# Một số bài toán sử dụng phương pháp phân nhóm

www.diendantoanhoc.net

**Ví dụ 0.1.** *Cho các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn: $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = 1; \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$. Chứng minh rằng:*

$$|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}| \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

LỜI GIẢI.
Đặt $A = \{i |\, x_i \geq 0\}$; $dB = \{i |\, x_i < 0\}$. Khi đó điều kiện bài ra trở thành:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in A} x_i + \sum\limits_{i\in B} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i\in A} x_i - \sum\limits_{i\in B} x_i = 1 \end{cases}$$

Do đó ta có $\sum\limits_{i\in A} x_i = \frac{1}{2}$ và $\sum\limits_{i\in B} x_i = -\frac{1}{2}$. Bây giờ ta có :

$$|\sum_{i\in A} \frac{x_i}{i}| \leq \sum_{i\in A} x_i = \frac{1}{2} \text{ và } |\sum_{i\in B} \frac{x_i}{i}| = -\sum_{i\in B} \frac{x_i}{i} \leq -\sum_{i\in B} \frac{x_i}{2n} = -\frac{1}{2n}.$$

Do đó $|\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}| = \sum\limits_{i\in A} \frac{x_i}{i} - \sum\limits_{i\in B} \frac{x_i}{i} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$. Đây là điều phải chứng minh.

**Ví dụ 0.2.** *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là $n$ số thực sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $S \subset \{1, 2, \ldots, s\}$ thỏa mãn:*

$$\begin{cases} 1 \leq |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \leq 2; \forall i = 1, 2, \ldots, n-2\} \\ |\sum\limits_{i\in S} x_i| \geq \frac{1}{6} \end{cases}$$

LỜI GIẢI.
Với mỗi $i = 0, 1, 2$, đăt $s_i = \sum\limits_{x_j \geq 0, j\equiv i \pmod 3} x_j$; $\quad t_i = \sum\limits_{x_j < 0, j\equiv i \pmod 3} x_j$. Khi đó ta có:
$s_1+s_2+s_3-s_1-s_2-s_3 = 1$. Suy ra $(s_1+s_2)+(s_2+s_3)+(s_3-s_1)-(t_1+t_2)-(t_2+t_3)-(t_3+t_1) = 2$. Không mất tính tổng quát giả sử $s_1+s_2 \geq \frac{1}{3}$ và $|s_1+s_2| \geq |t_1+t_2|$. Suy ra $s_1+s_2+t_1+t_2 \geq 0$. Do đó ta có:
$(s_1+s_2+t_1)+(s_1+s_2+t_2) \geq s_1+s_2 \geq \frac{1}{3}$. Nên $s_1+s_2+t_1$ hoặc $s_1+s_2+t_2$ không nhỏ hơn $\frac{1}{6}$. Rõ ràng trong 3 số nguyên liên tiếp có 1 số chia hết cho 3. Nên ta có điều cần chứng minh.

**Ví dụ 0.3.** *Với mỗi số nguyên dương $n$ kí hiệu $d(n)$ là số các chữ số 0 trong cách viết của $n$ trong hệ cơ số 3.*
*Chứng minh rằng:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^{d(n)}}{n^3} < +\infty$$

LỜI GIẢI.
Với mỗi số nguyên dương $k$ kí hiệu $s_k = \sum \frac{10^{d(n)}}{n^3}$ ở đây tổng lấy theo tất cả các số $n$ có $k$ chữ số trong cơ số 3. Ta có: $s_k = \sum_{t=0}^{k-1} 10^t(\sum_{d(n)=t} \frac{1}{n^3})$. Mặt khác ta có có đúng $2^{k-t}$ số có $k$ chữ số trong cơ số 3 mà chứa đúng t số 0 nên $s_k < \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\binom{k-1}{t}2^{k-t}}{3^{3(k-1)}} < \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{27^{k-1}} 10^t \binom{k-1}{t} 2^{k-t} = \frac{2}{27^{k-1}} 12^{k-1} = 2.\left(\frac{12}{27}\right)^{k-1}$ Do đó ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^{d(n)}}{n^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} s_k < \sum_{k=1}^{+\infty} 2.\left(\frac{12}{27}\right)^{k-1} < +\infty$. Điều cần chứng minh.

**Ví dụ 0.4.** *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ là dãy tăng gồm các số nguyên dương không có chữ số 9 nào trong biểu diễn thập phân. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{x_i} < \frac{1}{80}$$

LỜI GIẢI.
Đặt $s_k = \sum \frac{1}{n}$ ở đây tổng lấy trên tất cả $n$ mà có $n$ có $k$ chữ số và không chứa chữ số 9 trong biểu diễn thập phân. Ta có có đúng $8.9^{k-1}$ số có $k$ chữ số mà không chứa chữ 9 nào trong biểu diễn thập phân. Do đó ta có : $s_k < \frac{8.9^{k-1}}{10^{k-1}}$.. Nên ta có:
$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{x_i} = \sum_{k=1}^{+\infty} s_k < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8.9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8.\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 80$. ĐPCM

Chú ý : Bài toán tương tự sau đây cũng đúng và nó có cách chứng minh hoàn toàn tương tự như ví dụ 0.4

Bài toán 1: Cho trước số nguyên dương $n$. Chứng minh rằng nếu $s$ là tổng nghịch đảo của các số không chứa chữ số $n-1$ trong biểu diễn cơ số $n$ thì $s < +\infty$.

Với bài toán này ta có thể giải quyết bài toán sau:

Bài toán 2: Giả sử $(a_n)$ là dãy tăng gồm các số nguyên dương thỏa mãn $(\frac{a_n}{n})$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng có vô số số hạng thuộc dãy $(a_n)$ có chứa 2005 chữ số 9 liên tiếp trong biểu diễn thập phân.(VN TST 2005)
LỜI GIẢI.
Xét trong cơ số $m = 10^{2005}$ bây giờ ta có dãy $(\frac{a_n}{n})$ bị chặn nên ta sẽ chứng minh rằng tồn tại vô số $n$ sao cho $a_n$ chứa chữ số $m-1$. Thật vậy ta có nếu dãy $a_n$ không chứa số nào có chữ số $m-1$. Khi đó theo bài toán 1 ta có $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a_i} < +\infty$. Nhưng ta lại có dãy số $(a_n/n)$ bị chặn nên ta có tồn tại $C$ sao cho $a_n < nC$ với mọi $n$ . Suy ra $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a_i} > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nC} = +\infty$ (mâu thuẫn).

Vậy ta có tồn tại $n_0$ mà $a_{n_0}$ có chứa chữ số $m-1$. Bây giờ xét dãy $a_{n_0+1}, a_{n_0+2} \ldots, a_k, \ldots$ vẫn có tính chất đề bài nên ta có có vô số $n$ mà $a_n$ chứa chữ số $m-1$ trong cơ số $m$. Hay có vô số $n$ mà $a_n$ chứa 2005 chữ số 9 trong biểu diễn thập phân.
Như vậy qua bài toán trên ta có nhận xét là : Nếu dãy số nguyên dương $a_1 < a_2 < \ldots$ thỏa mãn không có $n$ nào mà $a_n$ chứa $k$ chữ số 9 liên tiếp thì $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{x_i} < +\infty$. Bây giờ kí hiệu $S_j$ là tổng các nghịch đảo của các số $n$ mà $n$ có $j$ chữ số và $n$ không chứa chữ số $k$ chữ số 9 liên tiếp trong biểu diễn thập phân.

Giả sử $M$ là một tổ hợp gồm $k$ chữ số bất kì trong hệ thập phân (với chũ số đầu tiên khác 0). Khi đó số các chữ số $n$ mà $n$ có $j$ chữ số và không chứa số $M$ bằng số các số $n$ mà $n$ có $j$ chữ số và không chứa $k$ chữ số 9 liên tiếp. Như vậy nếu đặt $t_j$ là tổng các các số $n$ mà $n$ có $j$ chữ số trong hệ thập phân và $n$ không chứa $M$. Khi đó ta có $t_j \leq 10s_j$. Như vậy với $t$ là tổng nghịch đảo của các số nguyên dương mà không chứa $M$ trong biểu diễn thập phân thì ta có $t = t_1 + t_2 + \ldots \leq 10(s_1 + s_2 + \ldots) < +\infty$.
Như vậy ta đã giải quyết được bài toán:

Bài toán 3: Giả sử $M$ là một tổ hợp các các chữ số (với chữ số đầu khác 0) . Khi đó nêu $t$ tổng nghịch đảo của các các số không chứa $M$ trong biểu diễn thập phân thì $t < +\infty$

Với bài toán 3 thì ta thu được hệ quả là bài toán 4 sau đây ( Là bài toán tổng quát của bài thi VN TST 2005 ở trên)

Bài toán 4: Giả sử $M$ là một tổ hợp các chữ số ( Với chữ số đầu khác 0). Giả sử dãy số $(a_n)$ là dãy số nguyên dương tăng và dãy $(a_n/n)$ là dãy bị chặn khi đó có vô số số hạng của dãy có chứa $M$ trong biểu diễn thập phân.

Cuối cùng với cùng phương pháp ta có thể dễ dàng giải quyết được một số bài toán sau:

Bài toán 5: Chứng minh rằng với mọi dãy $x_1, x_2, \ldots x_n$ có tính chất không có số nào bắt đầu bởi số khác trong $n$ số đó thì: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \leq 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/9$.

Bài toán 6: Với $n$ là số nguyên dương. kí hiệu $f(n)$ là số các chữ số 0 trong biểu diễn thập phân của $n$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2} < +\infty \Leftrightarrow a < 91.$$

Bài toán 7: Giả sử $m$ là số dương sao cho với mọi bộ gồm các vectơ có tổng modun bằng 1 thì có một số vectơ có modun của vectơ tổng không nhỏ hơn $m$. Chứng minh rằng: $1/4 \leq m \leq 1/2$