

Bài 1: Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất giữa n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$). Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$(n-1)d \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \leq \frac{n^2 d}{4}$$

Giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \Rightarrow d = x_n - x_1$.

*) Trước tiên ta chứng minh $(n-1)d \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|$ (1)

+) Với $n = 2$ thì (1) hiển nhiên đúng.

+) Giả sử (1) đúng với $n = k$ tức là

$$(k-1)d \leq \sum_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j| \Leftrightarrow (k-1)(x_k - x_1) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j|$$

Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} k(x_{k+1} - x_1) &= (x_{k+1} - x_1) + (k-1)(x_{k+1} - x_k) + (k-1)(x_k - x_1) \\ &\leq (x_{k+1} - x_1) + \sum_{i=1}^k (x_{k+1} - x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} |x_i - x_j| \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Suy ra (1) được chứng minh và đẳng thức xảy ra khi ít nhất $n-1$ biến bằng nhau.

*) Tiếp theo ta chứng minh $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \leq \frac{n^2 d}{4}$ (2)

Không mất tính tổng quát, giả sử $-\frac{d}{2} = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = \frac{d}{2}$

(vì nếu $x_1 = a$ thì ta trừ tất cả các x_i đi $a + \frac{d}{2}$ thì bất đẳng thức ban đầu không đổi)

Ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \sum_{i=1}^n [(i-1) - (n-i)]x_i = \sum_{i=1}^n (2i-1-n)x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n |2i-1-n| |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |2i-1-n| \frac{d}{2} \end{aligned}$$

+) Với $n = 2k$

$$\begin{aligned} (3) \Rightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| &\leq \left[\sum_{i=1}^k (2k+1-2i) - \sum_{i=k+1}^{2k} (2k+1-2i) \right] \frac{d}{2} = 2k^2 \frac{d}{2} = \frac{n^2 d}{4} \\ &\Rightarrow (2) \text{ đúng.} \end{aligned}$$

+) Với $n = 2k+1$

$$\begin{aligned} (3) \Rightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| &\leq \left[\sum_{i=1}^{k+1} (2k+2-2i) - \sum_{i=k+2}^{2k+1} (2k+2-2i) \right] \frac{d}{2} = (2k^2 + 2k) \frac{d}{2} \leq \frac{(2k+1)^2 d}{4} = \frac{n^2 d}{4} \\ &\Rightarrow (2) \text{ đúng.} \end{aligned}$$

Vậy (2) được chứng minh và đẳng thức xảy ra chẳng hạn như các biến bằng nhau.

Bài 2: Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = [f(x)]^y [f(y)]^x \quad (\text{với } \forall x, y \in \mathbb{R}^+). \quad (1)$$

Giải:

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài.

+) Từ (1) cho $x = y = 1$ ta được: $f(1) = [f(1)]^2 \Rightarrow f(1) = 1$

+) Từ (1) cho $x = y$ ta được: $f(x^2) = [f(x)]^{2x}$ (với $\forall x \in \mathbb{R}^+$) (2)

+) Đặt $f(x) = [g(x)]^{x \ln x}$ (với $\forall x \in \mathbb{R}^+$).

Vì f liên tục, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \Rightarrow g$ liên tục và $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

+) Từ (2) suy ra $[g(x^2)]^{2x^2 \ln x} = [g(x)]^{2x^2 \ln x}$ (với $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$\Leftrightarrow g(x^2) = g(x)$ (với $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$\Leftrightarrow g(x) = g\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ (với $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

+) Với $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ta có:

$$g(x) = g\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = g\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \dots = g\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2^n}}\right) = g(1) = a \quad (a \in \mathbb{R}^+)$$

(do g liên tục trên $\mathbb{R}^+$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2^n}}\right)$).

Vậy $g(x) = a$ (với $\forall x \in \mathbb{R}^+$) ($a \in \mathbb{R}^+$ là một hằng số)

Suy ra $f(x) = a^{x \ln x}$ (với $\forall x \in \mathbb{R}^+$) ($a \in \mathbb{R}^+$ là một hằng số)

Thử lại thấy đúng.

Kết luận: Vậy $f(x) = a^{x \ln x}$ (với $\forall x \in \mathbb{R}^+$) ($a \in \mathbb{R}^+$ là một hằng số) là hàm duy nhất thỏa mãn đề bài.

Bài 3: Trên đường chéo AC của tứ giác nội tiếp $ABCD$ lấy điểm L sao cho $AB = AL$. Trên tia DC lấy điểm F sao cho $DB = DF$. Điểm E đối xứng với B qua AD . Chứng minh rằng các điểm F, L và E nằm trên một đường thẳng.

Giải

Gọi M, N, P lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ B xuống AD, AC, DC .

Suy ra M, N, P thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Trên đường thẳng MN lấy điểm K khác phía với N đối với BE sao cho $\angle BKE = 90^\circ$.

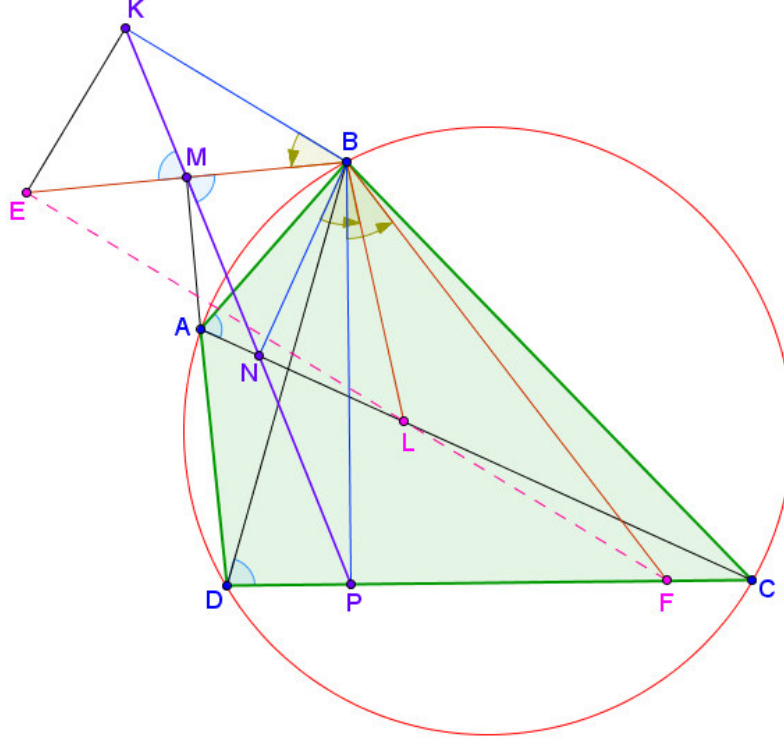
Ta có:

$$\begin{aligned} (\overline{BK}, \overline{BE}) &\equiv \frac{1}{2}(\overline{MK}, \overline{ME}) \equiv \frac{1}{2}(\overline{MP}, \overline{MB}) \equiv \frac{1}{2}(\overline{DP}, \overline{DB}) \equiv \frac{1}{2}(\overline{DC}, \overline{DB}) \equiv (\overline{BP}, \overline{BF}) \equiv \frac{1}{2}(\overline{AC}, \overline{AB}) \\ &\equiv (\overline{BN}, \overline{BL}) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \triangle BKE \sim \triangle BNL \sim \triangle BPF \Rightarrow \frac{BE}{BK} = \frac{BL}{BN} = \frac{BF}{BP} = k$$

Xét phép vị tự quay: $V_B^k \circ Q_B^\alpha \quad K \rightarrow E, N \rightarrow L, P \rightarrow F$

K, N, P thẳng hàng $\rightarrow E, L, F$ thẳng hàng (điều phải chứng minh).



Bài 4: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y thoả mãn phương trình:

$$2x(xy - 2y - 3) = (x+y)(3x + y). \quad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (3-2y)x^2 + 2(4y+3)x + y^2 = 0 \quad (2)$$

Coi (2) là phương trình bậc 2 ẩn x (do $y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 3-2y \neq 0$) có

$$\Delta' = (4y+3)^2 - y^2(3-2y) = (2y+1)(y+3)^2$$

Để (2) có nghiệm nguyên dương thì Δ' phải là số chính phương.

$$\Rightarrow 2y+1 = (2k+1)^2 \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \Leftrightarrow y = 2k^2 + 2k \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

Khi đó (2) có nghiệm dương:

$$x = \frac{4y+3 + (2k+1)(y+3)}{2y-3} = k+2 + \frac{y+9k+12}{2y-3}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y+9k+12 : 2y-3 \Leftrightarrow 2k^2+11k+12 : 4k^2+4k-3$$

Lại có

$$2k^2+11k+12 < 4k^2+4k-3 \Leftrightarrow k > 5$$

Vậy nên ta chỉ xét với $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$$+) k=1 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x=8 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+) k=2 \Rightarrow y=12 \Rightarrow x=6 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+) k=3 \Rightarrow y=24 \Rightarrow x = \frac{32}{5} \notin \mathbb{Z} \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$+) k=4 \Rightarrow y=40 \Rightarrow x = \frac{593}{77} \notin \mathbb{Z} \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$+) k=5 \Rightarrow y=60 \Rightarrow x=8 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm nguyên dương

$$(x; y) \in \{(8; 4); (6; 12); (8; 60)\}$$

Bài 5: Cho bàn cờ 7×7 ô. An có 1 quân unomino gồm 1 ô vuông, còn Bình có 1 quân trimino hình chữ L và 15 quân trimino hình chữ I.

- Chứng minh rằng An có thể đặt quân unomino của mình vào một ô nào đó của bàn cờ để Bình không thể phủ phần còn lại bằng các quân trimino của mình.
- Bây giờ giả sử Bình có 2 quân trimino hình chữ L và 14 quân trimino hình chữ I. Chứng minh rằng cho dù An đặt quân unomino vào ô nào bất kỳ, Bình đều có thể phủ phần còn lại bằng các quân trimino của mình.

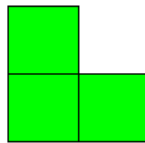
Giải

- Ta đánh số vào các ô của bàn cờ (như hình vẽ):

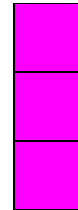
1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1



Unomino



Trimino chữ L



Trimino chữ I

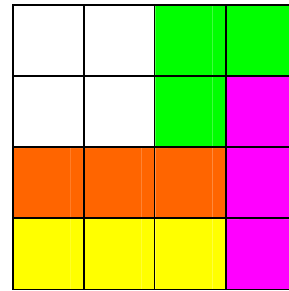
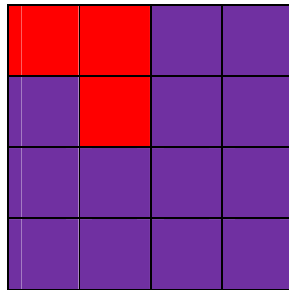
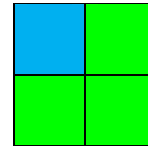
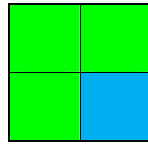
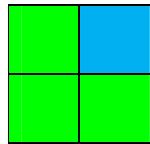
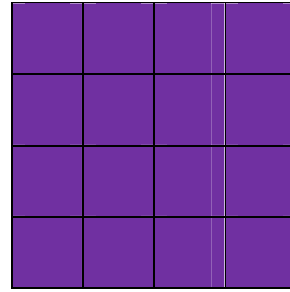
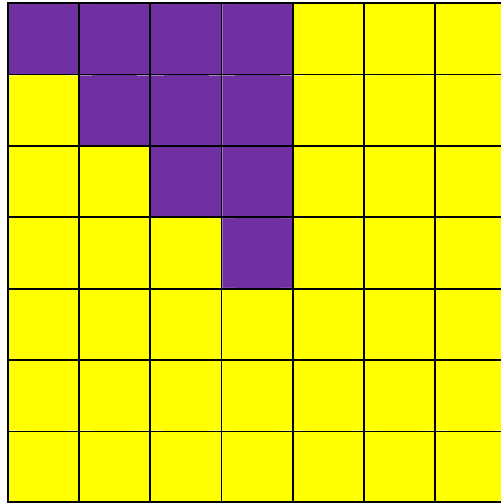
Ta thấy quân trimino chữ L phủ 3 ô thì tổng các số trong 3 ô đó không chia hết cho 3
quân trimino chữ I phủ 3 ô thì tổng các số trong 3 ô đó chia hết cho 3

Nếu quân unomino của An đặt vào ô đầu tiên (hình vẽ), giả sử Bình có thể phủ phần còn lại bằng các quân trimino của mình.

$\Rightarrow$ các ô được phủ có tổng các số trong đó sẽ không chia hết cho 3

Mà ta lại thấy tổng các số trong các ô còn lại của bảng là 6 là một số chia hết cho 3
Từ hai điều trên $\Rightarrow$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ điều giả sử là sai $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

- Do tính đối xứng của hình vuông nên ta có thể giả sử quân unomino của An đặt ở một trong các ô màu tím (hình vẽ)



Ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn là: An có 1 quân unomino gồm 1 ô vuông, Bình có 2 quân trimino hình chữ L và 3 quân trimino hình chữ I thì cho dù An đặt quân unomino vào ô nào bất kỳ trong bàn cờ kích thước 4×4 , Bình đều có thể phủ phần còn lại bằng các quân trimino của mình.

Do hình vuông có tính đối xứng nên ta chỉ xét quân unomino của An đặt ở một trong các ô màu đỏ (hình vẽ)

Hơn nữa ta thấy dù An có đặt quân unomino của mình vào một trong ba ô đỏ thì Bình đều có thể đặt quân trimino chữ L của mình để tạo thành hình vuông 2×2 ô. Các ô còn lại ta có thể đặt các quân như hình vẽ.

Nhận xét:

+) Ở ý a) ta có thể chỉ ra tất cả các ô mà khi An có thể đặt quân unomino của mình vào thì Bình không thể phủ phần còn lại bằng các quân trimino của mình là các ô thuộc viền ngoài bàn cờ và thuộc 2 trục đối xứng (không phải là đường chéo)

+) Ta có thể tổng quát bài này cho bàn cờ $(3k + 1) \times (3k + 1)$ ô.