

Câu 1 (6.0 điểm).

- a) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C_m) và điểm $C(1;4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4?
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0 \\ 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2 (5.0 điểm).

- a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-3)^{2022} \left(x^2 - x + \frac{1}{3} \right) (x^2 - 2x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 50$, trong đó x_1, x_2, x_3 là hoành độ của ba cực trị đó.
- b) Tính tổng $S = \frac{1}{2019} (C_{2019}^1)^2 + \frac{2}{2018} (C_{2019}^2)^2 + \dots + \frac{2018}{2} (C_{2019}^{2018})^2 + \frac{2019}{1} (C_{2019}^{2019})^2$

Câu 3 (1.5 điểm).

Trên sa mạc có một khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 70$ km, chiều rộng $AD = 10$ km. Vận tốc trung bình của xe máy trên khu đất này là 20 km/h, riêng đi trên cạnh CD thì vận tốc là 40 km/h. Một người đi xe máy xuất phát từ A lúc 8h sáng và muốn đến B sau 3h nữa. Hỏi người đó có thể đến B kịp thời gian không? Xây dựng phương án di chuyển trên khu đất từ A đến B để hết ít thời gian nhất.

Câu 4 (6.0 điểm).

- a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a . Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thỏa mãn $\overline{AD} = 3\overline{MD}$. Trên cạnh CD lấy các điểm I, N sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{MBI}$ và MN vuông góc với BI . Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$ và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC) .
- b) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC . Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1, V thứ tự là thể tích của khối chóp $SAMKN$ và khối chóp $SABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tỷ số $\frac{V_1}{V}$.

Câu 5 (1.5 điểm).

Cho các số dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{6}{\sqrt{a+b+c}}$

.....HẾT.....

Câu 1 (6.0 điểm).

a. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C_m) và điểm $C(1;4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4?

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} . \text{ Ta có: } y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}.$$

Để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị thì điều kiện là: $m \neq 0$ (*).

$$\text{Tọa độ hai điểm cực trị là: } A(0; 4m^2 - 2), B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2).$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB: 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$$

$$d(C; AB) = \frac{|6 - 2m^2|}{\sqrt{1 + 4m^2}}; \overline{AB} = (2m; -4m^3) \Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{1 + 4m^4}$$

$$\text{Do đó: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} d(C; AB) \cdot AB = |6m - 2m^3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases} (tm(*)).$$

Vậy có 4 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{b) Giải hệ phương trình } \begin{cases} (17 - 3x)\sqrt{5 - x} + (3y - 14)\sqrt{4 - y} = 0 \\ 2\sqrt{2x + y + 5} + 3\sqrt{3x + 2y + 11} = x^2 + 6x + 13 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ 4 - y \geq 0 \\ 2x + y + 5 \geq 0 \\ 3x + 2y + 11 \geq 0 \end{cases} (*).$$

Đặt $\sqrt{5 - x} = a \geq 0$; $\sqrt{4 - y} = b \geq 0$, phương trình $(17 - 3x)\sqrt{5 - x} + (3y - 14)\sqrt{4 - y} = 0$ trở thành:

$$[17 - 3(5 - a^2)] \cdot a + [3(4 - b^2) - 14] = 0 \Leftrightarrow (3a^2 + 2) \cdot a = (3b^2 + 2) \cdot b \Leftrightarrow 3a^3 + 2a = 3b^3 + 2b$$

Xét hàm số $y = f(t) = 3t^3 + 2t$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 9t^2 + 2 > 0, \forall t \in [0; +\infty)$ nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Vì thế với $a \geq 0, b \geq 0$ thì $3a^3 + 2a = 3b^3 + 2b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Suy ra $\sqrt{5-x} = \sqrt{4-y} \Leftrightarrow 5-x = 4-y \Leftrightarrow y = x-1$.

Thay $y = x-1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình:

$$2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13 \quad (1).$$

Điều kiện $x \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right]$.

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (2\sqrt{3x+4} - 2) + (3\sqrt{5x+9} - 6) = x^2 + 6x + 5$

$$\Leftrightarrow \frac{4(3x+4)-4}{2\sqrt{3x+4}+2} + \frac{9(5x+9)-36}{3\sqrt{5x+9}+6} = (x+1)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x+1)}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15(x+1)}{\sqrt{5x+9}+2} = (x+1)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} = x+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} = x+5 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (2) tương đương với $\frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} - x = 5$.

Đặt $g(x) = \frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} - x, x \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right]$.

Ta có $g'(x) = \frac{-9}{(\sqrt{3x+4}+1)^2 \cdot \sqrt{3x+4}} - \frac{75}{2(\sqrt{5x+9}+2)^2 \cdot \sqrt{5x+9}} - 1 < 0, \forall x \in \left(-\frac{4}{3}; 5\right)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left[-\frac{4}{3}; 5\right]$

Vì thế phương trình $g(x) = 5$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\left[-\frac{4}{3}; 5\right]$.

Ta lại có $x=0$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 5$ nên đây là nghiệm duy nhất.

Với $x=-1$ thì $y=-2$.

Với $x=0$ thì $y=-1$.

So sánh điều kiện (*), hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(-1; -2); (0; -1)$.

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-3)^{2022} \left(x^2 - x + \frac{1}{3} \right) (x^2 - 2x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 50$, trong đó x_1, x_2, x_3 là hoành độ của ba cực trị đó.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Trong đó, $x = 3$ là nghiệm bội chẵn.

Xét hàm $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có $g'(x) = (2x - 8)f'(x^2 - 8x + m)$. Khi đó,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 3 \\ x^2 - 8x + m = 2 \\ x^2 - 8x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x = 3 - m & (1) \\ x^2 - 8x = 2 - m & (2) \\ x^2 - 8x = -m & (3) \end{cases}.$$

Ta xét hàm $h(x) = x^2 - 8x$. Hàm số này có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	-16	$+\infty$

Nếu $3 - m < -16 \Leftrightarrow m > 19$ thì các phương trình (1), (2), (3) đều vô nghiệm. Do đó, hàm số $g(x)$ chỉ có một cực trị.

Nếu $2 - m \leq -16 \leq 3 - m \Leftrightarrow 18 \leq m \leq 19$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn hoặc nghiệm kép, phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, phương trình (3) vô nghiệm. Do đó, hàm số $g(x)$ chỉ có một cực trị.

Nếu $-m \leq -16 < 2 - m \Leftrightarrow 16 \leq m < 18$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn, phương trình (2) có 2 nghiệm bội lẻ, phương trình (3) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép. Do đó, hàm số $g(x)$ có ba cực trị. Khi đó, giả sử $x_1 = 4$ thì x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện $x_2^2 + x_3^2 = 34 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 34$.

Kết hợp với định lý Vi-et ta có $64 - 2(m - 2) = 34 \Leftrightarrow m = 17$ (thỏa điều kiện $16 \leq m < 18$).

Nếu $-m > -16 \Leftrightarrow m < 16$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn, phương trình (2) có 2 nghiệm đơn, phương trình (3) có 5 nghiệm đơn. Do đó, hàm số $g(x)$ không thỏa mãn có ba cực trị.

Vậy $m = 17$ là giá trị cần tìm.

Cách 2.

Xét hàm $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có

$$g'(x) = (2x - 8)f'(x^2 - 8x + m) \\ = (2x - 8)(x^2 - 8x + m - 3)^{2018} \left(e^{2x^2 - 16x + 2m} - e^{x^2 - 8x + m} + \frac{1}{3} \right) \left[(x^2 - 8x + m)^2 - 2(x^2 - 8x + m) \right].$$

Dấu của $g'(x)$ cùng dấu với $(2x - 8) \left[(x^2 - 8x + m)^2 - 2(x^2 - 8x + m) \right]$.

$$\text{Ta có } (2x - 8) \left[(x^2 - 8x + m)^2 - 2(x^2 - 8x + m) \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 0 \\ x^2 - 8x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x = -m \\ x^2 - 8x = 2 - m \end{cases}.$$

Ta xét hàm $h(x) = x^2 - 8x$. Hàm số này có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	-16	$+\infty$

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $-m \leq -16 < 2 - m \Leftrightarrow 16 \leq m < 18$. Khi đó, giả sử $x_1 = 4$ thì x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 8x = 2 - m$ thỏa mãn điều kiện

$$x_2^2 + x_3^2 = 34 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 34.$$

Kết hợp với định lý Vi-et ta có $64 - 2(m - 2) = 34 \Leftrightarrow m = 17$ (thỏa điều kiện $16 \leq m < 18$).

Vậy $m = 17$ là giá trị cần tìm.

Câu 2b(2.0 điểm). Tính tổng $S = \frac{1}{2019} \binom{2019}{1}^2 + \frac{2}{2018} \binom{2019}{2}^2 + \dots + \frac{2018}{2} \binom{2019}{2018}^2 + \frac{2019}{1} \binom{2019}{2019}^2$.

Lời giải

Xét số hạng tổng quát :

$$T_k = \frac{k}{2020 - k} \cdot \binom{2019}{k}^2 = \frac{k}{2020 - k} \cdot \frac{2019!}{(2019 - k)!k!} \cdot C_{2019}^k = \frac{2019!}{(2020 - k)!(k - 1)!} \cdot C_{2019}^k \\ = C_{2019}^{k-1} \cdot C_{2019}^{2019-k}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2019$$

Suy ra $S = C_{2019}^0 \cdot C_{2019}^{2018} + C_{2019}^1 \cdot C_{2019}^{2017} + \dots + C_{2019}^{2017} \cdot C_{2019}^1 + C_{2019}^{2018} \cdot C_{2019}^0$

Xét

$$(1+x)^{2019} (1+x)^{2019} = (C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}) (C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019})$$

Hệ số của x^{2018} trong khai triển $(1+x)^{2019} (1+x)^{2019}$ là :

$$C_{2019}^0 \cdot C_{2019}^{2018} + C_{2019}^1 \cdot C_{2019}^{2017} + \dots + C_{2019}^{2017} \cdot C_{2019}^1 + C_{2019}^{2018} \cdot C_{2019}^0 \quad (1)$$

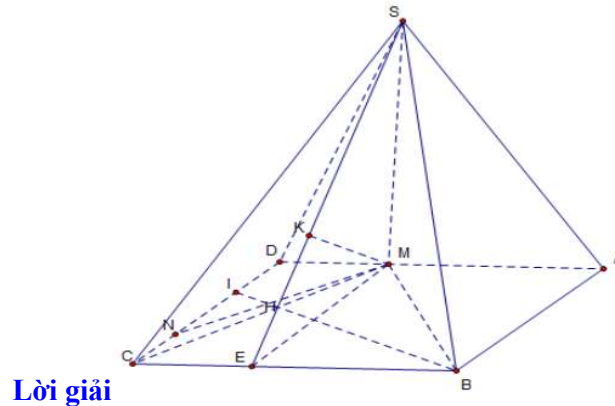
Xét khai triển : $(1+x)^{4038} = C_{4038}^0 + C_{4038}^1 x + \dots + C_{4038}^{2018} x^{2018} + \dots + C_{4038}^{4038} x^{4038}$

Hệ số của x^{2018} trong khai triển $(1+x)^{4038}$ là C_{4038}^{2018} (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$S = \frac{1}{2019} (C_{2019}^1)^2 + \frac{2}{2018} (C_{2019}^2)^2 + \dots + \frac{2018}{2} (C_{2019}^{2018})^2 + \frac{2019}{1} (C_{2019}^{2019})^2 = C_{4038}^{2018}$$

Câu 4a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a . Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thỏa mãn $\overline{AD} = 3\overline{MD}$. Trên cạnh CD lấy các điểm I, N sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{MBI}$ và MN vuông góc với BI . Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$ và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC) .



Lời giải

*) Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$:

Ta có :

$$DM = \frac{AD}{3}, AM = \frac{2a}{3} \Rightarrow CM = \sqrt{DM^2 + CD^2}$$

$$SM \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SCM} = 60^\circ \Rightarrow SM = CM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Khi đó : } S_{AMCB} = \frac{(AM + CB) \cdot AB}{2} = \frac{5a^2}{6} \Rightarrow V_{S.AMCB} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{AMCB} = \frac{5a^3 \sqrt{30}}{54}$$

*) Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC)

$$\text{Ta có : } BM = \frac{a\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \cos \widehat{ABM} = \frac{AB}{BM} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \cos \widehat{IBM}$$

$$\text{Đặt } DI = x \Rightarrow IM^2 = x^2 + \frac{a^2}{9}, IB = (a-x)^2 + a^2.$$

Áp dụng định lý cosin ta có

$$\begin{aligned} IM^2 &= MB^2 + IB^2 - 2MB \cdot IB \cdot \cos \widehat{IBM} \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{9} = (a-x)^2 + a^2 + \frac{13a^2}{9} - 2a \cdot \sqrt{(a-x)^2 + a^2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7a}{12} \Rightarrow IB = \frac{13a}{12} \end{aligned}$$

$$\text{Gọi } H = MN \cap BI. \text{ Ta có } \triangle ABM = \triangle MBH \Rightarrow BH = AB = a, IH = IB - BH = \frac{a}{12}$$

$$\triangle CBI \sim \triangle HNI \Rightarrow \frac{BI}{NI} = \frac{CI}{HI} \Rightarrow NI = \frac{HI \cdot BI}{CI} = \frac{13a}{60}, CN = CD - DI - IN = \frac{a}{5} \Rightarrow \frac{CN}{CD} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Suy ra : } d(N, (SBC)) = \frac{1}{5} \cdot d(D, (SBC)) = \frac{1}{5} d(M, (SBC))$$

Kẻ ME vuông góc với BC , MK vuông góc với SE . Suy ra : $MK = d(M, (SBC))$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \frac{1}{MK^2} &= \frac{1}{MS^2} + \frac{1}{ME^2} = \frac{13}{10a^2} \Rightarrow MK = \frac{a\sqrt{130}}{13} \\ \Rightarrow d(N, (SBC)) &= \frac{1}{5} \cdot d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{130}}{65} \end{aligned}$$

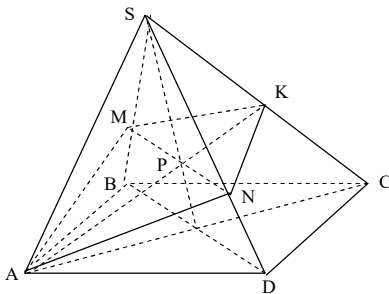
Bài 4b: (3 điểm):

Vì ABCD là hình bình hành

$$\Rightarrow V_{SABC} = V_{SADC} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{1}{2} V. \text{ Đặt } \frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SD} = y$$

$$\text{thì } \frac{V_{SAMK}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} \Rightarrow V_{SAMK} = \frac{x \cdot V}{4} \Rightarrow V_1 = V_{SAMK} + V_{SANK} = \frac{V}{4} (x + y) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } V_1 = V_{SAMN} + V_{SMNK} = x \cdot y \cdot \frac{V}{2} + x \cdot y \cdot \frac{V}{4} \Rightarrow V_1 = \frac{3xy \cdot V}{4} \quad (2).$$



$$\text{Từ (1) (2)} \Rightarrow x + y = 3xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1} \quad (3)$$

$$\text{Do } x > 0 \text{ và } y > 0 \text{ nên từ (3)} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$\text{Và } y = \frac{SN}{SD} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 1 \geq 0 \text{ (vì } 3x-1 > 0) \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ do đó } \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{4} (x + y) = \frac{3}{4} xy = \frac{3}{4} x \cdot \frac{x}{3x-1} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{3x^2}{4(3x-1)} \text{ với } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \text{ Ta có } f'(x) = \frac{3x(3x-2)}{4(3x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{không thuộc đoạn } [\frac{1}{2}; 1] \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
f'(x)	-	0	+
f(x)	$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$

$\swarrow \quad \searrow$
 $\frac{1}{3}$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{3}{8} \text{ với } \forall x \in [\frac{1}{2}; 1] \text{ hay } \frac{1}{3} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{3}{8}$$

$$\text{Vậy Min } \left(\frac{V_1}{V}\right) = \frac{1}{3} \text{ khi } x = \frac{2}{3} \text{ hay SM} = \frac{2}{3} \text{ SB}$$

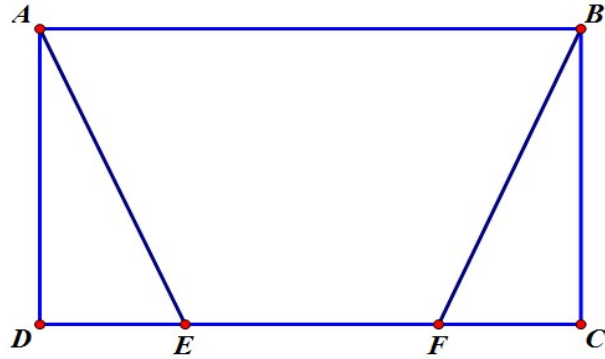
$$\text{Và Max } \left(\frac{V_1}{V}\right) = \frac{3}{8} \text{ khi } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ là trung điểm của SB} \\ M \equiv B \end{cases}$$

Câu 3.

Trên sa mạc có một khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 70$ km, chiều rộng $AD = 10$ km. Vận tốc trung bình của xe máy trên khu đất này là 20 km/h, riêng đi trên cạnh

CD thì vận tốc là 40 km/h . Một người đi xe máy xuất phát từ A lúc 8h sáng và muốn đến B sau 3h nữa. Hỏi người đó có thể đến B kịp thời gian không? Xây dựng phương án di chuyển trên khu đất từ A đến B để hết ít thời gian nhất.

Lời giải



Cách 1.

Trường hợp: xe máy không chạy trên CD , khi đó thời gian ngắn nhất đi từ A đến B là chạy trên AB suy ra $t = \frac{70}{20} = 3,5(h)$.

Trường hợp: xe máy có chạy trên CD . Giả sử xe chạy từ A đến B qua EF .

Đặt $DE = x, FC = y, 0 \leq x, y \leq 70 \Rightarrow EF = 70 - (x + y); AE = \sqrt{x^2 + 100}; BF = \sqrt{y^2 + 100}$.

Khi đó thời gian xe chạy là:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{20} + \frac{\sqrt{y^2 + 100}}{20} + \frac{70 - (x + y)}{40} = \frac{1}{20} \left(\sqrt{x^2 + 10^2} + \sqrt{y^2 + 10^2} - \frac{x + y}{2} + 35 \right)$$

$$\geq \frac{1}{20} \left(\sqrt{(x + y)^2 + 400} - \frac{x + y}{2} + 35 \right) \quad (\text{áp dụng } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|)$$

Xét $h(a) = \sqrt{a^2 + 400} - \frac{a}{2} + 35; 0 \leq a \leq 70$

$$h'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 400}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

a	0	$\frac{20}{\sqrt{3}}$	70	
$h'(a)$		-	0	+
$h(a)$				

$$\text{Dựa vào BBT} \Rightarrow h(a) \geq h\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = \frac{30}{\sqrt{3}} + 35 \Rightarrow t \geq \frac{7 + 2\sqrt{3}}{4} (h)$$

$$t_{\min} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = a = \frac{20}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Từ 2 trường hợp trên ta có thể kết luận: Sau 3h xe có thể chạy từ A đến B được, với thời gian chạy ngắn nhất $t = \frac{7+2\sqrt{3}}{4}(h)$ khi $DE = CF = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

Cách 2.

KN1: Để đi từ A đến B nếu chỉ di chuyển trên đoạn AB thì hết số giờ là

$t = \frac{S}{V} = \frac{70}{20} = 3,5$ (giờ), vậy trong trường hợp này không thể đến B kịp thời gian sau 3 giờ như yêu cầu bài toán.

Vì vận tốc trên khu đất (trừ cạnh CD) là 20km/h, do đó chỉ đi theo AB không kịp thời gian thì mọi con đường khác mà không đi trên CD đều không kịp thời gian.

Do đó ta xét khả năng 2

KN2: Để đi từ A đến B và có đi trên cạnh CD

Giả sử đi từ A đến E , từ E đến F và từ F đến B (như hình vẽ). Đặt $DE = a, FC = b$

Khi đó thời gian để di chuyển từ A đến B là $t = \frac{\sqrt{100+a^2}}{20} + \frac{\sqrt{100+b^2}}{20} + \frac{70-(a+b)}{40}$

Áp dụng bất $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

Ta có $\frac{\sqrt{100+a^2}}{20} + \frac{\sqrt{100+b^2}}{20} \geq \frac{\sqrt{(10+10)^2 + (a+b)^2}}{20} = \frac{\sqrt{400+(a+b)^2}}{20}$,

dấu “=” xảy ra khi $a = b$

Vậy $t = \frac{\sqrt{100+a^2}}{20} + \frac{\sqrt{100+b^2}}{20} + \frac{70-(a+b)}{40} \geq \frac{\sqrt{400+(a+b)^2}}{20} + \frac{70-(a+b)}{40}$

Đặt $a+b = x, (0 \leq x \leq 70)$

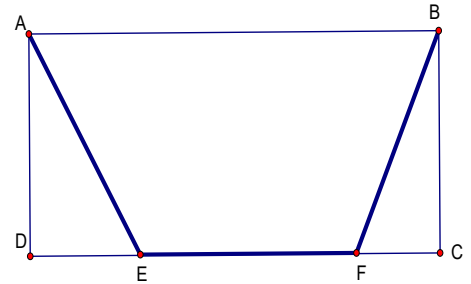
Xét $f(x) = \frac{\sqrt{400+x^2}}{20} + \frac{70-x}{40}, 0 \leq x \leq 70$

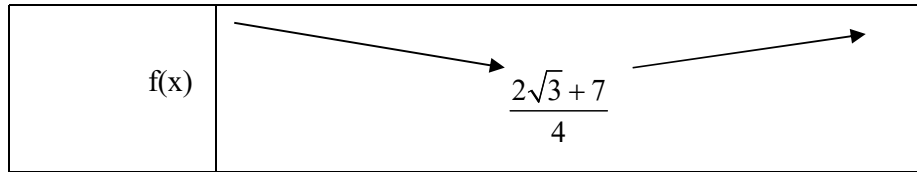
$f'(x) = \frac{x}{20\sqrt{400+x^2}} - \frac{1}{40}, 0 \leq x \leq 70$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{400+x^2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

BBT

x	0	$\frac{20\sqrt{3}}{3}$	70
f'(x)	-	0	+





Vậy GTNN của $f(x)$ là $\frac{2\sqrt{3}+7}{4}$

Cách 3:

$$t = \frac{1}{20} \left(\sqrt{x^2 + 10^2} + \sqrt{y^2 + 10^2} - \frac{x+y}{2} + 35 \right) \geq \frac{1}{20} \left(\sqrt{(x+y)^2 + 400} - \frac{x+y}{2} + 35 \right).$$

$$\text{Xét } A = \sqrt{a^2 + 400} - \frac{a}{2}; f\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}+7}{4} \quad 0 \leq a \leq 70 \Rightarrow A^2 = \frac{5a^2}{4} + 400 - a\sqrt{a^2 + 400}.$$

$$\text{Ta có: } a\sqrt{a^2 + 400} = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{a^2 + 400} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4a^2 + a^2 + 400}{2} \right) = \frac{5a^2 + 400}{4}$$

$$\Rightarrow -a\sqrt{a^2 + 400} \geq -\frac{5a^2}{4} - 100 \Rightarrow A^2 \geq 300 \Rightarrow A \geq 10\sqrt{3} \Rightarrow t \geq \frac{1}{20} (10\sqrt{3} + 35) = \frac{7+2\sqrt{3}}{4}.$$

Câu V. (1,5 điểm)

Cho các số dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{6}{\sqrt{a+b+c}}$.

Lời giải

Vì a, b là các số dương nên

$$a + 4b \geq 2\sqrt{a \cdot 4b} \Leftrightarrow a + 4b \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+4b}{4} \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 4b$.

Vì a, b, c là các số dương nên

$$a + 4b + 16c \geq 3\sqrt[3]{a \cdot 4b \cdot 16c} \Leftrightarrow a + 4b + 16c \geq 12\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+4b+16c}{12} \quad (2).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 4b = 16c$.

Từ (1) và (2) suy ra:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{a+4b}{4} + \frac{a+4b+16c}{12} \Leftrightarrow a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{4(a+b+c)}.$$

Do đó: $P \geq \frac{3}{4(a+b+c)} - \frac{6}{\sqrt{a+b+c}}.$

Đặt: $t = \sqrt{a+b+c} \ (t > 0).$

Xét: $f(t) = \frac{3}{4t^2} - \frac{6}{t} \ (t > 0) \Rightarrow f'(t) = -\frac{3}{2t^3} + \frac{6}{t^2} = \frac{12t-3}{2t^3}.$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(t)$	—	0	+
$f(t)$	$+\infty$	-12	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $P \geq f(\sqrt{a+b+c}) \geq f(\frac{1}{4}) = -12, \forall a, b, c > 0.$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a = 4b = 16c \\ \sqrt{a+b+c} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{21} \\ b = \frac{1}{84} \\ c = \frac{1}{336} \end{cases}.$

Vậy $\min P = -12.$

HẾT.