = 9$ là số chính phương

TH2 : $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a + b = 10$ không là số chính phương (loại)

Vậy số có hai chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó là 27.

Bài 6: Tìm ba số chính phương lẻ liên tiếp mà tổng của chúng là một số có 4 chữ số giống nhau.

Lời giải:

Gọi ba số lẻ liên tiếp đó là: $2n-1, 2n+1, 2n+3 (n \in \mathbb{N})$

Ta xét: $A = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2$

$$A = (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9)$$

$$A = 12n^2 + 12n + 11$$

Theo bài ra ta có $A = 12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111a$ (a lẻ và $1 \leq a \leq 9$)

$$\Rightarrow 12n^2 + 12n = 1111a - 11$$

$$\Rightarrow 12n(n+1) = 11(101a - 1) \quad (*)$$

$$\Rightarrow 101a - 1 \vdots 3$$

$$\Rightarrow 99a + 2a - 1 \vdots 3$$

$$\Rightarrow 2a - 1 \vdots 3$$

$$\forall i \quad 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow 1 \leq 2a - 1 \leq 17$$

$$\text{Mà } 2a - 1 \text{ lẻ nên } 2a - 1 \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17\} \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$\forall i \quad a \text{ lẻ nên } a = 1; 3; 5; 7; 9$$

+ Thay $a = 1$ vào (*) ta được $12n(n+1) = 1100$

$$\Rightarrow n(n+1) = 275$$

Mà $n(n+1)$ là tích 2 số tự nhiên liên tiếp nên chỉ có tận cùng là $0; 2; 6$ (loại)

+ Thay $a=5$ vào(*) ta được $12n(n+1)=5544$

$$\Rightarrow n(n+1)=462$$

$$\Rightarrow n(n+1)=21.22$$

$$\Rightarrow n=21$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n-1=41 \\ 2n+1=43 \\ 2n+3=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2n-1)^2=1681 \\ (2n+1)^2=1849 \\ (2n+3)^2=2025 \end{cases}$$

Vậy ba số chính phương lẻ liên tiếp cần tìm là 1681;1849;2025

Bài 7: Tìm số chính phương mà nó bằng bình phương của một số có hai chữ số và bằng lập phương của tổng hai chữ số của số có hai chữ số đó.

Lời giải:

Gọi số chính phương cần tìm là n

Theo bài ra ta có $(\overline{ab})^2=n=(a+b)^3$ nên $(a+b)$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } (a+b)=x^2 \Rightarrow x^6=\overline{ab}^2 \Rightarrow x^3=\overline{ab}$$

$$\text{mà } 9<\overline{ab}<100 \Rightarrow 9<x^3<100 \Rightarrow x \in \{3;4\}$$

$$\text{Nếu } x=3 \Rightarrow \overline{ab}=27 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Nếu } x=4 \Rightarrow \overline{ab}=64 \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow n=\overline{ab}^2=27^2=729$$

Vậy số chính phương cần tìm là 729

Bài 8: Tìm một số chính phương biết nó bằng tổng của một số có hai chữ số với số gồm hai chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại.

Lời giải:

$$n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Gọi số chính phương đó có dạng

Theo bài ra ta có : $n^2=\overline{ab}+\overline{ba} \quad (a,b \in \mathbb{N}; 0 < a,b < 9)$

$$\Rightarrow n^2 = 10a + b + 10b + a = 11(a + b) \Rightarrow n^2 : 11$$

Mà 11 là số nguyên tố nên $\Rightarrow n^2 : 11^2$

$$\Rightarrow 11(a + b) : 11^2 \Rightarrow (a + b) : 11$$

Mà $a, b \in \mathbb{N}; 0 < a, b < 9 \Rightarrow 2 < (a + b) < 18 \Rightarrow (a + b) = 11$

$$\Rightarrow n^2 = 11.11 = 121$$

Vậy số chính phương cần tìm là 121

Bài 9: Tìm một số chính phương biết nó bằng bình phương của một số có hai chữ số trừ đi bình phương của số gồm hai chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại.

Lời giải:

$$n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Gọi số chính phương đó có dạng

Theo bài ra ta có : $n^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ba}^2 \quad (a, b \in \mathbb{N}; 0 < a, b < 9)$

$$\Rightarrow n^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = (100a^2 + 20ab + b^2) - (100b^2 + 20ab + a^2)$$

$$\Rightarrow n^2 = 99a^2 - 99b^2 = 99(a^2 - b^2) = 11.9(a^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow n^2 = 11.9(a - b)(a + b)$$

$$\Rightarrow n^2 : 11$$

Mà 11 là số nguyên tố nên $\Rightarrow n^2 : 11^2$

$$\Rightarrow 11.9.(a - b)(a + b) : 11^2$$

Vì $a, b \in \mathbb{N}; 0 < a, b < 9 \Rightarrow 0 < (a - b) < 8, 2 < (a + b) < 18 \Rightarrow (a + b) = 11$

$$\Rightarrow n^2 = 11^2.3^2(a - b) \quad \text{suy ra } (a - b) \text{ là số chính phương}$$

Mà $0 < (a - b) < 8 \Rightarrow (a - b) = 1; 4$

Mặt khác vì $(a - b), (a + b)$ cùng tính chẵn lẻ nên $(a - b) = 1$

$$\Rightarrow n^2 = 11^2.3^2.1 = 1089$$

Vậy số chính phương cần tìm là 1089

Bài 10: Tìm số chính phương có dạng $\overline{abcd}$, biết : $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

Lời giải:

$$\overline{abcd} = n^2 \Rightarrow n^2 = 100\overline{ab} + \overline{cd}$$

Đặt

$$\text{Mà } \overline{ab} = \overline{cd} + 1$$

$$\text{nên } n^2 = 100(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$$

$$\Rightarrow n^2 - 10^2 = 101\overline{cd}$$

$$\Leftrightarrow 101\overline{cd} = (n+10)(n-10)$$

$$\Rightarrow (n-10)(n+10) : 101$$

$$\text{Vì } 101 \text{ là số nguyên tố} \Rightarrow \begin{cases} n-10 : 101 \\ n+10 : 101 \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } 1000 \leq n^2 < 10000 \Rightarrow 31 < n < 100 \Rightarrow n+10 : 101 \Leftrightarrow n=91$$

$$\Rightarrow \overline{abcd} = 91^2 = 8281$$

Bài 11: Tìm một số chính phương có 4 chữ số là số là một lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải:

$$\text{Gọi số chính phương đó là : } \overline{abcd} = x^2 = y^3 (x, y \in \mathbb{N})$$

$$\text{Vì } y^3 = x^2 \Rightarrow y \text{ cũng là một số chính phương.}$$

$$\text{Ta có : } 1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Rightarrow 1000 \leq y^3 \leq 9999 \Rightarrow 10 \leq y \leq 21$$

$$\text{Mà } y \text{ là số chính phương nên } y=16$$

$$\Rightarrow \overline{abcd} = 16^3 = 4096$$

$$\text{Vậy số chính phương cần tìm là } 4096$$

Bài 12: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố và số đó bằng bình phương của số có tổng các chữ số là một số chính phương.

Lời giải:

$$\text{Gọi số phải tìm là : } \overline{abcd} \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$$

Vì $\overline{abcd}$ là số chính phương nên $d \in \{0; 1; 4; 5; 6; 9\}$ mà d là số nguyên tố nên $d = 5$

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 1000 \Rightarrow 32 \leq k < 100$ với k là 1 số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng là 5

$\Rightarrow k$ có tận cùng là 5 và tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow k = 45$

Vậy $\overline{abcd} = 2025$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vn teach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>