

Bài 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức
$$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình :
$$\left(\frac{x+3}{x-2} \right)^2 + 6 \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^2 = \frac{7(x^2-9)}{x^2-4}$$

b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 - (a + b + c)$ chia hết cho 30.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y = 15$

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC phân giác AD . Trên nửa mặt phẳng không chứa A bờ BC , vẽ tia Cx sao cho $\angle BCx = \frac{1}{2} \angle BAC$. Cx cắt AD tại E ; I là trung điểm DE . Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABD \sim \triangle CED$

b) $AE^2 > AB \cdot AC$

c) $4AB \cdot AC = 4AI^2 - DE^2$

d) Trung trực của BC đi qua E

Bài 5. (2,0 điểm) Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = abc$.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq 1$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (tm)$

c)

$$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2 \stackrel{Cosi}{\geq} 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 2.

a) $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 = \frac{7(x^2-9)}{x^2-4}$

ĐK: $x \neq \pm 2$

Đặt $\frac{x+3}{x-2} = u, \frac{x-3}{x+2} = v$, phương trình đã cho trở thành:

$$u^2 + 6v^2 = 7uv$$

$$\Leftrightarrow u^2 - uv + 6v^2 - 6uv = 0$$

$$\Leftrightarrow u(u - v) - 6v(u - v) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u - 6v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 6v \end{cases}$$

Xét $u = v$ ta có: $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 \Leftrightarrow x = 0 (tm)$

Xét $u = 6v$ ta có: $\frac{x+3}{x-2} = 6 \cdot \frac{x-3}{x+2}$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = 6x^2 - 18x - 12x + 36$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 35x + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 1; 6\}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad A &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y + z)^3 - 3(x + y)z(x + y + z) - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 3(x + y)z - 3xy \right] \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \end{aligned}$$

Bài 3.

a) Học sinh biến đổi được

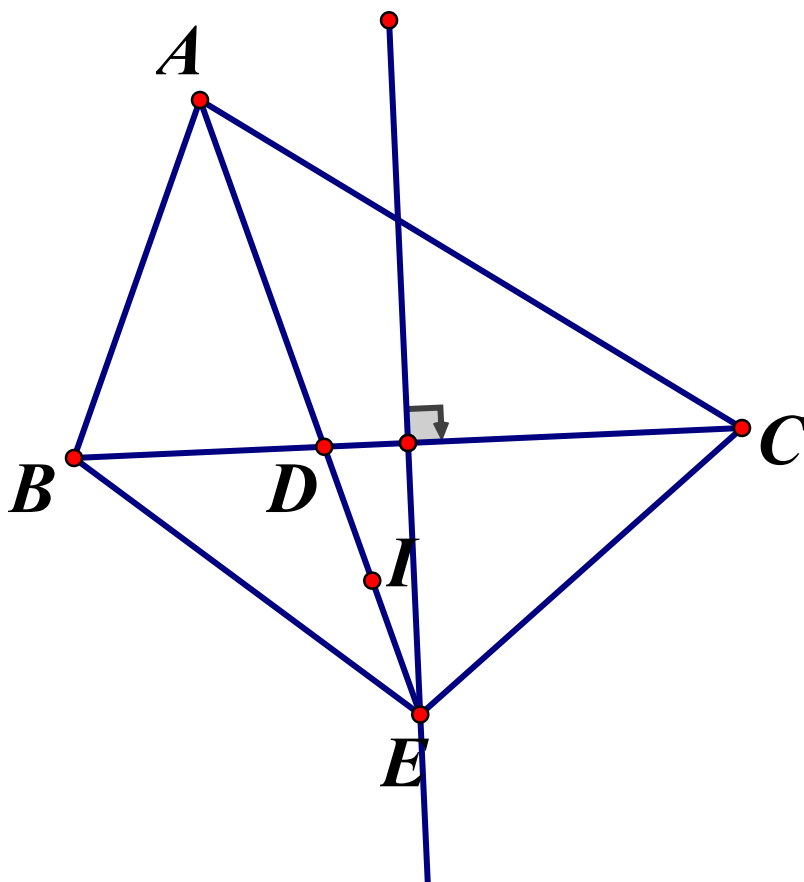
$$a^5 - a = (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5a(a - 1)(a + 1)$$

Lập luận được $a^5 - a \vdots 30$; $b^5 - b \vdots 30$; $c^5 - c \vdots 30$, kết luận

3b) Biến đổi về dạng: $(x + y + 2)(x + 2y + 1) = 17 = 1 \cdot 17 = 17 \cdot 1 = -1 \cdot -17 = -17 \cdot -1$

Xét 4 trường hợp $\Rightarrow (x, y) = \{(30; -15); (-18; 17); (12; -15); (-36; 17)\}$

Bài 4.



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CED$ có: $\angle BAD = \angle BCE \left(= \frac{1}{2} \angle BAC \right); \angle ADB = \angle EDC$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CED (g.g)$

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEC$ có:

$$\widehat{BAD} = \widehat{EAD} \left(= \frac{1}{2} \widehat{BAC} \right); \widehat{ABD} = \widehat{AEC} (\triangle ABD = \triangle CED)$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE < AE^2 (AD < AE)$$

Vậy $AE^2 > AB.AC$

c) Ta có:

$$4AI^2 - DE^2 = 4AI^2 - 4DI^2 = 4(AI - DI)(AI + DI) = 4AD.(AI + IE) = 4AD.AE$$

Mà $AD.AE = AB.AC$ (câu b) $\Rightarrow 4AB.AC = 4AI^2 - DE^2$

d)

$$+) \Delta ABE \sim \Delta ADC$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{DAC}; \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} (AD.AE = AB.AC)$$

Vì

$$\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta ADC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ACB}$$

$$\text{Xét } \Delta BDE \text{ và } \Delta ADC \text{ có: } \widehat{BDE} = \widehat{ADC} \text{ (đối đỉnh); } \widehat{BED} = \widehat{ACD}$$

$$\Rightarrow \Delta BDE \sim \Delta ADC (g.g) \Rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{DAC} = \widehat{BCE}$$

$$\Rightarrow \Delta BEC \text{ cân tại E} \Rightarrow \text{Trung trực } BC \text{ qua E}$$

Bài 5.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}; \frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$$

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8 \frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+b} = \frac{1}{1+c} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c = \frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra