

CHỦ ĐỀ: DÃY CÁC SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT

A. Mục tiêu:

1. Kiến thức: HS hiểu được dãy số viết theo quy luật
2. Kỹ năng: Nhận biết được các dãy số viết theo quy luật, các dạng bài tập
3. Tư duy:
 - Mô hình hóa toán học: HS biết chuyển đổi các tình huống thực tiễn, các tình huống toán học về dạng toán liên quan đến dãy các số viết theo quy luật.
 - Tư duy và lập luận toán học: Phân tích, tổng hợp, so sánh được các tình huống.

B. Nội dung chuyên đề:

Hệ thống lý thuyết:

- Dãy cộng là dãy số có mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ hai) đều lớn hơn số hạng liền trước nó cùng một số đơn vị.
- Dãy cộng là dãy số cách đều
- Một số phương pháp giải:

Phương pháp 1:

+ Tính số các số hạng trong tổng theo công thức :

$$Số\ số\ hạng = (Số\ hạng\ cuối - Số\ hạng\ đầu) : Khoảng\ cách + 1$$

+ Nhóm hai số hạng thành một cặp sao cho giá trị trong mỗi cặp bằng nhau. (Lưu ý có thể nhóm vừa hết các số hạng thành các cặp nếu số số hạng là số chẵn hoặc còn thừa một số hạng nếu số số hạng là số lẻ). Cách tính số hạng thứ n trong dãy là:

$$Số\ hạng\ thứ\ n = (Số\ số\ hạng - 1) \cdot Khoảng\ cách + Số\ hạng\ đầu$$

+ Tính tổng dựa vào giá trị của một cặp và số cặp vừa nhóm. Lưu ý khi tìm số cặp mà còn dư một số hạng thì khi tìm tổng ta phải cộng số hạng dư đó vào.

Phương pháp 2:

+ Dựa vào công thức:

$$Số\ số\ hạng = (Số\ hạng\ cuối - Số\ hạng\ đầu) : Khoảng\ cách + 1$$

$$Tổng = (Số\ hạng\ đầu + Số\ hạng\ cuối) \cdot Số\ số\ hạng : 2$$

Phương pháp 3:

+ Dựa vào bài toán Gau-xơ : Viết tổng A theo thứ tự ngược lại và tính A + A. Từ đó tính được tổng A.

Phương pháp 4:

+ Phương pháp khử liên tiếp: Tách một số hạng thành một hiệu trong đó số trừ của hiệu trước bằng số bị trừ của hiệu sau: $a_1 = b_1 - b_2$, $a_2 = b_2 - b_3$, ..., $a_n = b_n - b_{n+1}$.

Khi đó ta có ngay $A_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$

Phương pháp 5: Phương pháp dự đoán và quy nạp.

C. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Tính tổng các số hạng cách đều

I. Phương pháp giải

Muốn tính tổng của một dãy số có quy luật cách đều chúng ta thường hướng dẫn học sinh tính theo các bước như sau:

$$\text{Số số hạng} = \frac{|\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|}{\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}} + 1$$

Bước 1: Tính số số hạng có trong dãy:

$$\text{Tổng của dãy} = \left(\frac{\text{Số hạng cuối} + \text{Số hạng đầu}}{2} \right) \cdot \text{Số số hạng}$$

Bước 2: Tính tổng của dãy:

(quy tắc dân gian: dĩ đầu, cộng vĩ, chiết bán, nhân chi)

Với dãy số tăng dần ta có:

$$\text{Số hạng cuối} = \text{Số hạng đầu} + n \cdot \text{chênh lệch}$$

$$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối} - n \cdot \text{chênh lệch}$$

Ở các bài tập dưới đây, dãy cộng với số tự nhiên đa phần ta gặp đó là dãy tăng dần.

Tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n là:

*) **Chú ý:**

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \quad \text{với } n \in \mathbb{N}; n > 3$$

II. Bài toán

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số? Tính tổng của chúng.

Lời giải:

Cách 1:

Các số tự nhiên có hai chữ số là 10; 11; 12; ...; 99

Số các số này là: $99 - 10 + 1 = 90$ (số)

Ta có: $A = 10 + 11 + 12 + \dots + 99$ (1)

$$A = 99 + 98 + \dots + 11 + 10 \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$$A + A = (10 + 99) + (11 + 98) + \dots + (98 + 11) + (99 + 10) = 109 + 109 + \dots + 109 + 109$$

$$\text{Nên } 2A = 109 \cdot 90 \Rightarrow A = 109 \cdot 90 : 2 = 4905$$

Cách 2:

$$\text{Số số hạng của dãy: } \frac{(99 - 10)}{1} + 1 = 90 \quad (\text{số hạng})$$

(khoảng cách 2 số hạng liên tiếp của dãy là 1, số hạng đầu của dãy là 10, số hạng cuối của dãy là 99)

$$\text{Tổng của dãy: } A = \frac{10 + 99}{2} \cdot 90 = 4905$$

Bài 2: Tính giá trị của A biết $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2014$.

Lời giải:

Dãy số trên có số số hạng là $(2014 - 1) : 1 + 1 = 2014$ (số hạng)

Giá trị của A là $(1 + 2014) \cdot 2014 : 2 = 2029105$

Đáp số: 2029105

Bài 3: Cho dãy số: 2, 4, 6, 8, 10, 12, Tìm số hạng thứ 2014 của dãy số trên?

$$\text{Số số hạng} = \frac{|\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|}{\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}} + 1$$

*) Phân tích: Từ công thức

$$\text{Ta có: } (\text{Số số hạng} - 1)(\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}) = |\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|$$

$$[(\text{Số số hạng} - 1) \times (\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp})] + \text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối}$$

$$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối} - [(\text{Số số hạng} - 1) \times (\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp})]$$

Lời giải:

Số hạng thứ 2014 của dãy số trên là $(2014 - 1) \cdot 2 + 2 = 4028$

Đáp số: 4028

Bài 4: Tính tổng 50 số lẻ liên tiếp biết số lẻ lớn nhất trong dãy đó là 2019?

*) Phân tích: Với dãy số tăng dần ta có:

$$\text{Số hạng cuối} = \text{Số hạng lớn nhất}$$

$$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng nhỏ nhất}$$

$$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối} - [(\text{Số số hạng} - 1) \times (\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp})]$$

Lời giải:

Số hạng bé nhất trong dãy số đó là: $2019 - (50 - 1) \cdot 2 = 1921$

Tổng của 50 số lẻ cần tìm là $(1921 + 2019) \cdot 50 : 2 = 98500$

Đáp số: 98500

Bài 5: Một dãy phố có 15 nhà. Số nhà của 15 nhà đó được đánh là các số lẻ liên tiếp, biết tổng của 15 số nhà của dãy phố đó bằng 915. Hãy cho biết số nhà đầu tiên của dãy phố đó là số nào?

*) Phân tích: Dựa vào công thức với dãy số có quy luật tăng dần:

$$\text{Số số hạng} = \frac{|\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|}{\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}} + 1$$

Bước 1:

$$\text{Suy ra: } (\text{Số số hạng} - 1)(\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}) = \text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}$$

$$\text{Tổng của dãy} = \left(\frac{\text{Số hạng cuối} + \text{Số hạng đầu}}{2} \right) \cdot \text{Số số hạng}$$

Bước 2:

$$\text{Suy ra: } (2 \cdot \text{Tổng của dãy}) : (\text{Số số hạng}) = \text{Số hạng cuối} + \text{Số hạng đầu}$$

Bài toán cho chúng ta biết số số hạng là 15, khoảng cách của 2 số hạng liên tiếp trong dãy là 2 và tổng của dãy số trên là 915. Từ bước 1 và 2 học sinh sẽ tính được hiệu và tổng của số nhà đầu và số nhà cuối. Từ đó ta hướng dẫn học sinh chuyển bài toán về dạng tìm số bé biết tổng và hiệu của hai số đó.

Lời giải:

Hiệu giữa số nhà cuối và số nhà đầu là $(15 - 1) \cdot 2 = 28$

Tổng của số nhà cuối và số nhà đầu là $915 \cdot 2 : 15 = 122$

Số nhà đầu tiên trong dãy phố đó là $(122 - 28) : 2 = 47$ (bài toán tổng hiệu quen thuộc)

Đáp số: 47

Bài 6: Người ta viết liên nhau các số tự nhiên 123456....

a) Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53 ; 328 ; 1587 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?

b) Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số nào?

Lời giải:

Viết liên nhau các số tự nhiên 123456....

a) 9 chữ số đầu tiên: 1, 2, ..., 9.

44 số có hai chữ số tiếp theo: 10, 11, ..., 53.

Chữ số hàng đơn vị của số 53 ở hàng số: $9 + 44 \cdot 2 = 97$

Tương tự, chữ số hàng đơn vị của số 328 ở hàng số $9 + 90 \cdot 2 + 229 \cdot 3 = 876$;

chữ số hàng đơn vị của số 1587 ở hàng số $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 588 \cdot 4 = 5241$.

b) Ta có: $^{427} = 9 + 90 \cdot 2 + 79 \cdot 3 + 1$

Khi đó số thứ 81 có 3 chữ số là: 179.

Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số 1.

Dạng 2: Tổng có dạng $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ (1)

hoặc $S = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n}$ (2) với $a \in \mathbb{N}^*$; $a > 1$

I. Phương pháp giải

Bước 1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số a ta được:

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n \quad (1) \quad \text{hoặc} \quad S = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} \quad (2) \quad \text{với } a \in \mathbb{N}^*; a > 1$$

$$a.S = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1} \quad (3)$$

$$\text{Hoặc} \quad a.S = a + 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^{n-1}} \quad (4)$$

$$\text{Bước 2: Lấy (3) - (2) vế với vế ta được:} \quad a.S - S = a^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$\text{Lấy (4) - (2) vế với vế ta được:} \quad a.S - S = a - \frac{1}{a^n} \Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a^n(a - 1)}$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$.

*) *Phân tích:* Kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 2. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ 2 đến 2^{100} giống như trong tổng S , khi đó nếu lấy số tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ 2 đến 2^{100} bị triệt tiêu và tính được tổng S .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$$

$$\text{Nhân 2 vào tổng } S \text{ ta được } 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{101}$$

$$\Rightarrow 2S - S = S = 2^{101} - 1$$

Bài 2: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$.

**) Phân tích:* Kể từ số hạng thứ nhất, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{2}$. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$, giống như trong tổng S , khi đó nếu lấy tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$
 $\Rightarrow 2S - S = S = 2 - \frac{1}{2^{100}}$

Bài 2: Tính tổng $S = 1 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \dots + \frac{5}{7^{55}}$.

**) Phân tích:* Nhận thấy các số hạng từ $\frac{5}{7}$ đến $\frac{5}{7^{55}}$ đều có cùng tử số là 5, và kể từ số hạng $\frac{5}{7}$ thì các số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{7}$. Nếu nhân 7 vào tổng S thì ta được tổng $7S$ có các số hạng từ $\frac{5}{7}$ đến $\frac{5}{7^{54}}$ giống như trong tổng S . Do đó nếu lấy tổng $7S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{5}{7}$ đến $\frac{5}{7^{54}}$ bị triệt tiêu, từ đó tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có $S = 1 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \dots + \frac{5}{7^{55}} \Rightarrow 7S = 7 + 5 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \dots + \frac{5}{7^{54}}$
 $\Rightarrow 7S - S = 6S = 11 - \frac{5}{7^{55}} \Rightarrow S = \frac{11}{6} - \frac{5}{6 \cdot 7^{55}}$

Bài 3: Tính tổng $S = \frac{1}{18} + \frac{1}{18 \cdot 9} + \frac{1}{162 \cdot 9} + \frac{1}{1458 \cdot 9}$.

**) Phân tích:* Nếu quy đồng phân số bài toán thì khá phức tạp. Nhận thấy các số 18, 162, 1458, đều chia hết cho 9, do đó ta sẽ phân tích các số này thành tích của 9 với một thừa số nào đó để xem có xuất hiện tổng theo quy luật $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots$ hay không, từ đó có hướng tính S .

Lời giải:

Ta có
$$S = \frac{1}{18} + \frac{1}{18 \cdot 9} + \frac{1}{162 \cdot 9} + \frac{1}{1458 \cdot 9} = \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{2 \cdot 9^2} + \frac{1}{2 \cdot 9^3} + \frac{1}{2 \cdot 9^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} \right)$$

Nhân 2 vào tổng S ta được:
$$2S = \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4}$$

Nhân 18 vào tổng S ta được:
$$18S = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3}$$

Trừ tổng $18S$ cho tổng $2S$ ta được:

$$18S - 2S = 16S = 1 - \frac{1}{9^4} \Rightarrow 16S = \frac{9^4 - 1}{9^4} \Rightarrow S = \frac{9^4 - 1}{16 \cdot 9^4} = \frac{410}{6561}$$

Bài 4: Tính tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{48} + 3^{49}$. Tìm chữ số tận cùng của S .

Lời giải:

+ Hướng giải 1: Nhận thấy S có 50 số hạng

$$S = \underbrace{(1 + 3 + 3^2 + 3^3)}_{\text{Nhóm 1}} + \underbrace{(3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7)}_{\text{Nhóm 2}} + \dots + \underbrace{(3^{44} + 3^{45} + 3^{46} + 3^{47})}_{\text{Nhóm 12}} + \underbrace{(3^{48} + 3^{49})}_{\text{Nhóm 13}}$$

Có 12 nhóm

$$S = 40 + 3^4 \cdot 40 + \dots + 3^{44} \cdot 40 + (3^{48} + 3^{49})$$

Ta có $(40 + 3^4 \cdot 40 + \dots + 3^{44} \cdot 40) : 10 \quad (1)$

Mà $3^{48} + 3^{49} = 3^{4 \cdot 12} + 3^{4 \cdot 12} \cdot 3 = 81^{12} + 81^{12} \cdot 3$ có chữ số tận cùng là 4 (Vì 81^{12} có chữ số tận cùng là 1)

Từ (1) và (2) suy ra S có chữ số tận cùng là 4.

+ Hướng giải 2: Ta có:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{48} + 3^{49}$$

$$3 \cdot S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{49} + 3^{50}$$

$$3 \cdot S - S = 3^{50} - 1 \Rightarrow S = \frac{3^{50} - 1}{2}$$

Ta thấy $3^{50} - 1 = 3^{4 \cdot 12} \cdot 3^2 - 1 = 81^{12} \cdot 9 - 1$ có chữ số tận cùng là 8

$$\Rightarrow S = \frac{3^{50} - 1}{2} \text{ có chữ số tận cùng là 4 hoặc 9.}$$

Mà S có 50 số hạng, mỗi số của S là một số lẻ nên S là số chẵn. Do đó S có chữ số tận cùng là 4.

Dạng 3: Tổng có dạng $S = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots + a^{2n} \quad (1)$

hoặc $S = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \dots + \frac{1}{a^{2n}} \quad (2) \text{ với } a \in \mathbb{N}; a \geq 2$

I. Phương pháp giải

Bước 1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số a^2 ta được:

$$a^2 \cdot S = a^2 + a^4 + a^6 + \dots + a^{2n+2} \quad (3)$$

Hoặc
$$a^2 \cdot S = a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \dots + \frac{1}{a^{2n-1}} \quad (a \in \mathbb{N}^*; n \in \mathbb{N}) \quad (4)$$

Bước 2: Lấy $a^2 S - S$ theo vế ta được $a^2 S - S = a^{2n+2} - 1 \Rightarrow S = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^2 - 1}$ (theo 1 và 3)

$$a^2 S - S = a^2 - \frac{1}{a^{2n}} \Rightarrow S = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^{2n+2} - a^{2n}} \quad (\text{theo 2 và 4})$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{100}$.

*) *Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 2^2 . Nếu ta nhân 2^2 vào tổng S , ta được tổng $2^2 \cdot S$ có các số hạng từ 2^2 đến 2^{102} trừ cho tổng S thì các số hạng từ 2^2 đến 2^{100} bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S

Lời giải:

Ta có $S = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{100}$

Nhân 2^2 vào tổng S ta được: $2^2 \cdot S = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{100} + 2^{102}$

$$2^2 S - S = 3S = 2^{102} - 1 \Rightarrow S = \frac{2^{102} - 1}{3}$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{100}}$$

Bài 2: Tính tổng

*) *Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{3^2}$. Nếu ta nhân 3^2 vào tổng S , ta được tổng $3^2 \cdot S$ có các số hạng từ $\frac{1}{3^2}$ đến $\frac{1}{3^{98}}$ giống như trong tổng S . Khi đó ta lấy tổng $3^2 \cdot S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{3^2}$ đến $\frac{1}{3^{98}}$ bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{100}} \\ \Rightarrow 3^2 S &= 3^2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{100}} \right) \\ &= 3 + 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^{98}} \\ \Rightarrow 3^2 S - S &= 3 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow 8S = \frac{11}{3} - \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow S = \left(\frac{11}{3} - \frac{1}{3^{100}} \right) : 8 \end{aligned}$$

Bài 3: Tính tổng $S = 6^2 + 6^4 + 6^6 + \dots + 6^{98} + 6^{100}$.

Lời giải:

Ta có $S = 6^2 + 6^4 + 6^6 + \dots + 6^{98} + 6^{100} \Rightarrow 6^2 S = 6^4 + 6^6 + \dots + 6^{98} + 6^{100} + 6^{102}$

$$6^2 S - S = 35S = 6^{102} - 6^2 \Rightarrow S = \frac{6^{102} - 6^2}{35}$$

Bài 4: Tính tổng $S = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{102}$.

Lời giải:

Ta có $S = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{102} \Rightarrow 3^2 S = 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{102} + 3^{104}$
 $\Rightarrow 3^2 S - S = 8S = 3^{104} - 1 \Rightarrow S = (3^{104} - 1) : 8$

Bài 5: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{100}}$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2^2 S &= 2^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{100}} \right) \\ &= 2^2 + 2 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{98}} \\ \Rightarrow 2^2 S - S &= 2^2 + 2 + 1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}} = \frac{11}{2} - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 3S = \frac{11}{2} - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow S = \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{2^{100}} \right) : 3 \end{aligned}$$

Dạng 4: Tổng có dạng $S = a + a^3 + a^5 + a^7 + \dots + a^{2n+1}$ (1) **hoặc**

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} + \dots + \frac{1}{a^{2n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{N}^*) \quad (2)$$

I. Phương pháp giải

Bước 1: Nhân a^2 vào tổng S ta được: $a^2 S = a^3 + a^5 + a^7 + \dots + a^{2n+3}$ (3)

$$a^2 S = \frac{1}{a+a} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} + \dots + \frac{1}{a^{2n+1}} \quad (a \in \mathbb{N}^*; n \in \mathbb{N}^*) \quad (4)$$

Bước 2: Lấy $a^2 S$ trừ đi tổng S về theo vế ta được:

$$a^2 S - S = a^{2n+3} - a \Rightarrow S = \frac{a^{2n+3} - a}{a^2 - 1} \quad (\text{theo 1 và 3})$$

$$a^2 S - S = a - \frac{1}{a^{2n+1}} \Rightarrow S = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^{2n+3} - a^{2n+1}} \quad (\text{theo 2 và 4})$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{103}$.

*) *Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 3^2 . Nếu ta nhân 3^2 vào tổng S , ta được tổng $3^2 \cdot S$ có các số hạng từ 3^5 . Đến 3^{103} giống như trong tổng S . Khi đó ta lấy tổng $3^2 \cdot S$ trừ cho tổng S thì các số hạng từ 3^5 đến 3^{103} bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S .

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= 1 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{103} \\ \Rightarrow 3^2 S &= 9 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{103} + 3^{105} \Rightarrow 3^2 S - S = 8S = 3^{105} + 9 - 27 - 1 = 3^{105} - 19 \\ \Rightarrow S &= \frac{3^{105} - 19}{8} \end{aligned}$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{101}}.$$

Bài 2: Tính tổng

*) *Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{2^2}$. Nếu ta nhân 2^2 vào tổng S , ta được tổng $2^2 \cdot S$ có các số hạng từ $\frac{1}{2}$ Đến $\frac{1}{2^{99}}$ giống như trong tổng S . Khi đó ta lấy tổng $2^2 \cdot S$ trừ cho tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S .

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{101}} \Rightarrow 2^2 S = 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \\ \Rightarrow 2^2 S - S &= 3S = 2^2 + 2 - 1 - \frac{1}{2^{101}} \Rightarrow S = \frac{1}{3} \left(5 - \frac{1}{2^{101}} \right) \end{aligned}$$

Bài 3: Tính tổng $S = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{101}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{101} \Rightarrow 2^2 S = 2^2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{101} + 2^{103} \\ \Rightarrow 2^2 S - S &= 3S = 2^2 + 2^{103} - 1 - 2 = 2^{103} + 1 \Rightarrow S = \frac{2^{103} + 1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{2^{103} + 1}{3}$$

Bài 4: Tính tổng $S = 6^3 + 6^5 + 6^7 + \dots + 6^{101}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= 6^3 + 6^5 + 6^7 + \dots + 6^{101} \Rightarrow 6^2 S = 6^5 + 6^7 + \dots + 6^{101} + 6^{103} \\ \Rightarrow 6^2 S - S &= 35S = 6^{103} - 6^3 \Rightarrow S = \frac{6^{103} - 6^3}{35} \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{101}}.$$

Bài 5: Tính tổng

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{101}} \Rightarrow 3^2 S = 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \\ \Rightarrow 3^2 S - S &= 8S = 3 - \frac{1}{3^{101}} = \frac{3^{102} - 1}{3^{101}} \Rightarrow S = \frac{3^{102} - 1}{8 \cdot 3^{101}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{3^{102} - 1}{8 \cdot 3^{101}}$$

Dạng 5: Tổng có dạng $S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (n-1).n(1)$

hoặc $S = 1.n + 2.(n-1) + 3.(n-2) + \dots + (n-1).2 + n.1(2) \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$.

I. Phương pháp giải

- Xét tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (n-1).n$, vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 1 $\Rightarrow$ Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 3) ta được:

$$3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + \dots + (n-2)(n-1).3 + (n-1).n.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + (n-2)(n-1).[n - (n-3)] + (n-1)n[(n+1) - (n-2)] = (n-1).n.(n+1)$$

$$\Rightarrow S = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

- Xét tổng $S = 1.n + 2.(n-1) + 3(n-2) + \dots + (n-1).2 + n.1(2)$

$$\Rightarrow S = 1.n + 2.(n-1) + 3(n-2) + \dots + (n-1).[n - (n-2)] + n.[n - (n-1)]$$

$$\Rightarrow S = 1.n + 2.n - 2.1 + 3.n - 3.2 + 4.n - 4.3 + \dots + (n-1).n - (n-1)(n-2) + n.n - n(n-1)$$

$$= (1+2+3+\dots+n).n - [1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1).n]$$

$$S = S_1.n - S_2$$

Với $S_1 = 1+2+3+\dots+n$ là tổng các số tự nhiên liên tiếp

$$S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1).n \quad (\text{đã tính ở trên})$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12$.

Lời giải:

Cách 1: Thực hiện phép tính:

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12$$

$$= 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 + 90 + 110 + 132 = 572$$

Cách 2: Áp dụng phương pháp khử liên tiếp.

$$1.2 = \frac{1}{3}(1.2.3 - 0.1.2); 2.3 = \frac{1}{3}(2.3.4 - 1.2.3); \dots; 11.12 = \frac{1}{3}(11.12.13 - 10.11.12)$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{3}11.12.13 = 572$$

Cách 3:

$$3A = 3.(1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12)$$

$$= 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + 4.5.(6-3) + \dots + 11.12.(13-10)$$

$$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 10.11.12 + 11.12.13$$

$$= 11.12.13$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}.11.12.13 = 572.$$

Cách 4:

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12$$

$$A = 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12$$

$$A = 1.(0+2) + 3.(2+4) + 5.(4+6) + 7.(6+8) + 9.(8+10) + 11.(10+12)$$

$$A = 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + 7.7.2 + 9.9.2 + 11.11.2$$

$$A = (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2) \cdot 2$$

$$A = (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2) \cdot 2 = 572$$

Khai thác: Từ việc tính được tổng A theo cách 2 hoặc 3 kết hợp với việc tính theo cách 4, ta sẽ tính được tổng các bình phương của dãy số lẻ liên tiếp. Ví dụ:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$$

Qua đây chúng ta sẽ có hướng nghiên cứu dạng toán tính tổng các bình phương của dãy số lẻ cách đều.

Nhận xét: Qua cách giải bằng phương pháp khử liên tiếp ở bài toán 1 đã nhận hai vế của biểu thức với 1 số xác định là:

(Số các thừa số của tích $S+1$). Khoảng cách giữa hai thừa số

Mở rộng: Viết công thức tổng quát tính:

$$A_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$A_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Hướng giải: Dự đoán

Chứng minh: Dùng phương pháp quy nạp

+ Với $n=1$. Vế trái: $1.2=2$. Vế phải $\frac{1 \cdot (1+1)(1+2)}{3} = 2$

Suy ra vế trái bằng vế phải. Vậy bài toán đúng với $n=1$.

+ Giả sử bài toán đúng với $n=k$ ($k \in \mathbb{N}, k > 1$) tức là ta đã có:

$$A_k = 1.2 + 2.3 + \dots + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

+ Ta phải chứng minh bài toán đúng với $n=k+1$. Thật vậy:

$$A_{k+1} = A_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$\Rightarrow A_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$A_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Vậy

Bài 2: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 99.100 + 100.101$.

Lời giải:

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 99.100 + 100.101$

$$\Rightarrow 3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + \dots + 99.100.3 + 100.101.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98) + 100.101.(102-99)$$

$$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 98.99.100 + 99.100.101 - 100.101.99 + 100.101.102$$

$$= 100.101.102$$

$$\Rightarrow S = 100.101.102 : 3 = 34.100.101 = 343400$$

Bài 3: Tính tổng $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + \dots + 199.2 + 200.1$.

Lời giải:

Ta có $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + \dots + 199.2 + 200.1$

$$\begin{aligned}
&= 1.200 + 2(200 - 1) + 3(200 - 2) + 4(200 - 3) + \dots + 199(200 - 198) + 200(200 - 199) \\
&= (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 200).200 - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 198.199 + 199.200) \\
&= \frac{200.201}{2} - \frac{199.200.201}{3} = 1353400
\end{aligned}$$

Dạng 6: Tổng có dạng $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ **với** $n \in \mathbb{N}, n > 3$

I. Phương pháp giải

Áp dụng công thức tính tổng ở dạng 5 là $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (n-1).n$

Ta có $S = 1.(1+1) + 2(1+2) + 3(1+3) + \dots + n(n+1) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

$$= P + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

Với: $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$

$$\Rightarrow P = S - (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

Trong đó tổng S đã tính trong dạng 5 và tổng $1 + 2 + 3 + \dots + n$ tính trong dạng 1

$$\Rightarrow P = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2 + 11^2$.

Lời giải:

Cách 1: $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2 + 11^2$

$$A = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 = 506$$

Cách 2:

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2 + 11^2$$

$$A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 9(10-1) + 10(11-1) + 11(12-1)$$

$$A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 9(10-1) + 10(11-1) + 11(12-1)$$

$$A = 1.2 - 1 + 2.3 - 2 + 3.4 - 3 + \dots + 9.10 - 9 + 10.11 - 10 + 11.12 - 11$$

$$A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 9.10 + 10.11 + 11.12) - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 + 10 + 11)$$

Ta thấy:

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 9.10 + 10.11 + 11.12 = 11.12.13 : 3 = 572$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 = (11+1).11 : 2 = 66$$

Do đó $A = 572 - 66 = 506$.

$$A = \frac{11.12.13}{3} - \frac{11.12}{2} = \frac{11.12.(11.2+1)}{6} = 506$$

Nhận xét: Theo cách 2 ta có

Mở rộng: Viết công thức tổng quát tính với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

a) $A_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

b) $A_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2$

Ta có công thức:

$$a) A_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (n \in N^*)$$

$$b) A_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2 = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)}{6} \quad (n \in N^*)$$

Bài 2: Tính tổng $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2$.

Lời giải:

Ta

có

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 = 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \dots + 49(49+1) + 50(50+1)$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + 50) = P + (1 + 2 + 3 + \dots + 50) \Rightarrow P = S - (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$$

$$\text{Lại có } S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 = \frac{50.51.52}{3} = 44200$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 50) = \frac{(50+1).50}{2} = 1275$$

$$\Rightarrow S = 44200 - 1275 = 42925$$

Bài 3: Tính tổng $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 51^2$.

Lời giải:

Ta

có

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 + 51.52 = 1.(1+1) + 2.(2+1) + 3.(3+1) + \dots + 51.(51+1)$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 51^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + 51) = Q + (1 + 2 + 3 + \dots + 51) \Rightarrow Q = S - (1 + 2 + 3 + \dots + 51)$$

$$\text{Trong đó } S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 + 51.52 = \frac{51.52.53}{3} = 46852$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 51) = \frac{(1+51).51}{2} = 1326$$

$$\text{Vậy } Q = 46852 - 1326 = 45526$$

Bài 4: Tính tổng $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$.

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 199.200 + 200.201 = 2(1+3) + 4(3+5) + \dots + 200(199+201)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 200.400 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 200.200.2 = 2(2^2 + 4^2 + \dots + 200^2) = 2M$$

$$\Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 thì ta có } A = \frac{200.201.202}{3} \Rightarrow M = \frac{200.201.202}{6} = 1353400$$

$$Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 = \frac{M}{2^2} = \frac{1353400}{4} = 338350$$

Bài 5: Tính tổng $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 + 101^2$.

Lời giải:

$$\text{Áp dụng tổng } A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 201.202 + 202.203$$

$$= 2(1+3) + 4(3+5) + \dots + 202(201+203)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 202.404 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 202.202.2$$

$$= 2(2^2 + 4^2 + \dots + 202^2) = 2M$$

$$\Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 thì ta có } A = \frac{202.203.204}{3} \Rightarrow M = \frac{202.203.204}{6} = 1394204.$$

$$Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 101^2 = \frac{M}{2^2} = \frac{1394204}{4} = 348551$$

Dạng 7: Tổng có dạng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (k-1)^2$ **(k chẵn và k là số tự nhiên)**

I. Phương pháp giải

Áp dụng công thức tính tổng ở dạng 5 là

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (k-2)(k-1) + (k-1)k$$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (k-2)(k-1) + (k-1)k$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + (k-1)[(k-2)+k]$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + (k-1)(2k-2)$$

$$= 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + (k-1)(k-1).2 = 2[1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (k-1)^2]$$

$$= 2S$$

*) Chú ý: Tính từ số hạng 0.1 đến số hạng $(k-1)k$ mà số số hạng là chẵn (tức là số số hạng của tổng A là số lẻ) thì ta có thể ghép đủ cặp như trên, còn số số hạng là lẻ (tức là số số hạng của tổng A là số chẵn) thì khi ghép cặp số ta còn thừa ra số hạng $(k-1)k$.

$$\Rightarrow S = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 thì tổng } A = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \Rightarrow S = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 18.19 + 19.20$

Tổng này có 19 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 20 số hạng và ghép được đủ 10 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 18.19 + 19.20$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 18.19 + 19.20$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 19(18+20)$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 19.38 = 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 19.19.2$$

$$= 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2) = 2S$$

$$\Rightarrow S = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có } A = \frac{19.20.21}{3} \Rightarrow S = \frac{19.20.21}{6} = 1330$$

Vậy $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2 = 1330$

Bài 2: Tính tổng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 49^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 48.49 + 49.50$

Tổng này có 49 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 50 số hạng và ghép được đủ 25 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 48.49 + 49.50$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 48.49 + 49.50$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 49(48+50)$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 49.98 = 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 49.49.2$$

$$= 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 49^2) = 2.S$$

$$\Rightarrow S = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có } A = \frac{49.50.51}{3} \Rightarrow S = \frac{49.50.51}{6} = 20825.$$

$$\text{Vậy } S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 49^2 = 20825$$

Dạng 8: Tổng có dạng $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (k-1)^2$ (k là số tự nhiên lẻ)

I. Phương pháp giải

Áp dụng công thức tính tổng ở dạng 5 là

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (k-2)(k-1) + (k-1)k$$

$$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + (k-1)[(k-2)+k]$$

$$= 2.4 + 4.8 + 6.12 + \dots + (k-1)(2k-2)$$

$$= 2.2.2 + 4.4.2 + 6.6.2 + \dots + (k-1).(k-1).2$$

$$= 2[2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (k-1)^2] = 2S$$

$$\Rightarrow S = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có } A = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \Rightarrow S = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

Áp dụng tính: $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, xét $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2$

$$\Rightarrow \frac{S}{2^2} = \frac{S}{4} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \Rightarrow P = \frac{S}{4}$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 30^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 29.30 + 30.31$$

$$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + 30(29+31)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 30.60$$

$$= 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 30.30.2$$

$$= 2(2^2 + 4^2 + \dots + 30^2) = 2M \Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 ta có } A = \frac{30.31.32}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{30.31.32}{6} = 4960$$

$$M = 4960$$

Vậy

Bài 2: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 50^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$\begin{aligned} A &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 \\ &= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + 50(49+51) \\ &= 2.4 + 4.8 + \dots + 50.100 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 50.50.2 \\ &= 2(2^2 + 4^2 + \dots + 50^2) = 2M \Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 ta có } A = \frac{50.51.52}{3} \\ \Rightarrow M &= \frac{50.51.52}{6} = 22100 \end{aligned}$$

Vậy $M = 22100$

Bài 3: Biết $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$. Tính tổng $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 &= 385 \Rightarrow 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) = 2^2.385 \\ \Rightarrow 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2 &= 4.385 \Rightarrow 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2 = 1540 \end{aligned}$$

Dạng 9: Tổng có dạng $S = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{n-1}a_n$ (1) **Với**
 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = 2$ và $a_1 \in \mathbb{N}^*; n \in \mathbb{N}^*$

I. Phương pháp giải

- Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = 2$

$$\begin{aligned} S &= a_1(a_1 + 2) + a_2(a_2 + 2) + a_3(a_3 + 2) + a_4(a_4 + 2) + \dots + a_{n-1}(a_{n-1} + 2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n-1}^2) + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = S_1 + 2.S_2 \end{aligned}$$

Tổng $S_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n-1}^2$, tính theo dạng 6 và 7

$S_2 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$, tính theo dạng 1

- Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = k > 2$

Nhân cả 2 vế với $3k$ rồi tách $3k$ ở mỗi số hạng để tạo thành các số hạng mới tự triệt tiêu.

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 19.21$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 17.19 + 19.21 \\ &= 1(1+2) + 3(3+2) + 5(5+2) + \dots + 17(17+2) + 19(19+2) \\ &= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2 + 19^2) + 2(1+3+5+7+\dots+17+19) \end{aligned}$$

Đặt $B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2 + 19^2$

$$\text{Ta có tổng B có dạng } B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

Với $k=20$, ta có $B = \frac{19.20.21}{6} = 1330$
 $\Rightarrow S = 1330 + 2(1+19).10 : 2 \Rightarrow S = 1530$

Vậy $S = 1530$

Bài 2: Tính tổng $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 47.49 + 49.51$

Lời giải:

Ta có: $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 47.49 + 49.51$
 $= 1(1+2) + 3(3+2) + 5(5+2) + \dots + 47(47+2) + 49(49+2)$
 $= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 47^2 + 49^2) + 2(1+3+5+\dots+47+49)$

Đặt $B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 47^2 + 49^2$

Ta có tổng B có dạng $B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$

Với $k=50$, ta có $B = \frac{49.50.51}{6} = 20825$
 $\Rightarrow S = 20825 + 2(1+49).25 : 2 \Rightarrow S = 20825 + 1250 = 22075$

Vậy $S = 22075$

Bài 3: Tính tổng $P = 1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots + 49.52$

Lời giải:

Vì khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng bằng 3, nhân cả 2 vế với 9 ta được:
 $9P = 1.4.9 + 4.7.9 + 7.10.9 + \dots + 49.52.9$
 $= 1.4(7+2) + 4.7(10-1) + 7.10(13-4) + \dots + 46.49(52-43) + 49.52(55-46)$
 $= 1.4.7 + 1.4.2 + 4.7.10 - 1.4.7 + 7.10.13 - 4.7.10 + \dots + 46.49.52 - 43.46.49 + 49.52.55 - 46.49.52$
 $= 1.4.2 + 49.52.55 = 140148 \Rightarrow P = 15572$

Vậy $P = 15572$

Dạng 10: Tính tổng có dạng $S = 1.a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n$

I. Phương pháp giải

Nhân cả hai vế với $4k$, rồi tách $4k$ ở mỗi số hạng trong tổng để số hạng trước và số hạng sau tạo thành những số tự triệt tiêu nhau

$$4k.S = 1.a_2a_3.4k + a_2a_3a_4.4k + a_3a_4a_5.4k + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n.4k = a_{n-2}a_{n-1}a_n(a_n + k)$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 16.17.18 + 17.18.19$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 1, nên nhân cả 2 vế với 4 ta được:

$$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + \dots + 16.17.18.4 + 17.18.19.4$$

$$= 1.2.3.4 + 2.3.4(5-1) + 3.4.5(6-2) + \dots + 16.17.18(19-5) + 17.18.19(20-16)$$

$$= 17.18.19.20 = 116280$$

$$\Rightarrow S = 116280 : 4 = 29070$$

Vậy $S = 29070$

Bài 2: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 26.27.28 + 27.28.29$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 1, nên nhân cả 2 vế với 4 ta được:

$$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + \dots + 26.27.28.4 + 27.28.29.4$$

$$= 1.2.3.4 + 2.3.4(5-1) + 3.4.5(6-2) + \dots + 26.27.28(29-25) + 27.28.29(30-26)$$

$$= 27.28.29.30 = 657720$$

$$\Rightarrow S = 657720 : 4 = 164430$$

Vậy $S = 164430$

Bài 3: Tính tổng $S = 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \dots + 55.57.59$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 2, nên nhân cả 2 vế với 8 ta được:

$$8S = 1.3.5.8 + 3.5.7.8 + 5.7.9.8 + \dots + 55.57.59.8$$

$$= 1.3.5(7+1) + 3.5.7(9-1) + 5.7.9(11-3) + \dots + 53.55.57(59-51) + 55.57.59(61-53)$$

$$8S = 1.3.5 + 1.3.5.7 - 1.3.5.7 + 3.5.7.9 - 3.5.7.9 + \dots - 51.53.55.57 + 53.55.57.59 + 55.57.59.61 - 53.55.57.59$$

$$8S = 1.3.5 + 55.57.59.61$$

$$S = (1.3.5 + 55.57.59.61) : 8 = 1410360$$

Chia cả 2 vế cho 8 ta được:

Vậy $S = 1410360$

Bài 4: Tính tổng $A = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \dots + 18.19.20.21 + 19.20.21.22$

Lời giải:

Nhân hai vế với 5 ta được $5A = 1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.5 + \dots + 18.19.20.21.5 + 19.20.21.22.5$

$$5A = 1.2.3.4.5 + 2.3.4.5(6-1) + \dots + 18.19.20.21(22-17) + 19.20.21.22(23-18)$$

$$= 1.2.3.4.5 - 1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 - \dots - 17.18.19.20.21 + 18.19.20.21.22 - 18.19.20.21.22 + 19.20.21.22.23$$

$$= 19.20.21.22.23 \Rightarrow A = \frac{19.20.21.22.23}{5} = 807576$$

Vậy $A = 807576$

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

Dạng 11: Tính tổng có dạng

Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = k$

I. Phương pháp giải

- Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = 1$ thì

$$S = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}$$

- Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = k > 1$ thì

$$S = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right)$$

- Với dạng toán phức tạp hơn như:

1) Nếu số hạng có dạng $\frac{2m}{b(b+m)(b+2m)}$, thì ta dùng công thức $\frac{2m}{b(b+m)(b+2m)} = \frac{1}{b(b+m)} - \frac{1}{(b+m)(b+2m)}$ để viết mỗi số hạng thành hiệu của hai phân số

2) Nếu số hạng có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$, thì ta dùng công thức $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right]$, sau đó áp dụng tiếp công thức trong phần 1.

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

Vậy $A = \frac{49}{50}$

Bài 2: Tính tổng $A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{97.99}$

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{97.99}$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{99} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{99} = \frac{49}{99}$$

Vậy $A = \frac{49}{99}$

Bài 3: Tính tổng $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{45}$

Lời giải:

Ta có $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{45} = \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \dots + \frac{2}{90}$

$$= 2 \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{9.10} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) = 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{5}$$

$$A = \frac{4}{5}.$$

Vậy

$$B = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{18.19.20}$$

Bài 4: Tính tổng

Lời giải:

$$2B = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{18.19.20}$$

Xét

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{18.19} - \frac{1}{19.20} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{19.20}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2} \cdot \frac{19.20 - 1}{19.20} = \frac{189}{760}$$

$$B = \frac{189}{760}.$$

Vậy

$$A = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{12} + 1 - \frac{1}{20} + 1 - \frac{1}{30} + 1 - \frac{1}{42} + 1 - \frac{1}{56} + 1 - \frac{1}{72} + 1 - \frac{1}{89}$$

Bài 5: Tính tổng

Lời giải:

$$A = 9 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{89} \right)$$

Ta có

$$A = 9 - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{89} \right)$$

$$A = 9 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{89} \right) = 9 - \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{89} \right) = 9 - 1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{89} = \frac{73}{9} - \frac{1}{89} = 8 \frac{80}{801}$$

$$A = 8 \frac{80}{801}$$

Vậy

$$B = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \frac{1}{475} + \frac{1}{777} + \frac{1}{1147}$$

Bài 6: Tính tổng

Lời giải:

$$B = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \frac{1}{475} + \frac{1}{777} + \frac{1}{1147} = \frac{1}{1.7} + \frac{1}{7.13} + \frac{1}{13.19} + \frac{1}{19.25} + \frac{1}{21.37} + \frac{1}{37.31}$$

Ta có

$$= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{25} \right) + \frac{1}{21.37} + \frac{1}{37.31} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{25} \right) + \frac{31+21}{21.31.37}$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{52}{24087} = \frac{97648}{602175}$$

$$B = \frac{97648}{602175}$$

Vậy

Bài 7: Tính tổng $A = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$

Lời giải:

Ta có
$$A = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90} = - \left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} \right)$$

$$= - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) = \frac{-3}{20}$$

$$A = \frac{-3}{20}$$

Vậy

Bài 8: Tính tổng $B = \frac{5}{2 \cdot 1} + \frac{4}{1 \cdot 11} + \frac{3}{11 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 15} + \frac{13}{15 \cdot 4}$

Lời giải:

Ta có
$$B = \frac{5}{2 \cdot 1} + \frac{4}{1 \cdot 11} + \frac{3}{11 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 15} + \frac{13}{15 \cdot 4} = 7 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{28} \right)$$

$$= 7 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{28} \right) = \frac{13}{4} = 3 \frac{1}{4}$$

$$B = 3 \frac{1}{4}$$

Vậy

9: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20}$

Bài

$$B = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{38 \cdot 40}$$

Lời giải:

Ta có
$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}$$

$$= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

$$B = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{38 \cdot 40} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{38} - \frac{1}{40} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{40} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{40} = \frac{19}{80}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{19}{20} : \frac{19}{80} = 4$$

Vậy
$$\frac{A}{B} = 4$$

Dạng 12: Tính tổng có dạng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$ Với $n \in \mathbb{N}^*$

I. Phương pháp giải

Áp dụng tổng $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + (n-1)n(n+1)$

Trong mỗi số hạng, tách thừa số đầu và thừa số sau theo tổng và hiệu của thừa số giữa với 1.

Áp dụng công thức $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ để nhân các số sau khi tách

Ta có: $B = (2-1).2.(2+1) + (3-1).3.(3+1) + \dots + (n-1).n.(n+1)$

$$= (2^3 - 2) + (3^3 - 3) + \dots + (n^3 - n) = (2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - (2 + 3 + \dots + n)$$

$$= (1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) \Rightarrow S = B + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

Theo dạng 10 ta tính được

$$B = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$

Theo dạng 1 ta tính được $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$S = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Vậy

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$

Lời giải:

Ta có $B = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 9.10.11 = (2-1).2.(2+1) + (3-1).3.(3+1) + \dots + (10-1).10.(10+1)$

$$= (2^3 - 2) + (3^3 - 3) + \dots + (10^3 - 10)$$

$$= (2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) - (2 + 3 + \dots + 10) = (1 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) - (1 + 2 + 3 + \dots + 10)$$

$$\Rightarrow S = B + (1 + 2 + 3 + \dots + 10)$$

Theo dạng 10 ta tính được $B = \frac{9.10.11.12}{4} = 2970$

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 10^3 = 2970 + \frac{10.11}{2} = 3025$$

Khi đó

$$\text{Vậy } S = 3035$$

Bài 2: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 51^3$

Lời giải:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 51^3 = \left[\frac{51(51+1)}{2} \right]^2 = 1758276.$$

Ta có

$$\text{Vậy } S = 1758276$$

Bài 3: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3$

Lời giải:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 20^3 = \left[\frac{20(20+1)}{2} \right]^2 = 44100$$

Ta có

$$\text{Vậy } S = 44100$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website *VnTeach.Com*

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>