

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 7

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. (5.0 điểm).

a) Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$.

Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho $2^x + x^2$ là số nguyên tố.

Câu 2. (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 11x + 19} + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 3(x + 2)$.

b) Tìm tất cả các bộ ba số $(x; y; z)$ thỏa mãn
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \end{cases}$$

Câu 3. (3.0 điểm).

a) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $0 < x, y, z < \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $xy + yz + zx = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4x}{3 - 4x^2} + \frac{4y}{3 - 4y^2} + \frac{4z}{3 - 4z^2}.$$

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{2016}}{b + c - a} + \frac{b^{2016}}{c + a - b} + \frac{c^{2016}}{a + b - c} \geq a^{2015} + b^{2015} + c^{2015}.$$

Câu 4. (6.0 điểm).

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Lấy điểm Q bất kì trên cạnh BC (Q khác B và C). Trên tia đối của tia BA lấy điểm P sao cho $CQ \cdot AP = a^2$. Gọi M là giao điểm của AQ và CP .

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA .

1. Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.

2. Chứng minh $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC .

Câu 5. (1.0 điểm).

Cho bảng ô vuông kích thước 10×10 gồm 100 ô vuông có kích thước 1×1 . Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho

hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

Từ giả thiết $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$ ta có

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) + (c^3 + d^3) + 3cd(c+d) = 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 + (c+d)^3 = 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$$

Dễ thấy $3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$ chia hết cho 3 nên ta được

$(a+b)^3 + (c+d)^3$ chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có

$$(a+b)^3 + (c+d)^3 = (a+b+c+d)^3 - 3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$$

Mà $3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$ chia hết cho 3 nên suy ra $(a+b+c+d)^3$ chia hết cho 3.

Do vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

b)

Ta xét các trường hợp sau

+ Khi $x=2$ ta được $2^x + x^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ không phải là số nguyên tố.

+ Khi $x=3$ ta được $2^x + x^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

+ Khi $x > 3$ thì x là số nguyên tố lẻ. Khi đó x^2 chia 3 có số dư là 1.

Ngoài ra do x là số nguyên tố lẻ nên ta đặt $x = 2k+1 (k \in \mathbb{N}^*)$.

Từ đó ta có $2^x = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k = 2(3+1)^k$ chia 3 có số dư là 2.

Như vậy $2^x + x^2$ luôn chia hết cho 3. Do đó $2^x + x^2$ luôn là hợp số khi $x > 3$.

Vậy $x=3$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 11x + 19} + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 3(x+2)$

Điều kiện xác định của phương trình là $2x^2 + 11x + 19 \geq 0; 2x^2 + 5x + 7 \geq 0$.

+ Xét $x = -2$, ta thấy thỏa mãn phương trình, do đó $x = -2$ là một nghiệm của phương trình.

+ Xét $x \neq -2$, khi đó ta có $\sqrt{2x^2 + 11x + 19} - \sqrt{2x^2 + 5x + 7} \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{6(x+2)}{\sqrt{2x^2 + 11x + 19} - \sqrt{2x^2 + 5x + 7}} = 3(x+2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 11x + 19} - \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 2$$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 11x + 19} + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 3(x + 2) \\ \sqrt{2x^2 + 11x + 19} - \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 2 \end{cases} \quad \text{Từ đó ta được}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 11x + 19} = 3x + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 8 \geq 0 \\ 4(2x^2 + 11x + 19) = (3x + 8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm là $S = \{-2; 2\}$.

b) Tìm tất cả các bộ ba số $(x; y; z)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \end{cases}$$

Từ $x + y + z = 3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x + y + z} &= 0 \Leftrightarrow \frac{x + y}{xy} + \frac{x + y}{z(x + y + z)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y)(xy + zx + yz + z^2) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 0. \end{aligned}$$

+ Xét trường hợp $x + y = 0$, khi đó từ $x + y + z = 3$ ta được $z = 3$.

Cũng từ $x + y = 0$ ta được $x = -y$. Thế vào $x^2 + y^2 + z^2 = 17$ ta được $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Từ đó ta được hai bộ số $(x; y; z)$ thỏa mãn là $(2; -2; 3), (-2; 2; 3)$.

+ Giải các trường hợp $y + z = 0$ và $z + x = 0$ ta được các bộ số là hoán vị của hai bộ số trên.

Vậy các bộ số $(x; y; z)$ cần tìm là

$(2; -2; 3), (-2; 2; 3), (2; 3; -2), (-2; 3; 2), (3; 2; -2), (3; -2; 2)$.

Câu 3. (3.0 điểm).

a) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $0 < x, y, z < \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $xy + yz + zx = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4x}{3 - 4x^2} + \frac{4y}{3 - 4y^2} + \frac{4z}{3 - 4z^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có

$$8x^2(3 - 4x^2)^2 = 8x^2 \cdot (3 - 4x^2)(3 - 4x^2) \leq \left(\frac{8x^2 + 3 - 4x^2 + 3 - 4x^2}{3} \right)^3 = 8.$$

Từ đó ta được $\frac{x^2}{(3 - 4x^2)^2} = \frac{8x^4}{8x^2(3 - 4x^2)^2} \geq \frac{8x^4}{8} = x^4$ nên $\frac{4x}{3 - 4x^2} \geq 4x^2$.

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{4y}{3-4y^2} \geq 4y^2; \frac{4z}{3-4z^2} \geq 4z^2$
 Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được
 $P \geq 4(x^2 + y^2 + z^2) \geq 4(xy + yz + zx) = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.
 b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{2016}}{b+c-a} + \frac{b^{2016}}{c+a-b} + \frac{c^{2016}}{a+b-c} \geq a^{2015} + b^{2015} + c^{2015}$$

Xét hiệu $\frac{a^{2016}}{b+c-a} - a^{2015} + \frac{b^{2016}}{c+a-b} - b^{2015} + \frac{c^{2016}}{a+b-c} - c^{2015}$ hay ta được

$$\begin{aligned} & a^{2015} \left(\frac{a}{b+c-a} - 1 \right) + b^{2015} \left(\frac{b}{c+a-b} - 1 \right) + c^{2015} \left(\frac{c}{a+b-c} - 1 \right) \\ &= a^{2015} \left(\frac{a-b+a-c}{b+c-a} \right) + b^{2015} \left(\frac{b-a+b-c}{c+a-b} \right) + c^{2015} \left(\frac{c-a+c-b}{a+b-c} \right) \\ &= \frac{a^{2015}(a-b)}{b+c-a} - \frac{b^{2015}(a-b)}{c+a-b} + \frac{b^{2015}(b-c)}{c+a-b} - \frac{c^{2015}(b-c)}{a+b-c} + \frac{a^{2015}(a-c)}{b+c-a} - \frac{b^{2015}(a-c)}{a+b-c} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

Khi đó ta thấy $a^{2015} \geq b^{2015} \geq c^{2015}$ và $0 < b+c-a \leq a+c-b \leq a+b-c$.

Do đó ta có $(a-b) \left(\frac{a^{2015}}{b+c-a} - \frac{b^{2015}}{c+a-b} \right) \geq 0$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$(b-c) \left(\frac{b^{2015}}{c+a-b} - \frac{c^{2015}}{a+b-c} \right) \geq 0; (a-c) \left(\frac{a^{2015}}{b+c-a} - \frac{b^{2015}}{a+b-c} \right) \geq 0$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

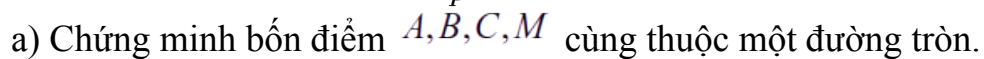
$$\frac{a^{2015}(a-b)}{b+c-a} - \frac{b^{2015}(a-b)}{c+a-b} + \frac{b^{2015}(b-c)}{c+a-b} - \frac{c^{2015}(b-c)}{a+b-c} + \frac{a^{2015}(a-c)}{b+c-a} - \frac{b^{2015}(a-c)}{a+b-c} \geq 0$$

$$\frac{a^{2016}}{b+c-a} - a^{2015} + \frac{b^{2016}}{c+a-b} - b^{2015} + \frac{c^{2016}}{a+b-c} - c^{2015} \geq 0$$

$$\text{Do đó } \frac{a^{2016}}{b+c-a} + \frac{b^{2016}}{c+a-b} + \frac{c^{2016}}{a+b-c} \geq a^{2015} + b^{2015} + c^{2015}$$

Từ đó suy ra $\frac{a^{2016}}{b+c-a} + \frac{b^{2016}}{c+a-b} + \frac{c^{2016}}{a+b-c} \geq a^{2015} + b^{2015} + c^{2015}$.
 Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 4. (6.0 điểm).



Từ $CQ \cdot AP = a^2$ ta được $CQ \cdot AP = AC^2$ hay $\frac{CP}{AC} = \frac{AC}{AQ}$.

Xét hai tam giác ACP và CQA có $\frac{CP}{AC} = \frac{AC}{AQ}$ và $\widehat{PAC} = \widehat{QCA} = 60^\circ$ nên $\triangle ACP \sim \triangle CQA$

Từ đó ta được $\angle ACP = \angle QCB$. Mà ta có $\angle ACP = \angle ACB + \angle BCP = 60^\circ + \angle BCP$

Lại có $\angle AQC = \angle ABC + \angle BAM = 60^\circ + \angle BAM$

Do đó ta được $\widehat{MAB} = \widehat{BCM}$, suy ra tứ giác $ABMC$ nội tiếp đường tròn.

b) Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA .

- + Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.

Do tứ giác $ABMC$ và $AIMI$ nội tiếp nên $\angle BMC = \angle MKI = 120^\circ$, suy ra $\angle MBK = \angle MCK$

Do đó ta được $\square_{BJI} = \square_{KJC}$ nên ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Dễ thấy hai tam giác BMC và IMK đồng dạng với nhau. Do đó ta được

$$\frac{IK}{BC} = \frac{MI}{MB}$$

Mà ta có $IM \leq MB$ nên ta được $IK \leq BC$ hay $IK \leq a$, dấu bằng xảy ra khi $MB \perp AB$ hay M nằm chính giữa cung nhỏ BC , khi đó Q là trung điểm cạnh BC

Vậy IK lớn nhất khi Q là trung điểm của BC .

+ Chứng minh $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC .

Do tứ giác $BIMJ$ nội tiếp nên ta có $\widehat{IMJ} = \widehat{ABC} = 60^\circ = \widehat{ACB}$. Lại có $\widehat{MIJ} = \widehat{MBJ} = \widehat{MAC}$

$$\underline{MJ} = \underline{CQ}$$

Do đó hai tam giác IMJ và ACQ đồng dạng, do đó ta được $\overline{MI} = \overline{CA}$. Tương tự

ta được $\frac{MJ}{MK} = \frac{BQ}{AB}$.

Từ đó suy ra $\frac{MJ}{MI} + \frac{MJ}{MK} = \frac{CQ}{CA} + \frac{BQ}{AB} = 1$ nên ta được $MJ(MI + MK) = MI \cdot MK$.
 Hay $MI \cdot MK - MJ \cdot MI - MJ \cdot MK = 0$.

Mặt khác ta lại có $S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MI; S_{BCM} = \frac{1}{2} BC \cdot MJ; S_{ACM} = \frac{1}{2} MK \cdot AC$

Mà $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{BCM} + S_{ABC}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. Nên ta có

$$AB \cdot MI + MK \cdot AC = BC \cdot MJ + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \text{ . hay}$$

$$MI + MK = MJ + \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MI + MK - MJ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ . Do đó } (MI + MK - MJ)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Suy ra $MI^2 + MJ^2 + MK^2 + 2(MI \cdot MK - MI \cdot MJ - MJ \cdot MK) = \frac{3a^2}{4}$.

Mà $MI \cdot MK - MJ \cdot MI - MJ \cdot MK = 0$ nên $MI^2 + MJ^2 + MK^2 = \frac{3a^2}{4}$ không đổi.

Câu 5.

Xét hình vuông cạnh 2×2 , do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho

3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng 10×10 được chia thành 25 hình vuông

có cạnh 2×2 nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia

hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít

nhất $\left\lceil \frac{50}{3} \right\rceil + 1 = 17$ lần.