

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 16

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S

A. 4. B. 1. C. 3. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x - m)^2}$$

Ta có

Để thỏa mãn ta có $\begin{cases} -m^2 + 2m + 3 > 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 2$

$$V_{\hat{y}} S = \{0; 1; 2\}$$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;3;5)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C sao cho OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{16}{\sqrt{91}}$ B. $\frac{24}{\sqrt{91}}$ C. $\frac{32}{\sqrt{91}}$ D. $\frac{18}{\sqrt{91}}$

Lời giải

Chọn C

Vì (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt ở A, B, C nên ta gọi tọa độ các điểm là $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Khi đó phương trình mặt phẳng

$$\forall i \quad M(2;3;5) \in (P) \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} = 1$$

Vi

Vì độ dài các đoạn OA, OB, OC lập thành cấp số nhân với công bội bằng 3

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 3b = 9a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{3}{3a} + \frac{5}{9a} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{32}{9} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{32}{3} \\ c = 32 \end{cases}$$

$$(P): \frac{\frac{x}{32}}{9} + \frac{\frac{y}{32}}{3} + \frac{z}{32} = 1$$

Khi đó ta có phương trình mặt phẳng

Hay $(P): 9x + 3y + z - 32 = 0$

Do đó: $d(O; (P)) = \frac{|-32|}{\sqrt{9^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{32}{\sqrt{91}}$

Bình luận:

Bài này có thể dùng cách khác như sau:

Khoảng cách từ O đến $(ABC): \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{(9a)^2} \Rightarrow h = \frac{9a}{\sqrt{91}}$

Mà $a = \frac{32}{9}$. từ đó tìm được $h = \frac{32}{\sqrt{91}}$.

Câu 3: Một khối nón có thể tích bằng $9a^3\pi\sqrt{2}$. Tính bán kính R đáy khối nón khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

A. $R = 3a$. **B.** $R = \frac{3a}{\sqrt{2}}$. **C.** $R = \sqrt[3]{9a}$. **D.** $R = \frac{3a}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi h, l lần lượt là chiều cao và độ dài đường sinh của khối nón.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 9a^3\pi\sqrt{2} \Rightarrow h = \frac{27a^3\sqrt{2}}{R^2} \Rightarrow l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + 2 \cdot \frac{729a^6}{R^4}}$$

$$S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l = \pi \sqrt{R^4 + \frac{729a^6}{R^2} + \frac{729a^6}{R^2}} \geq \pi \sqrt[3]{R^4 \cdot \frac{729a^6}{R^2} \cdot \frac{729a^6}{R^2}}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = 9\pi a^2 \text{ . Nên } \min S_{xq} = 9\pi a^2 \text{ khi } R^4 = \frac{729a^6}{R^2} \Leftrightarrow R = 3a$$

Câu 4: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $f(x) = 3x^4 + 4(1 - 2m^2)x^3 + 6(m - 2m^2)x^2 + 12mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

A. 2 . **B.** 20 . **C.** 19 . **D.** 21 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow 12x^3 + 12(1 - 2m^2)x^2 + 12(m - 2m^2)x + 12m \leq 0, \forall x \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) - 2m^2x(x+1) + m(x+1) \leq 0, \forall x \in (0; 1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2m^2x + m) \leq 0, \forall x \in (0; 1)$$

Vì $x \in (0; 1) \Rightarrow x+1 > 0$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 - 2m^2x + m \leq 0, \forall x \in (0; 1)$. (*)

Xét $\Delta_{g(x)}' = m^4 - m$

TH1: $\Delta_{g(x)}' < 0$, do $a = 1 > 0 \Rightarrow g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (không thỏa mãn).

TH2: $\Delta_{g(x)}' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \end{cases}$ (không thỏa mãn).

TH3: $\Delta_{g(x)}' > 0 \Leftrightarrow m^4 - m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Khi đó $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$).

Ta có bảng xét dấu của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	x_1	0	1	x_2	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	0	+	

Theo yêu cầu bài toán ta có $\begin{cases} g(0) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 - 2m^2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-20; 20] \end{cases}$ nên ta nhận $m \in \{-20; -19; \dots; -1\}$. Vậy có tất cả 20 giá trị thỏa mãn.

Câu 5: Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2 - 2(a - 45)z + 2016 - 80a = 0$ (a là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 sao cho $|z_1| = |z_2|$

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta' = (a - 45)^2 - (2016 - 80a) = a^2 - 10a + 9$

Th1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a > 9 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt, khi đó: $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 (l) \\ z_1 = -z_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow 2(a - 45) = 0 \Leftrightarrow a = 45$$

Th2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 < 0 \Leftrightarrow a \in (1; 9)$

Khi đó phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2 là 2 số phức liên hợp của nhau, ta luôn có $|z_1| = |z_2|$.

Với $a \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 45\}$. Vậy có 8 giá trị nguyên dương cần tìm.

Câu 6: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tính thể tích của khối chóp $A.BCNM$

A. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{16}$

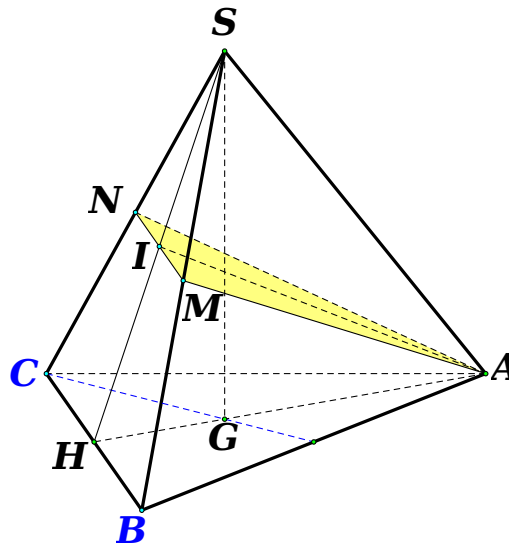
B. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{48}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{32}$

D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{32}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow BC \perp SH$ (do $\triangle SBC$ cân tại S).

Gọi G là trọng tâm ΔABC và $I = SH \cap MN$.

Do $S.ABC$ là chóp đều $\Rightarrow SG \perp (ABC)$

Ta có: MN là đường trung bình của $\triangle SBC \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow MN \perp SH$ tại I .

Vậy:
$$\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \Rightarrow SH \perp (AMN) \Rightarrow SH \perp AI \\ SH \perp MN, SH \subset (SBC) \end{cases}$$

Vậy:

Lại có I là trung điểm SH (do $I \in MN$) $\Rightarrow AI$ là đường trung tuyến ΔSAH .

Suy ra ΔSAH cân tại $A \Rightarrow SA = AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.

Suy ra ΔSAH cân tại

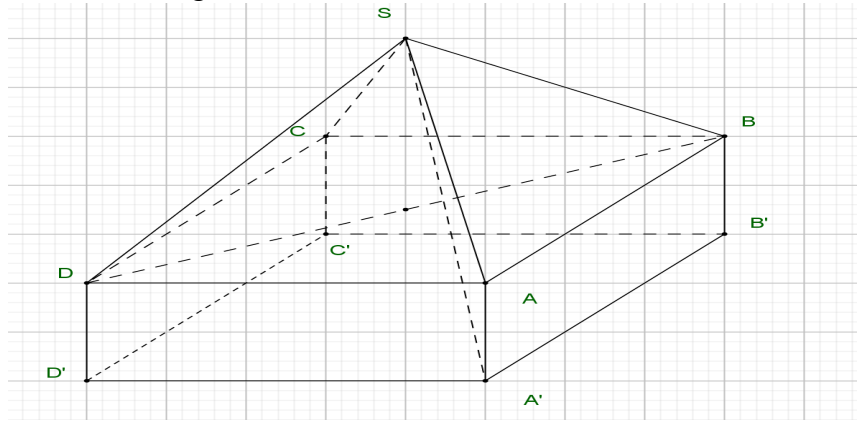
$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Xét ΔSGA vuông tại G :

Mặt khác: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{MNBC} = \frac{3}{4} V_{S.ABC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot SG \cdot \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{32} a^3$

Mặt khác:

Câu 7: Cho khối đa diện (minh họa như hình vẽ bên) trong đó $ABCD.A'B'C'D'$ là khối hộp chữ nhật với $AB = AD = 2a$, $AA' = a$, $S.ABCD$ là khối chóp có các cạnh bên bằng nhau và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối tứ diện $SA'BD$ bằng



A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

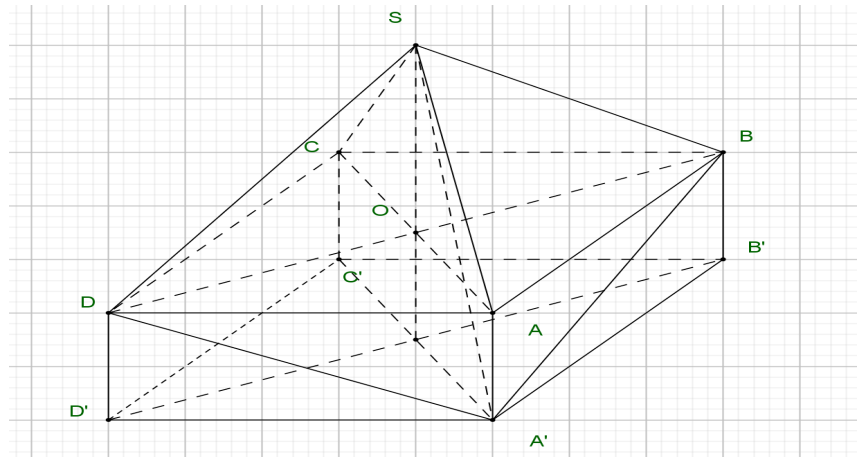
B. $2a^3$

C. $\frac{2a^3}{3}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Chọn C



Giả sử $O = AC \cap BD$.

Do $\begin{cases} SA = SB = SC = SD \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Ta có $V_{S.A'BD} = V_{A'.SBD}$

Do $\begin{cases} AA' \parallel BB' \\ BB' \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow d(A', (SBD)) = d(A, (SBD)) \Rightarrow V_{A'.SBD} = V_{A.SBD}$

Ta có $\begin{cases} AO \perp SO \\ AO \perp BD \end{cases} \Rightarrow AO \perp (SBD)$

Tam giác SOB vuông tại $O \Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.

$$V_{S.ABD} = V_{A.SBD} = \frac{1}{3} AOk, (1)$$

Với k là diện tích tam giác $SBD \Rightarrow k = \frac{1}{2} SO.BD = \frac{1}{2} a.2a\sqrt{2} = \sqrt{2}a^2, (2) \quad AO = a\sqrt{2} (3)$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $V_{S.A'BD} = V_{A'.SBD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}a^2 = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 8: Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $5b + c = -12$. **B.** $5b + c = 4$.
C. $5b + c = -4$. **D.** $5b + c = 12$.

Lời giải

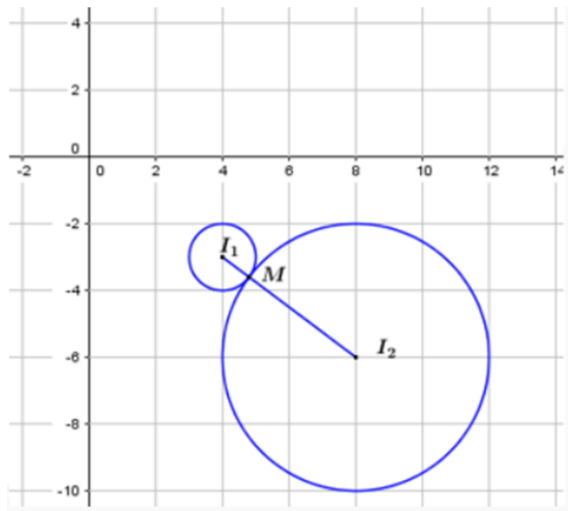
Chọn A

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nên $z_1 = \overline{z_2}$

Khi đó ta có $|z_2 - 8 - 6i| = 4 \Leftrightarrow |\overline{z_1} - 8 - 6i| = 4 \Leftrightarrow |z_1 - 8 + 6i| = 4$.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 .

$\Rightarrow M$ vừa thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(4; -3)$, bán kính $R_1 = 1$ và đường tròn (C_2) tâm $I_2(8; -6)$, bán kính $R_2 = 4 \Rightarrow M \in (C_1) \cap (C_2)$.



Ta có $I_1I_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc ngoài.

Do đó có duy nhất 1 điểm M thỏa mãn, tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 6y + 24 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x + 12y + 84 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ y = -\frac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{24}{5}; -\frac{18}{5}\right) \Rightarrow z_1 = \frac{24}{5} - \frac{18}{5}i$$

là nghiệm

của phương trình $z^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z_2 = \frac{24}{5} + \frac{18}{5}i$ cũng là nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$.

$$z_1 + z_2 = -b = \frac{48}{5} \Rightarrow b = -\frac{48}{5}; z_1 \cdot z_2 = c = 36$$

Áp dụng định lí Vi ét ta có

$$5b + c = -48 + 36 = -12.$$

Vậy

- Câu 9:** Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn
- $$(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) ?$$
- A. 2017 . B. 4034 . C. 2 . D. 2017×2020 .

Lời giải

+ Điều kiện $\begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \in 2020 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \in 2020 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}$

BPT cho có dạng $(x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{y-2}{y+2} + 1 \right) \leq 0$

+ Xét $y=1$ thì thành $-(x-3) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + 3(x+4) \log_3 \frac{2}{3} \leq 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x > 3$ vì

$$-(x-3) < 0, \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) > \log_2 (0+1) = 0, 3(x+4) > 0, \log_3 \frac{2}{3} < 0$$

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x; y) = (x; 1)$ với $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

+ Xét $y=2$ thì thành $4(x+4) \log_3 1 \leq 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x; y)$ nữa.

+ Với $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 10:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[0; 5]$ để hàm số $y = |x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$?
- A. 5 . B. 3 . C. 4 . D. 6 .

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x$

Trường hợp 1: Nếu $m = 0$, khi đó $f(x) = x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	0	3	4	6	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	-27	-32	0	$+\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - 6x^2|$

x	$-\infty$	0	3	4	6	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	32	0	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - 6x^2|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$. Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: Nếu $m > 0$, khi đó ta có $f'(x) = 3x^2 - 6(m+2)x + 3m(m+4)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+2)x + m(m+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+4 \end{cases}$$

+ Với $0 < m < 3$, bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	$-\infty$	0	m	3	$m+4$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(m)$	$f(m+4)$	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$, ta thấy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(m; 3)$ và $f(m) > 0$ suy ra hàm số $y = |f(x)|$ không thể đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

+ Với $m \geq 3$, bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	0	3	m	$m+4$	$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+
$f(x)$	$-\infty$	0		$f(m)$		$+\infty$
					$f(m+4)$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;3)$ và $f(x) > 0, \forall x \in (0;3)$, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Vì $m \in [0;5] \Rightarrow m \in \{3,4,5\}$.

Vậy $m \in \{0,3,4,5\}$ nên có 4 giá trị của m .

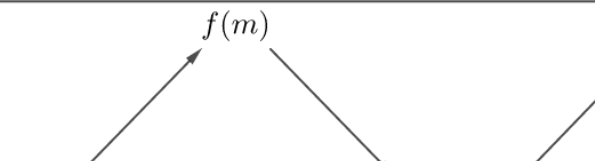
Cách 2:

Đặt $f(x) = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6(m+2)x + 3m(m+4)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+2)x + m(m+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	m		$m+4$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ thì xảy ra 2 trường hợp

+ Trường hợp 1: Hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;3)$ và $f(0) \geq 0$.

$$\text{Vì } f(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m+4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -4 \end{cases}. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \in [0;5] \Rightarrow m \in \{3,4,5\}$$

+ Trường hợp 2: Hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0;3)$ và $f(0) \leq 0$.

$$\text{Vì } f(0) = 0 \Rightarrow (0;3) \subset (m;m+4) \Rightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m+4 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \in [0;5] \Rightarrow m = 0.$$

Vậy $m \in \{0,3,4,5\}$ nên có 4 giá trị của m .