ĐỀ 05

Bài 1. (4 điểm)

a) Cho biểu thức A = $\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn B = 1 - $\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0\le x\le\frac{1}{4}$

b) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn x - 2y + z = 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$$

Bài 2. (6 điểm)

a) Giải phương trình $3x^2+6=9x-2x\sqrt{x-2}$

b) Giải phương trình (x - 2)$\sqrt{x-1}+(x+3)\sqrt{x+4}=x^2+x$

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+7y^2=61+4x$

d) Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn a > b và $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh a, b là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 3. (2 điểm)

a) Cho a, b $\ge 0, ab=1$.Chứng minh rằng:

$\sqrt{2(a^2+1)}+\sqrt{2(b^2+1)}\le$2(a + b)

b) Cho ba số không âm a, b, c. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\ge 3abc+\frac{9}{4}|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Bài 4. (7 điểm) Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH. Gọi E, F là các điểm lần lượt thuộc các tia HC, HB sao cho ∠EAB = ∠FAC = 90°.

a) Chứng minh $\frac{HB}{HC}=\frac{HF}{HE}=\frac{FB}{CE}$

b) Gọi P thuộc đoạn thẳng AH (P ≠ A; P ≠ H). Trên tia đối của tia PE lấy điểm M sao cho BM = BA. Trên tia đối của tia PF lấy N sao cho CN = CA. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với PF cắt đường thẳng AH tại K. Chứng minh BP ⊥ KE .

c) Các đường thẳng BM, CN cắt nhau tại S. Chứng minh SM = SN.

Bài 5. (1 điểm) Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

--- Hết ---

LỜI GIẢI

Bài 1.

a) Rút gọn A = 2x

Thay vào

B = 1 - $\sqrt{4x-4\sqrt{x}+1}$

= 1 - $|2\sqrt{x}-1|$

= 1 - (1 - $2\sqrt{x}$)

= $2\sqrt{x}$

b) Ta có 2y = x + z

$\Longleftrightarrow (x+z)+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})=2y+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$

$\Longleftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{z}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{z}) = 2(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{y}+\sqrt{z})$

$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}+2\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{y}+\sqrt{z})}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$

Bài 2.

a) ĐKXĐ: x ≥ 2

Phương trình đã cho tương đương với

$4x^2-8x+4=x^2-2x\sqrt{x-2}+x-2$

$\Longleftrightarrow (2x-2)^2=(x-\sqrt{x-2})^2$

$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=x-\sqrt{x-2}\\2x-2=\sqrt{x-2}-x\end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=-\sqrt{x-2}(1)\\3x-2=\sqrt{x-2}(2)\end{array}\right.$

Với x ≥ 2, VT(1) ≥ 0 ≥ VP(1)

Để (1) xảy ra thì x = 2

Phương trình (2) tương đương với

3(x - 2) - $\sqrt{x-2}$ + 4 = 0 $\Longleftrightarrow 3(\sqrt{x-2}-1)^2+5\sqrt{x-2}$ + 1 = 0

(vô nghiệm vì vế trái dương với mọi x ≥ 2)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: S = $\{2\}$

b) ĐK x ≥ 1

(1) $\Leftrightarrow$ (x - 2) $\left(\sqrt{x-1}-2\right)+(x+3)\left(\sqrt{x+4}-3\right)=x^2-4x-5$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-2)(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{(x-5)(x+3)}{\sqrt{x+4}+3}=(x-5)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow(x-5)\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}-x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}=x+1\,(2)\end{array}\right.$$

Ta có $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}<\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+2}\leq\frac{x-1}{2};\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}\leq\frac{x+3}{3}$

Suy ra VT(2) < $\frac{x-1}{2}+\frac{x+3}{3}=\frac{5x+3}{6}<\frac{6x+6}{6}=x+1=VP(2)$

Do đó (2) vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: S = $\{5\}$

c) $2x^2+7y^2=61+4x$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+7y^2 = 63$

$\Leftrightarrow 7y^2\leq 63$ => $y^2\leq 9$

=> $y^2\in\{0;1;4;9\}$

Mà 65 lẻ, $2(x-1)^2$ chẵn nên => $y^2\in\{1;9\}$

TH1: $y^2 = 1$ => $(x-1)^2 = 28$ (loại)

TH2: $y^2 = 9$ => $(x-1)^2 = 0$ => y = $\pm 3; x=1$

Vậy (x;y) $\in\{(1;3);(1;-3)\}$

d) $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)\Leftrightarrow(a-b-1)^2=4a\Leftrightarrow$ a = $\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2$

$a^2+b^2+1=2(ab+a+b)\Leftrightarrow$ b = $\left(\frac{a-b+1}{2}\right)^2$

Suy ra a, b đều chính phương. Lại có $\frac{a-b+1}{2}$ - $\frac{a-b-1}{2}$ = 1 nên a, b là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 3.

a) Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\sqrt{2(a^2+1)}=\sqrt{2(a^2+ab)}=\sqrt{2(a+b)a}=\sqrt{2a(a+b)}\leq\frac{2a+a+b}{2}=\frac{3a}{2}+\frac{b}{2}$$

Tương tự, ta có $\sqrt{2(b^2+1)}=\frac{a}{2}+\frac{3b}{2}$

Do đó $\sqrt{2(a^2+1)}$ + $\sqrt{2(b^2+1)}$ ≤ 2a + 2b = 2(a+b). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = 1.

b) Ta có $|a-b|$ ≤ $|a|+|b|$ = a + b.

Tương tự $|b-c|\leq|b|+|c|$= b + c; $|c-a|\leq|c|+|a|$ = c + a.

Suy ra 2(a+b+c)$\geq|a-b|+|b-c|+|c-a|\geq3\sqrt[3]{|(a-b)(b-c)(c-a)|}$

(Theo BĐT Cô Si cho ba số không âm $|a-b|,|b-c|,|c-a|$)   (1)

Lại có:

$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2+ (b-c)^2+ (c-a)^2$

$\geq 3\sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$

(Theo BĐT Cô Si cho ba số không âm $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ (2)

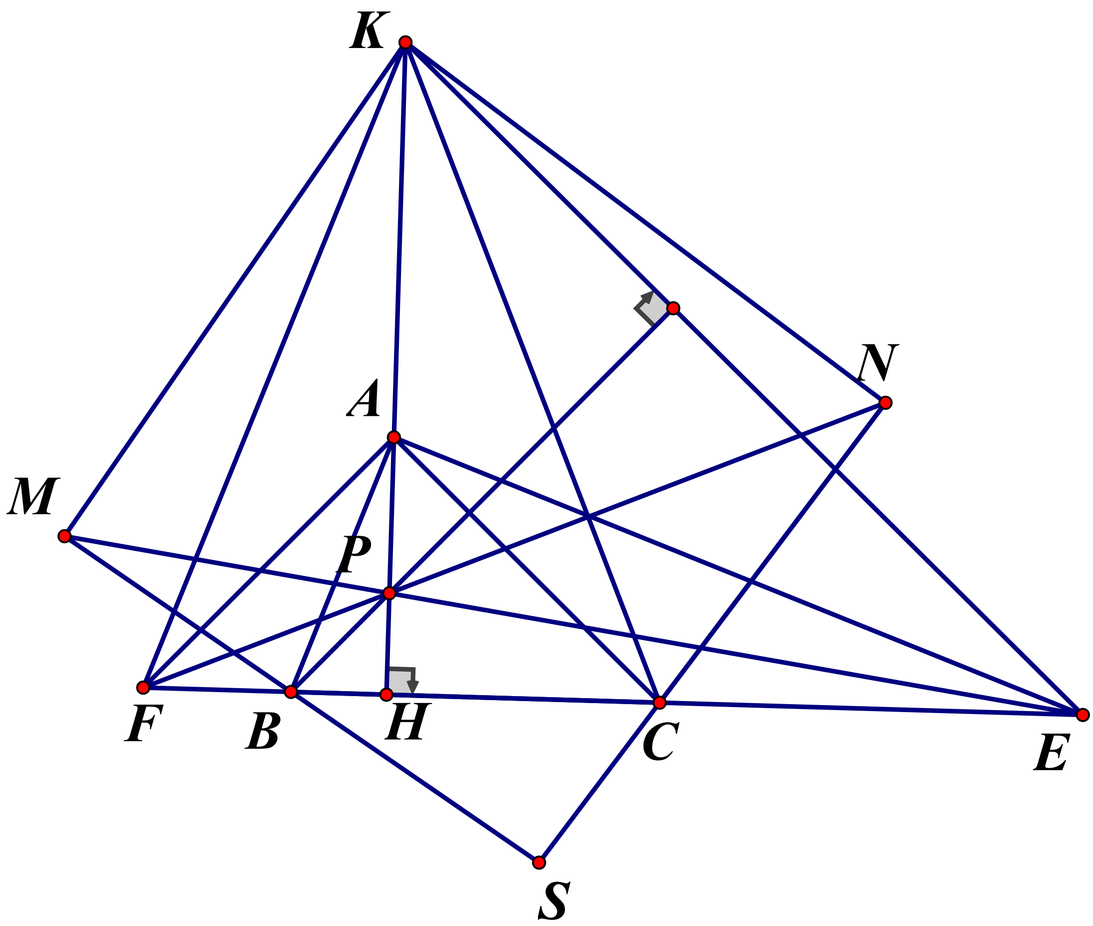
Nhân theo vế (1) và (2) suy ra

$4(a^3+b^3+c^3-3abc)\geq9|(a-b)(b-c)(c-a)|$

=> $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc + \frac{9}{4}|(a-b)(b-c)(c-a)|$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c

Bài 4.



a) Xét tam giác ABE vuông tại A, đường cao AH: HB.HE = AH^2

Xét tam giác ACF vuông tại A, đường cao AH: HC.HF = AH^2

Từ đây ta suy ra HB.HE = HC.HF

=> $\frac{HB}{HC} = \frac{HF}{HE} = \frac{HF - HB}{HE - HC} = \frac{FB}{CE}$

b) Gọi J là giao điểm của KB và EM; I là giao điểm của KC và FN.

Xét tam giác KFC: KH, FI là các đường cao nên P là trực tâm.

Khi đó ΔHPF ΔHKC (g.g) => HP.HK = HF.HC

Lại có HF.HC = HE.HB => HP.HK = HE.HB => ΔHBK ΔHPE (c.g.c)

=> ∠KBH = ∠HPE => ∠JKP + ∠KPJ = ∠JKP + ∠KBH = 90° => EJ ⊥ BK

Suy ra P cũng là trực tâm tam giác KBE.

Do đó BP ⊥ KE

c) Ta có BM = BA => $BM^2 = BA^2 = BH.BC = BJ.BK =$ ¿ BM ⊥MK

=> $KM^2 = KJ . KB = KI . KC = KN^2$

=> $KS^2 - KM^2 = KS^2 - KN^2 =$ ¿ $MS = NS$

Bài 5.

Theo nguyên lí Đi rích lê, 5 = 2.2 + 1 nên trong năm số có ba chữ số có lũy thừa của 3 cùng tính chẵn lẻ.

Vì 3 = 2.1 + 1 nên trong ba số này lại có hai số mà lũy thừa của 2 cùng tính chẵn lẻ.

Khi đó hai số này có tổng lũy thừa của 2 hay 3 đều chẵn nên tích là số chính phương. Từ đó ta có điều phải chứng minh.