

**CĐ14: PHẦN HÌNH HỌC**

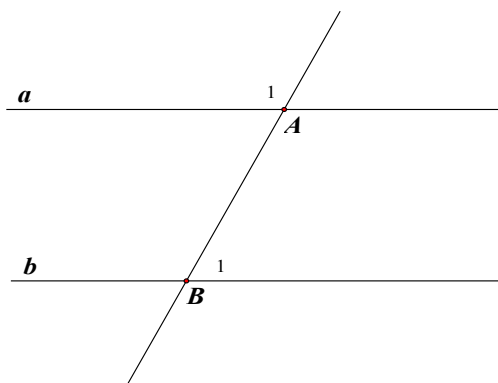
|                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------|
| Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc   |
| Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau |
| Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau                           |
| Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng                           |
| Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác                                  |
| Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc                         |
| Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn                               |
| Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp                            |

**Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc**

**A. Trắc nghiệm**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)**

Cho  $a \parallel b$  và  $\angle A_1 = 2\angle B_1$  (hình vẽ bên). Số đo  $\angle B_1$  bằng



A.  $30^\circ$ .

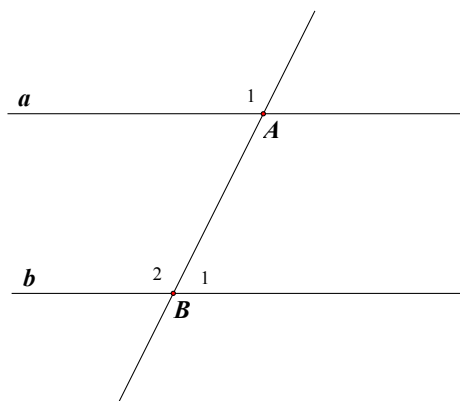
B.  $60^\circ$ .

C.  $90^\circ$ .

D.  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

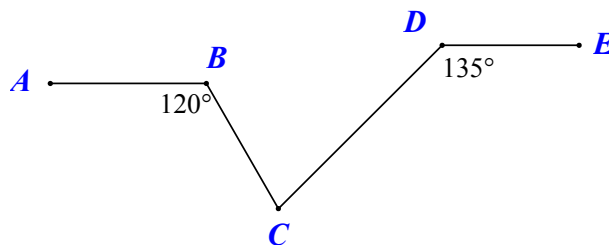


Vì  $a \parallel b$  nên  $\angle A_1 = \angle B_2$  (đồng vị) và  $\angle A_1 = 2\angle B_1$

Mà  $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 180^\circ$  hay  $\widehat{B_1} + \widehat{A_1} = 180^\circ$  mà  $\widehat{A_1} = 2\widehat{B_1}$  (gt)  
 $\Rightarrow \widehat{B_1} + 2\widehat{B_1} = 180^\circ \Rightarrow 3\widehat{B_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B_1} = 60^\circ$

**Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)**

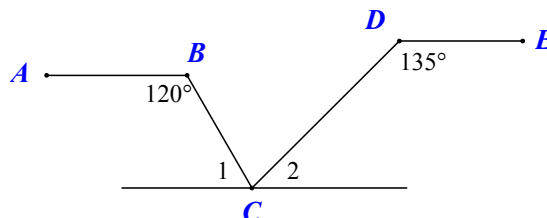
Cho hình vẽ  $AB \parallel DE$ . Số đo  $\widehat{BCD}$  bằng



- A.  $75^\circ$  . B.  $85^\circ$  . C.  $45^\circ$  . D.  $65^\circ$  .

**Lời giải**

**Chọn A**



Kẻ đường thẳng qua  $C$  và song song với  $AB$ .

Mà  $AB \parallel DE$  nên đường thẳng đó cũng song song với  $DE$ .

Do đó  $\widehat{C_1} + \widehat{ABC} = 180^\circ$  và  $\widehat{C_2} + \widehat{CDE} = 180^\circ$  (hai góc trong cùng phía)

$\Rightarrow \widehat{C_1} = 60^\circ, \widehat{C_2} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$

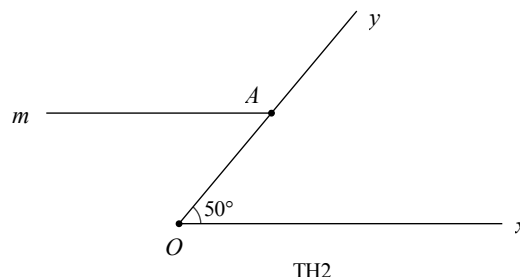
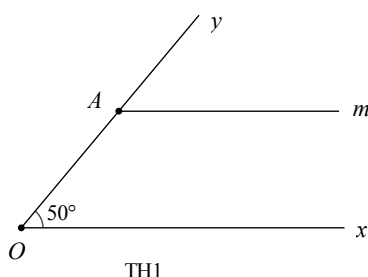
**Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022; huyện Tân An 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)**

Cho  $\widehat{xOy} = 50^\circ$ , điểm  $A$  nằm trên  $Oy$ . Qua  $A$  vẽ tia  $Am$ . Để  $Am$  song song với  $Ox$  thì số đo của  $\widehat{\theta Am}$  là:

- A.  $50^\circ$  . B.  $130^\circ$  . C.  $50^\circ$  và  $130^\circ$  . D.  $80^\circ$  .

**Lời giải**

**Chọn C**



TH1: Vì  $Am \parallel Ox$

nên  $\widehat{AOx} + \widehat{OAm} = 180^\circ$  (hai góc trong cùng phía)

Thay  $\widehat{AOx} = 50^\circ$ , ta có :

$$50^\circ + \widehat{OAm} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OAm} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

TH2: Vì  $Am \parallel Ox$

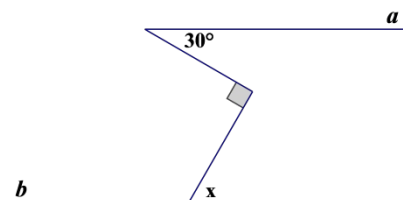
nên  $\widehat{AOx} = \widehat{OAm}$  (hai góc so le trong)

mà  $\widehat{AOx} = 50^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{OAm} = 50^\circ$$

**Câu 4. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)**

Cho  $a \parallel b$  như hình vẽ bên. Số đo góc  $x$  bằng:



A.  $150^\circ$ .

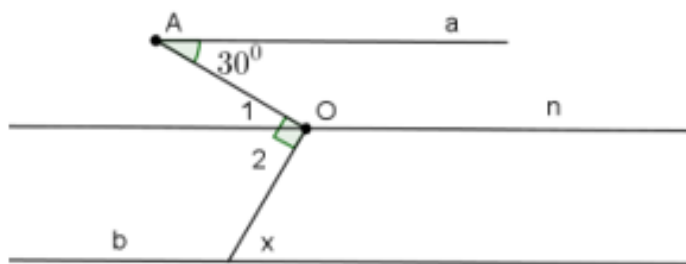
B.  $90^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Kẻ  $n \parallel a \parallel b$

Vì  $n \parallel a \Rightarrow \widehat{\theta_1} = \widehat{A}$  (2 góc so le trong)

$$\Rightarrow \widehat{\theta_1} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{\theta_2} = \widehat{\theta} - 30^\circ = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Vì  $n \parallel b \Rightarrow x = \widehat{\theta_2}$  (2 góc so le trong)

$$\Rightarrow x = \widehat{\theta_2} = 60^\circ$$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 – 2022)**

Cho  $\triangle ABC$  có  $\angle A = 40^\circ$ ;  $\angle B - \angle C = 20^\circ$  trên tia đối của  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = AB$ . Số đo  $\angle BE$  là:

A.  $80^\circ$ .

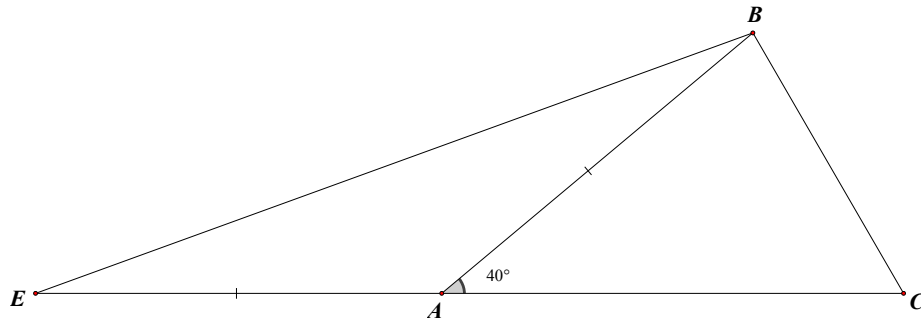
B.  $100^\circ$ .

C.  $90^\circ$ .

D.  $120^\circ$ .

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác  $ABC$  có  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (định lý tổng ba góc trong tam giác) và  $\angle A = 40^\circ$ ;  $\angle B - \angle C = 20^\circ$  Suy ra  $\angle B + \angle C = 140^\circ$  nên  $\angle B = \frac{140^\circ + 20^\circ}{2} = 80^\circ$ ;  $\angle C = 60^\circ$

Xét  $\triangle AEB$  cân tại  $A$  (do  $AE = AB$  (gt) nên  $\angle AEB = \angle ABE$  (tính chất của tam giác cân) (1)

Lại có:  $\angle BAC$  là góc ngoài tam giác  $AEB$   $\angle BAC = \angle AEB + \angle ABE$  (2)

$$\angle ABE = \frac{\angle BAC}{2} = 20^\circ$$

Từ (1) và (2) suy ra

Do đó  $\angle BEC = \angle BAE + \angle ABE = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$

Câu 6. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm 2 điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $BD = BA$ ;  $CE = CA$ . Khi đó  $\angle DAE$  có số đo là.

A.  $20^\circ$ .

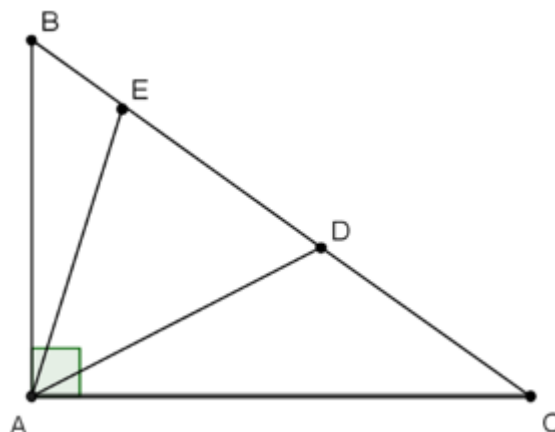
B.  $30^\circ$ .

C.  $45^\circ$ .

D.  $60^\circ$ .

Lời giải

Chọn C



Xét  $\triangle ACE$  cân tại  $C \Rightarrow \angle CAE = \angle EAC$

$\triangle BAD$  cân tại  $B \Rightarrow \angle BAD = \angle BDA$

$$\Rightarrow \angle BAD + \angle CAE = \angle AED + \angle ADE$$

$$\Rightarrow 90^\circ + \angle BAE = 180^\circ - \angle BAE$$

$$\Rightarrow 2\angle BAE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAE = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Vậy  $\angle DAE = 45^\circ$

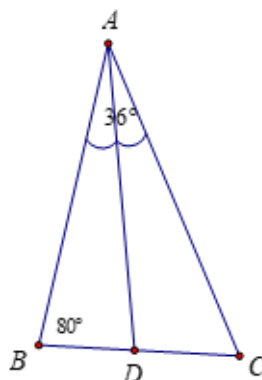
**Câu 7. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle B = 80^\circ$ ,  $\angle A = 36^\circ$ . Tia phân giác  $\angle BAC$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Số đo  $\angle ADC$  là

A.  $90^\circ$  . B.  $88^\circ$  . C.  $82^\circ$  . D.  $98^\circ$  .

**Lời giải**

**Chọn D**



Vì  $AD$  là phân giác của  $\angle BAC$  nên  $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$

Vì  $\angle ADC$  là góc ngoài của  $\triangle ABD$  nên  $\angle ADC = \angle B + \angle BAD = 80^\circ + 18^\circ = 98^\circ$

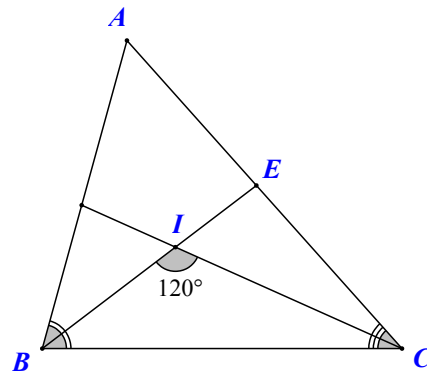
**Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$ . Hai tia phân giác của  $\angle B$  và  $\angle C$  cắt nhau tại  $I$ . Nếu  $\angle BIC = 120^\circ$  thì số đo  $\angle BAC$  bằng.

A.  $120^\circ$  . B.  $100^\circ$  . C.  $90^\circ$  . D.  $60^\circ$  .

**Lời giải**

**Chọn D**



Trong tam giác  $BIC$  có  $\angle BIC + \angle IBC + \angle ICB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

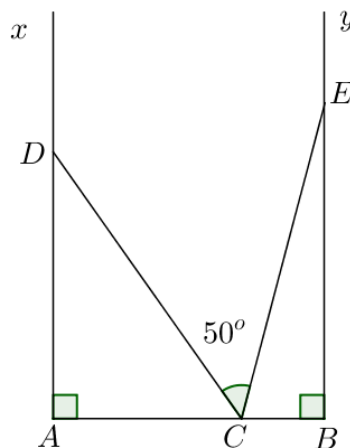
$$\Rightarrow 2\angle IBC + 2\angle ICB = 2 \cdot 60^\circ$$

Mà  $\angle ABC = 2\angle IBC$  và  $\angle ACB = 2\angle ICB$

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ \Rightarrow \angle BAC = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = 60^\circ$$

**Câu 9. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)**

Cho hình vẽ. Biết hai tia  $Ax, By$  vuông góc với  $AB$ . Trên hai tia  $Ax, By$  và đoạn  $AB$  lần lượt lấy các điểm  $D, E, C$  sao cho  $\angle DCE = 50^\circ$ .



Khi đó

A.  $\angle ADC + \angle EEB = 90^\circ$

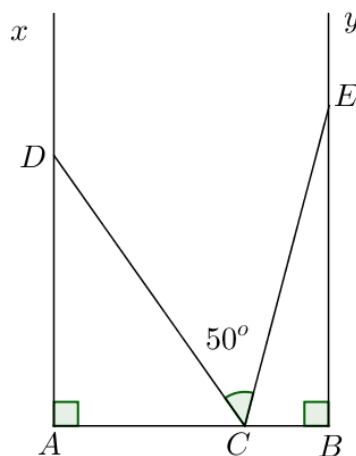
B.  $\angle ADC + \angle EEB = 50^\circ$

C.  $\angle ADC + \angle EEB = 100^\circ$

D.  $\angle ADC + \angle EEB = 80^\circ$

**Lời giải**

**Chọn B**



Xét  $\triangle ACD$  vuông tại  $A$  có  $\angle ADC + \angle ACD = 90^\circ$  (hai góc nhọn phụ nhau)

Xét  $\triangle BCE$  vuông tại  $B$  có  $\angle EBC + \angle BCE = 90^\circ$  (hai góc nhọn phụ nhau)

$$\Rightarrow \angle ADC + \angle ACD + \angle EBC + \angle BCE = 180^\circ \Rightarrow (\angle ADC + \angle EBC) + (\angle ACD + \angle BCE) = 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \angle ACD + \angle BCE + \angle BCE = 180^\circ \Rightarrow \angle ACD + 50^\circ + \angle BCE = 180^\circ \Rightarrow \angle ACD + \angle BCE = 130^\circ \quad (2)$$

$$\Rightarrow (\angle ADC + \angle EBC) + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle ADC + \angle EBC = 50^\circ$$

Từ (1) và (2)

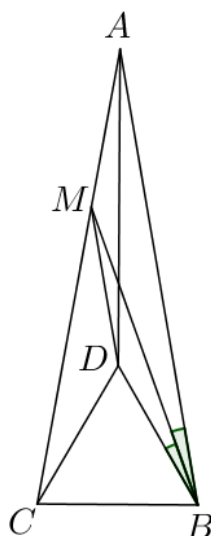
**Câu 10. (HSG 7 huyện Tam Nông, Phú Thọ 2021 - 2022)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $\angle A = 20^\circ$ . Vẽ tam giác đều  $DBC$  ( $D$  nằm trong tam giác  $ABC$ ). Tia phân giác  $\angle ABD$  cắt  $AC$  tại  $M$ . Số đo góc  $BDM$  là

- A.  $140^\circ$  .      B.  $150^\circ$  .      C.  $160^\circ$  .      D.  $170^\circ$  .

**Lời giải**

**Chọn C**



$$\triangle ABC \text{ cân tại } A, \angle A = 20^\circ \text{ suy ra } \angle ABC = \angle BCA = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\text{Mà } \triangle DBC \text{ đều suy ra } \angle DBC = \angle BCD = 60^\circ \Rightarrow \angle ABD = \angle BCA = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

Có  $BM$  là tia phân giác của  $\angle ABD$  suy ra  $\angle ABM = \angle MBD = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

+) Xét  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACD$  có  
 $BD = DC$  (cạnh  $\triangle DBC$  đều)  
 Cạnh  $DA$  chung  
 $AB = AC$  (vì tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ )

Suy ra  $\triangle ABD = \triangle ACD$  (c.c.c)  $\Rightarrow \angle BDA = \angle CDA, \angle BAD = \angle CAD$  (hai góc tương ứng)

+)  $\angle BAD = \angle CAD$  mà  $\angle BAC = 20^\circ \Rightarrow \angle BAD = \angle CAD = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

+) có  $\angle BDA + \angle CDA + \angle BDC = 360^\circ \Rightarrow \angle BDA + \angle CDA + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow \angle BDA + \angle CDA = 300^\circ$   
 mà  $\angle BDA = \angle CDA$  suy ra  $\angle BDA = \angle CDA = 150^\circ$  (1)

+) Xét  $\triangle AMB$  và  $\triangle MAD$  có  
 $\angle BAM = \angle MAD (= 10^\circ)$   
 Cạnh  $AB$  chung  
 $\angle ABM = \angle ADM (= 10^\circ)$

Suy ra  $\triangle AMB = \triangle MAD$  (g.c.g)  $\Rightarrow AM = MD; MB = AD$  (hai cạnh tương ứng)

+) Xét  $\triangle DMB$  và  $\triangle DMA$  có  
 $MB = AD$   
 $\angle BDM = \angle MAD (= 10^\circ)$   
 $DB = AM$

Suy ra  $\triangle DMB = \triangle DMA$  (g.c.g)  
 $\Rightarrow \angle ADM = \angle BMD$  (hai góc tương ứng) (2)

+) Xét  $\triangle DMB$  có  $\angle BDM + \angle MBD + \angle BMD = 180^\circ \Rightarrow \angle BDA + \angle ADM + 10^\circ + \angle BMD = 180^\circ$  (3)  
 $\Rightarrow 150^\circ + \angle ADM + 10^\circ + \angle ADM = 180^\circ \Rightarrow \angle ADM = 10^\circ$   
 $\Rightarrow \angle BDM = \angle BDA + \angle ADM = 150^\circ + 10^\circ = 160^\circ$

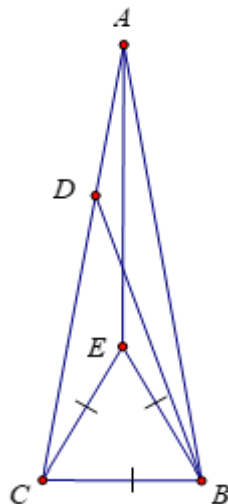
**Câu 11. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 – 2019)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A, \angle A = 20^\circ$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $AD = BC$ . Số đo của góc  $BDC$  là:

- A.  $50^\circ$  .                      B.  $70^\circ$  .                      C.  $30^\circ$  .                      D.  $80^\circ$  .

**Lời giải**

**Chọn C**



Vẽ tam giác đều  $EBC$ . Ta có:  $BC = CE = EB$

Mà  $AD = BC$  (gt)

Nên  $AD = BE$ .

Chứng minh  $\triangle AEB = \triangle AEC (c.c.c) \Rightarrow \angle EAB = \angle EAC$ , do đó  $\angle EAB = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

$\triangle ABC$  cân tại A, mà  $\angle A = 20^\circ$  (gt)  $\Rightarrow \angle ABC = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$

$\triangle EBC$  đều nên  $\angle EBC = 60^\circ$ , tia  $BE$  nằm giữa hai tia  $BA, BC \Rightarrow \angle ABE = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Xét  $\triangle ABE$  và  $\triangle BAD$  có  $AB$  cạnh chung;  $\angle ABE = \angle BAD = 20^\circ; BE = AD$

Vậy  $\triangle ABE = \triangle BAD (c.g.g) \Rightarrow \angle BAE = \angle ABD = 10^\circ$

Mà  $\angle BDC = \angle BAD + \angle ABD$  (góc ngoài của  $\triangle ABD$ )

Nên  $\angle BDC = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$ .

**Câu 12. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $\angle A = 20^\circ$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $BD = BC$ . Số đo của góc  $BDC$  là:

A.  $50^\circ$

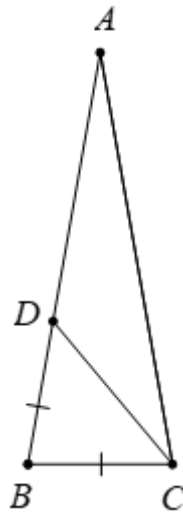
B.  $70^\circ$

C.  $30^\circ$

D.  $80^\circ$

**Lời giải**

**Chọn A**



+) Xét  $\triangle ABC$  có:

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ \quad (\text{tổng ba góc trong một tam giác})$$

$$20^\circ + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 160^\circ$$

mà  $\angle ABC = \angle ACB$  ( $\triangle ABC$  cân tại  $A$ )

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 80^\circ$$

+) Ta có:  $AD = BC$  (gt)

$\Rightarrow \triangle BDC$  cân tại  $B$ .

+) Xét  $\triangle BDC$  có:

$$\angle DBC + \angle BDC + \angle BCD = 180^\circ \quad (\text{tổng ba góc trong một tam giác})$$

$$80^\circ + \angle BDC + \angle BCD = 180^\circ$$

$$\angle BDC + \angle BCD = 100^\circ$$

mà  $\angle BDC = \angle BCD$  ( $\triangle BDC$  cân tại  $B$ )

$$\Rightarrow \angle BDC = \angle BCD = 50^\circ$$

**Câu 13. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle A = 2\angle B + 2\angle C$ . Các phân giác trong hai góc  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $I$ . Số

đo góc  $\angle BIC$  là

**A.**  $150^\circ$ .

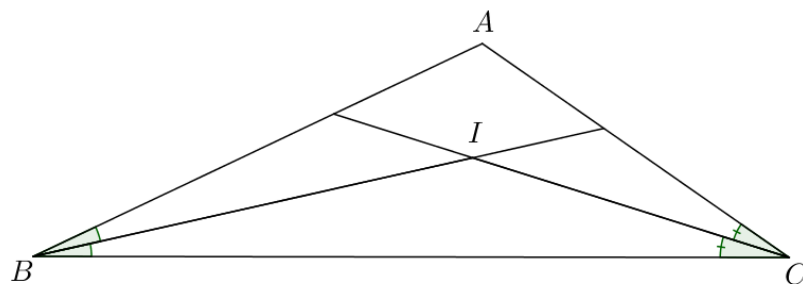
**B.**  $155^\circ$ .

**C.**  $160^\circ$ .

**D.**  $120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Xét  $\triangle ABC$  có  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (ĐL tổng ba góc của một tam giác)

$$\Rightarrow \angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$$

$$180^\circ - (\angle B + \angle C) = 2(\angle B + \angle C) \Rightarrow \angle B + \angle C = 60^\circ$$

Ta có

Các phân giác trong hai góc  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $I$  nên ta có  $\angle IBC = \frac{\angle B}{2}$ ;  $\angle ICB = \frac{\angle C}{2}$  (t/c đường phân giác của một góc)

$$\Rightarrow \angle IBC + \angle ICB = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Xét  $\triangle IBC$  có  $\angle IBC + \angle ICB + \angle BIC = 180^\circ$  (ĐL tổng ba góc của một tam giác)

$$\Rightarrow 30^\circ + \angle BIC = 180^\circ \Rightarrow \angle BIC = 150^\circ$$

**Câu 14. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ ,  $AB = 6$ ,  $\angle A = 30^\circ$ . Phân giác góc  $C$  cắt  $AB$  tại  $D$ . Khi đó độ dài đoạn thẳng  $BD$  và  $AD$  lần lượt là:

A. 2; 4

B. 3; 3

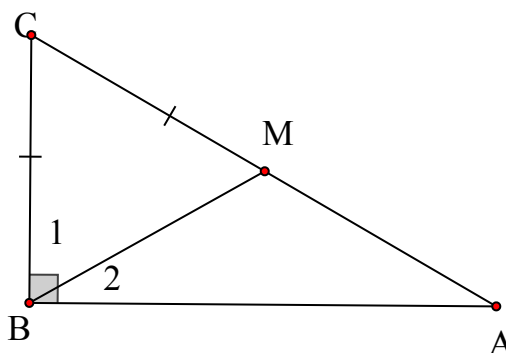
C. 4; 2

D. 1; 5

**Lời giải**

**Chọn A**

\* Chứng minh nhận xét: Nếu một tam giác vuông có một góc nhọn bằng  $30^\circ$  thì cạnh góc vuông đối diện với nó bằng nửa cạnh huyền.



Xét  $\triangle ABC$ , ta có:  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$

Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $CM = BC$

Ta có:  $\triangle BCM$  cân tại  $C$ .

Mà  $\angle C + \angle A = 90^\circ$  (tính chất tam giác vuông)

Suy ra:  $\angle C = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Suy ra:  $\triangle BCM$  đều

Suy ra:  $BC = CM = BM$  và  $\angle B_1 = 60^\circ$

Ta có:  $\angle B_1 + \angle B_2 = \angle ABC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle B_2 = 90^\circ - \angle B_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Trong  $\triangle BAM$ , ta có:  $\angle B_2 = \angle A = 30^\circ$

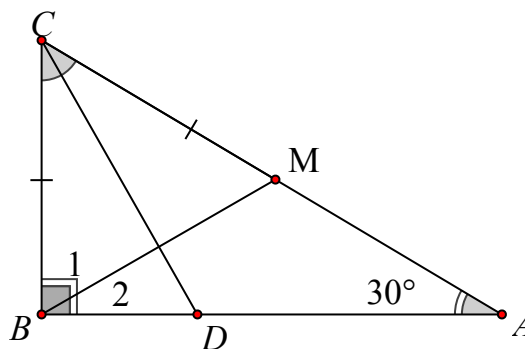
Suy ra:  $\triangle BAM$  cân tại  $M$  (vì có 2 góc kề cạnh  $AB$  bằng nhau)

Hay  $AM = MB$

Suy ra:  $BC = CM = AM$  mà  $CM + MA = AC \Rightarrow BC = \frac{1}{2} AC$ .

Vậy: **Nếu một tam giác vuông có một góc nhọn bằng  $30^\circ$  thì cạnh góc vuông đối diện với nó bằng nửa cạnh huyền.**

Áp dụng vào bài tập



Ta có:  $\angle BCD = \angle DCA = \frac{\angle BCD}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$  (Vì  $CD$  là tia phân giác của  $\angle BCD$ )

Xét  $\triangle DAC$  có:  $\angle A = \angle DCA = 30^\circ$

$\Rightarrow \triangle DAC$  cân tại  $D \Rightarrow DC = DA$

Xét  $\triangle BDC$  vuông tại  $B$ , có  $\angle BCD = 30^\circ$

$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} DC$

$\Rightarrow BD + DA = \frac{DC}{2} + DC = \frac{3DC}{2} = AB$

$\Rightarrow 3DC = 2AB \Rightarrow DC = \frac{2AB}{3} = \frac{2.6}{3} = 4$

$$\Rightarrow DC = DA = 4$$

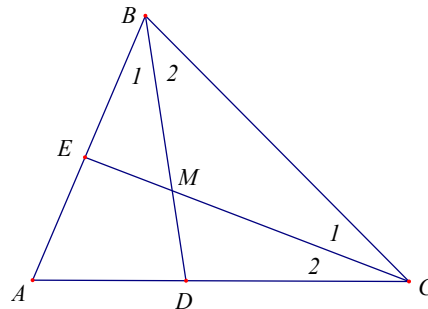
$$\Rightarrow BD = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

## B. Tự luận

### Câu 1. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022 - 2023)

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle BAC = 60^\circ$ . Tia phân giác của góc  $B$  cắt  $AC$  ở  $D$ . Tia phân giác của góc  $C$  cắt  $AB$  ở  $E$ ;  $BD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $M$ . Tính  $\angle EMD$ ?

**Lời giải**



Xét  $\triangle ABC$  có:  $\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$

$$\Rightarrow \angle B_2 + \angle C_1 = 120^\circ : 2 = 60^\circ$$

Xét  $\triangle BMC$  có  $\angle B_2 + \angle C_1 + \angle BMD = 180^\circ \Rightarrow \angle BMD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

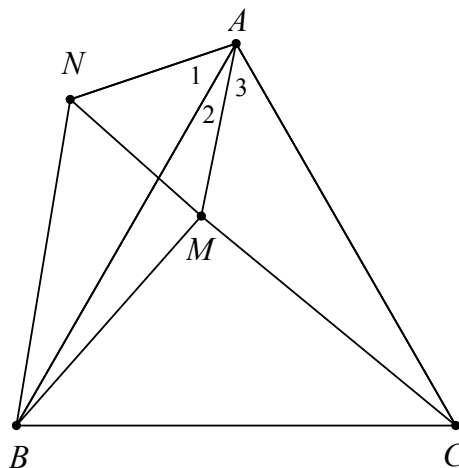
$$\Rightarrow \angle EMD = \angle BMD = 120^\circ \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

Vậy  $\angle EDM = 120^\circ$

### Câu 2. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2017 - 2018)

Cho tam giác đều  $ABC$ .  $M$  là một điểm nằm trong tam giác sao cho  $MA : MB : MC = 3 : 4 : 5$ . Tính số đo góc  $AMB$ .

**Lời giải**



Do  $MA : MB : MC = 3 : 4 : 5$

$$\frac{MA}{3} = \frac{MB}{4} = \frac{MC}{5} = a$$

Đặt  $\Rightarrow MA = 3a, MB = 4a, MC = 5a$

Trên nửa mặt phẳng bờ  $AC$  dựng tam giác đều  $AMN$ .

$\Rightarrow AM = AN = MN = 3a$  và  $\angle AMN = 60^\circ$

Xét  $\triangle ABN$  và  $\triangle ACM$  có:

$AB = AC$  (gt)

$AN = AM (=3a)$

$\angle A_1 = \angle A_3 (=60^\circ - \angle A_2)$

$\Rightarrow \triangle ABN = \triangle ACM$  (c - g - c)

$\Rightarrow BN = CM = 5a$

Xét  $\triangle BMN$  có:  $BN^2 = (5a)^2 = 25a^2$

$BM^2 + MN^2 = (4a)^2 + (3a)^2 = 25a^2$

$\Rightarrow BN^2 = BM^2 + MN^2$

$\Rightarrow \triangle BMN$  vuông tại  $M$  (định lý Pytago đảo)

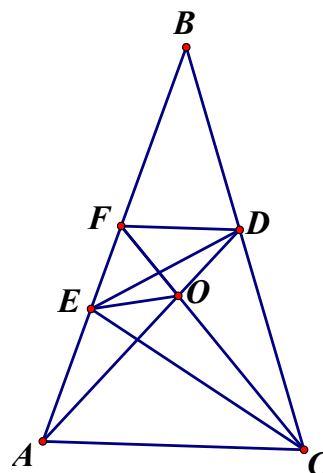
$\Rightarrow \angle NMB = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMN + \angle NMB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

**Câu 3. (HSG 7 huyện Như Xuân, 2018 - 2019)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle BAC = \angle BCA = 80^\circ$ . Ở miền trong của tam giác vẽ hai tia  $Ax$  và  $Cy$  cắt  $BC, BA$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ . Cho biết  $\angle CAD = 60^\circ, \angle ECA = 50^\circ$ . Tính số đo  $\angle ADE$ .

**Lời giải**



Kẻ tia  $CF$  sao cho  $\angle ACF = 60^\circ$  ( $F \in AB$ ), Tia  $CF$  cắt  $AD$  tại  $O$

$$\Rightarrow \Delta AOC; \Delta FOD \text{ đều} \Rightarrow OA = OC = AC; OF = OD = FD$$

$$\Delta AEC \text{ có: } \angle EAC = 80^\circ, \angle ACE = 50^\circ \Rightarrow \angle ECA = 50^\circ \Rightarrow \Delta AEC \text{ cân tại } A$$

$$\text{Có } \angle EAO = 20^\circ \Rightarrow \angle AEO = \angle OEA = 80^\circ \Rightarrow \angle EOF = 40^\circ$$

$$\text{Suy ra } \angle AFC = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ = \angle EOF$$

$$\Rightarrow \Delta EOF \text{ cân tại } E \Rightarrow EO = EF$$

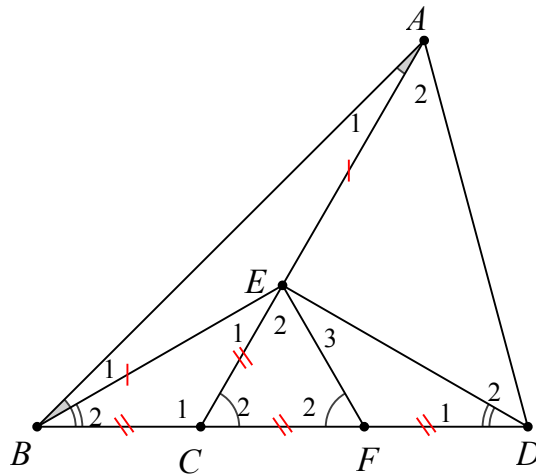
$$\Rightarrow \Delta FDE = \Delta ODE (c.c.c) \Rightarrow \angle ODE = \angle FDE = \frac{1}{2} \angle FDA = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Vậy } \angle ADE = 30^\circ$$

**Câu 4.** (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023; huyện Phù Ninh 2018 - 2019; huyện Nam Sách 2017 - 2018; trường Tân Lạc; huyện Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 120^\circ$ . Trên tia đối của tia  $CB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = 2CB$ . Tính  $\angle ADB$ ?

**Lời giải**



Trên  $CA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = BE \Rightarrow \Delta EBA$  cân tại  $E$

$$\Rightarrow \angle B_1 = \angle A_1 = 15^\circ \Rightarrow \angle B_2 = 30^\circ$$

Ta có  $\angle E_1 = \angle A_1 + \angle B_2 = 30^\circ$  (tính chất góc ngoài của tam giác)

Do đó  $\Delta CBE$  cân tại  $C \Rightarrow CB = CE$

Gọi  $F$  là trung điểm  $CD \Rightarrow CB = CE = CF = FD$

Tam giác  $CEF$  cân tại  $C$  có  $\angle E_2 = 180^\circ - \angle E_1 = 60^\circ$  nên  $CEF$  là tam giác đều.

$$\Rightarrow CE = CF = FD = EF \Rightarrow \Delta EDF \text{ cân tại } F$$

$$\angle D_1 = \angle E_3 = \frac{\angle E_2}{2} = 30^\circ$$

Suy ra

Xét tam giác  $CDE$  ta có:  $\angle CED = \angle E_2 + \angle E_3 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$  (1)

Ta có:  $\angle D_1 = \angle B_1 \Rightarrow \triangle EBD$  cân tại  $E \Rightarrow EB = ED \Rightarrow EA = ED (=EB)$  (2)

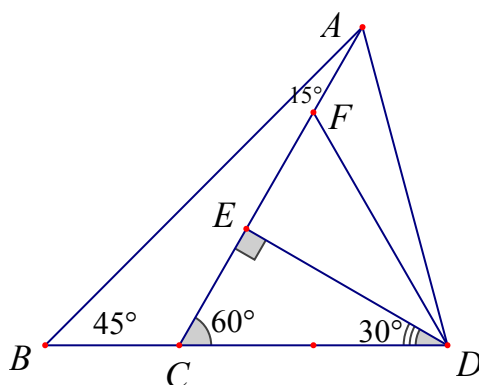
Từ (1) và (2) suy ra  $\triangle EDA$  vuông cân tại  $E \Rightarrow \angle D_2 = 45^\circ$

Vậy  $\angle ADB = \angle D_1 + \angle D_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Đông Hưng; huyện Vũ Thư 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle BAC = 15^\circ$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$ , trên tia đối của tia  $CB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = 2CB$ . Tính số đo  $\angle ADC$ .

**Lời giải**



Kẻ  $DE \perp CA$ .

Xét  $\triangle ABC$ , có  $\angle ACB = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle ACD = 60^\circ$  hay  $\angle ECD = 60^\circ$ .

Xét  $\triangle CED$  có  $\angle CED = 90^\circ$ ,  $\angle ECD = 60^\circ \Rightarrow \angle EDC = 30^\circ$  nên  $\triangle CED$  là nửa tam giác đều.

Trên tia đối của tia  $EC$  lấy điểm  $F$  sao cho  $EC = EF$ .

$\triangle DCF$  có đường cao  $DE$  đồng thời là trung tuyến và có  $\angle ECD = 60^\circ$  nên là tam giác đều.

$\Rightarrow CE = \frac{1}{2}CD \Rightarrow CE = CB \Rightarrow \triangle EBC$  cân tại  $C$

$\Rightarrow \angle BEC = \angle ECB = 30^\circ = \angle EDC \Rightarrow \triangle EBD$  cân tại  $E$ .

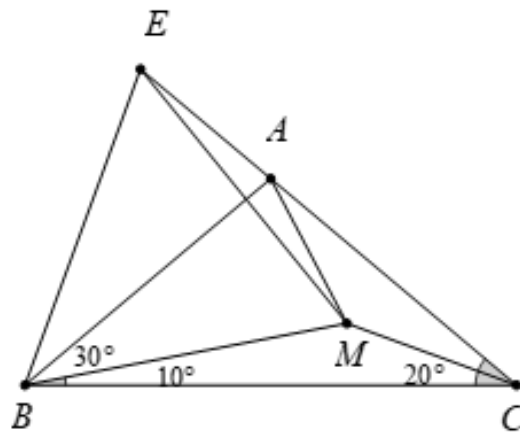
$\Rightarrow \angle EBA = 15^\circ \Rightarrow \triangle BEA$  cân tại  $E \Rightarrow EA = EB = ED \Rightarrow \triangle AED$  vuông cân  $\Rightarrow \angle ADE = 45^\circ$

Vậy  $\angle ADB = \angle ADE + \angle EDB = 75^\circ$

**Câu 6. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2022 - 2023; trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018; trường Nguyễn Du, huyện Nga Sơn 2016 - 2017)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = AC$ ,  $\angle A = 100^\circ$ . Điểm  $M$  nằm trong tam giác  $ABC$  sao cho  $\angle MBC = 10^\circ$ ,  $\angle MCB = 20^\circ$ . Tính số đo góc  $\angle AMB$ .

**Lời giải**



+) Ta có tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  và  $\angle A = 100^\circ$   
 $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$

Trên tia  $CA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $CE = CB \Rightarrow \triangle BCE$  cân tại  $C \Rightarrow \angle BEC = \angle EBC = 70^\circ$

+) Xét  $\triangle MCB$  và  $\triangle MCE$  có:

$MC$  chung

$$\angle MCB = \angle MCE (=20^\circ)$$

$$CB = CE \text{ (cách lấy điểm } E \text{)}$$

Suy ra  $\triangle MCB = \triangle MCE$  (c - g - c)

$$\Rightarrow \angle MBC = \angle MEC = 10^\circ \Rightarrow \angle MBE = \angle MEB = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle MEB \text{ đều} \Rightarrow BM = BE$$

$$\Rightarrow \text{Ta có } \angle MBA = \angle CBA - \angle CBM = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \angle ABE = \angle MBE - \angle MBA = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Suy ra } \angle ABE = \angle ABM (=30^\circ)$$

Suy ra

+) Xét  $\triangle MAB$  và  $\triangle EAB$  có:

$AB$  chung

$$\angle MBA = \angle EBA (=30^\circ)$$

$$BM = BE \text{ (cmt)}$$

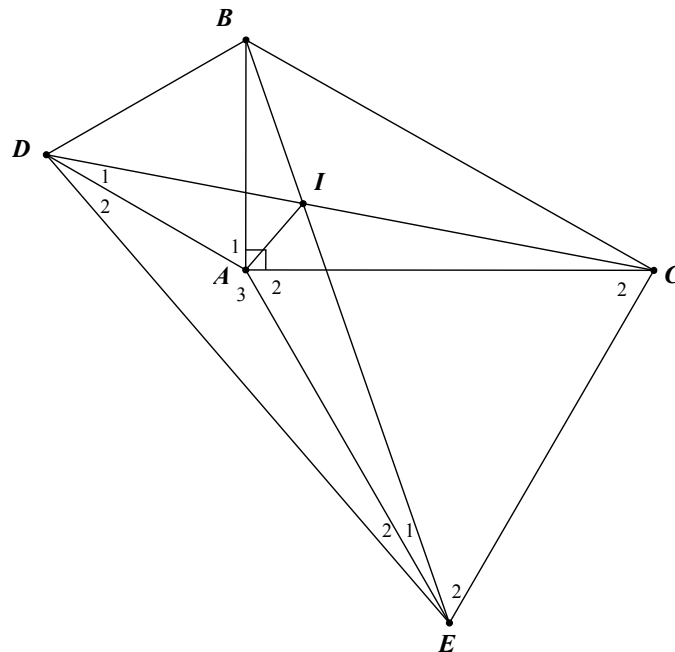
Suy ra  $\triangle MAB = \triangle EAB$  (c - g - c)

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AEB = 70^\circ$$

**Câu 7. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017- 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Vẽ về phía ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $BE$  và  $CD$ . Chứng minh rằng  $\angle EIC = 60^\circ$  và  $IA$  là tia phân giác của  $\angle DIE$ .

**Lời giải**



$$\begin{cases} \angle DAC = \angle A_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \angle BAE = \angle A_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle DAC = \angle BAE$$

Ta có:

Xét  $\triangle DAC$  và  $\triangle BAE$  có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\angle DAC = \angle BAE \text{ (cmt)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BE = CD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Ta có: } \angle A_3 + \angle A_1 + \angle BAC + \angle A_2 = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle A_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle A_3 = 150^\circ = \angle DAC$$

Xét  $\triangle DAE$  và  $\triangle BAE$  có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\angle A_3 = \angle DAC \text{ (cmt)}$$

$AE$  chung

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = BE$$

Vậy  $\triangle BDE$  cân tại  $E$

Ta có:  $\triangle DAC = \triangle BAE$  (cmt)

$$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_1 \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Lại có:  $\hat{F}_1 + \hat{E}_2 + \hat{FCE} = 180^\circ$  (tổng 3 góc trong  $\triangle ICE$ )

$$\Leftrightarrow \hat{F}_1 + (\hat{AEC} - \hat{E}_1) + (\hat{E}_1 + \hat{E}_2) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{F}_1 + 60^\circ - \hat{E}_1 + \hat{E}_1 + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{F}_1 + 120^\circ = 180^\circ \quad (\hat{E}_1 = \hat{E}_1)$$

$$\Leftrightarrow \hat{F}_1 = 60^\circ$$

Vì  $\triangle DAE = \triangle BAE$  (cmt)  $\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2$  (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow EA$  là tia phân giác của  $\hat{DEI}$  (1)

Vì  $\begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$  (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow DA$  là tia phân giác của  $\hat{EDC}$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow A$  là giao điểm của 2 tia phân giác trong  $\triangle DIE$

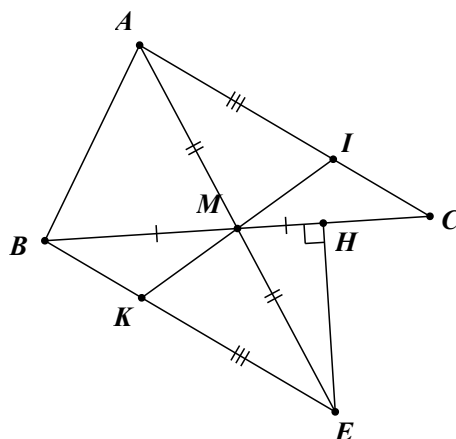
$\Rightarrow IA$  là đường phân giác thứ 3 trong  $\triangle DIE$

Vậy  $IA$  là tia phân giác của  $\hat{DIE}$ .

**Câu 8. (HSG 7 Huyện 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Trên tia đối của tia  $MA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $ME = MA$ . Gọi  $I$  là một điểm trên  $AC$ ,  $K$  là một điểm trên  $EB$  sao cho  $AI = EK$ . Từ  $E$  kẻ  $EH \perp BC$  ( $H \in BC$ ). Biết  $\hat{HBE} = 50^\circ$ ;  $\hat{MEB} = 25^\circ$ . Tính  $\hat{HEM}$  và  $\hat{BME}$ .

**Lời giải**



Xét  $\triangle AMC$  và  $\triangle EMB$  có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\angle AMC = \angle EMB \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

$$\text{Nên } \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AC = EB$$

Vì  $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$ , 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng  $AC, EB$  cắt đường thẳng  $AE$ )

$$\Rightarrow AC \parallel BE$$

Xét  $\triangle AMI$  và  $\triangle EMK$  có:  $AM = EM$  (gt)

$$\angle MAI = \angle MEK (\triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle AMI = \angle EMK$$

$$\text{Mà } \angle AMI + \angle IME = 180^\circ \text{ (Kề bù)}$$

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ \Rightarrow \text{ba điểm } I, M, K \text{ thẳng hàng.}$$

Trong tam giác vuông  $BHE$  ( $\angle H = 90^\circ$ ) có  $\angle HBE = 50^\circ \Rightarrow \angle HEB = 40^\circ$

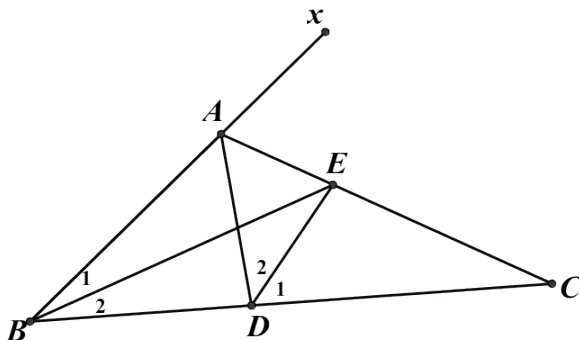
$$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$\angle BME$  là góc ngoài tại đỉnh  $M$  của  $\triangle HEM$  nên  $\angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$   
(định lý góc ngoài của tam giác)

**Câu 9. (HSG 7 trường THCS Hiệp Thành 2016 - 2017)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle A = 120^\circ$ . Các đường phân giác  $AD$  và  $BE$ , tính số đo của góc  $BED$

**Lời giải**



Gọi  $Ax$  là tia đối của tia  $AB$  ta có:  $\angle BAD = \angle DAC = 60^\circ$

Xét  $\triangle ABD$  có  $AE$  là tia phân giác góc ngoài của đỉnh  $A$ ;  $BE$  là phân giác của góc  $B$  chúng cắt nhau tại  $E$  nên  $DE$  là phân giác góc ngoài của  $D$ ,

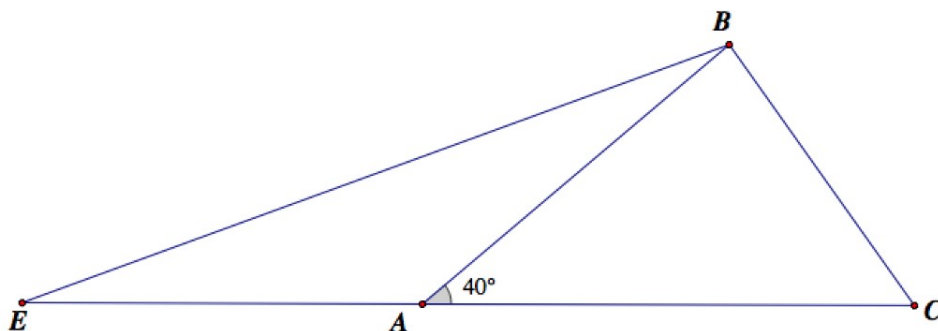
$$\angle BED = \angle D_1 - \angle B_2 = \frac{\angle ADC - \angle ABC}{2} = \frac{\angle BAD}{2} = 30^\circ$$

Xét  $\triangle BED$  có

**Câu 10. (HSG 7 huyện Đức Thọ, 2022 - 2023)**

Tam giác  $ABC$  có  $\angle A = 40^\circ$ ;  $\angle B - \angle C = 30^\circ$ . Trên tia đối của tia  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = AB$ . Tính số đo góc  $CBE$ .

**Lời giải**



Ta có:  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (tổng ba góc của tam giác)

$$\Rightarrow \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$\text{Mà } \angle B - \angle C = 30^\circ \Rightarrow \angle B = 85^\circ, \angle C = 55^\circ$$

Có:  $\angle BAE + \angle BAC = 180^\circ$  (2 góc kề bù)

$$\Rightarrow \angle BAE = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

Xét  $\triangle BAE$  có:  $AE = AB \Rightarrow \triangle BAE$  cân tại  $E$

$$\Rightarrow \angle ABE = \angle AEB = \frac{180^\circ - \angle BAE}{2} = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$$

$$\text{Vậy } \angle CBE = \angle ABC + \angle ABE = 85^\circ + 20^\circ = 105^\circ$$

**Câu 11. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm 2021 - 2022)**

Cho  $\triangle ABC$  có độ dài ba cạnh là  $BC = a, AC = b, AB = c$  thỏa mãn:  $a^2 + b^2 > 5c^2$ .

Chứng minh rằng:  $\angle C < 60^\circ$

**Lời giải**

Trong  $\triangle ABC$ : Giả sử  $c \geq a > 0 \Rightarrow c^2 \geq a^2$

$$a^2 + b^2 > 5c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 > 5a^2 \Rightarrow b^2 > 4a^2 \Rightarrow b > 2a \quad (1)$$

Mà

$$\text{Vì } c^2 \geq a^2 \Rightarrow c^2 + b^2 \geq a^2 + b^2 \text{ mà } a^2 + b^2 > 5c^2$$

$$\Rightarrow c^2 + b^2 > 5c^2 \Rightarrow b^2 \geq 4c^2 \Rightarrow b > 2c \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 2b > 2a + 2c \Rightarrow b > a + c$  (vô lý vì  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác).  
 Vậy  $c < a$

Lập luận tương tự có  $c < b$

Suy ra  $c$  là cạnh ngắn nhất  $\Rightarrow \hat{C}$  nhỏ nhất

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} < \hat{A} \\ \hat{C} < \hat{B} \end{cases} \Rightarrow 3\hat{C} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{C} < 180^\circ \Rightarrow \hat{C} < 60^\circ$$

Vậy  $\hat{C} < 60^\circ$

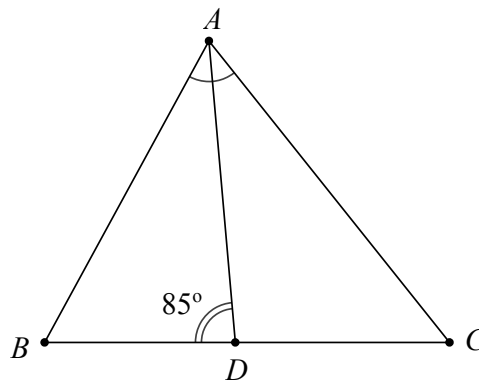
**Câu 12. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)**

Cho  $\triangle ABC$ , tia phân giác của  $\hat{A}$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Biết  $\hat{ADB} = 85^\circ$ .

a) Tính  $\hat{B} - \hat{C}$

b) Tính các góc của  $\triangle ABC$  nếu  $4\hat{B} = 5\hat{C}$

**Lời giải**



a) Xét  $\triangle ADC$  có  $\hat{ADB}$  là góc ngoài tại  $D$

$$\text{Suy ra } \hat{ADB} = \hat{C} + \hat{DAC} = 85^\circ \quad (1)$$

Xét  $\triangle ADB$  có  $\hat{ADC}$  là góc ngoài tại  $D$

$$\text{Suy ra } \hat{ADC} = \hat{B} + \hat{BAD} = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

Mà  $\hat{DAC} = \hat{BAD}$  (vì  $AD$  là tia phân giác của  $\hat{A}$ ), suy ra  $\hat{B} + \hat{DAC} = 95^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $\hat{B} - \hat{C} = 95^\circ - 85^\circ = 10^\circ$

b) Ta có  $4\hat{B} = 5\hat{C}$ , suy ra  $\frac{\hat{B}}{5} = \frac{\hat{C}}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\angle B}{5} = \frac{\angle C}{4} = \frac{\angle B - \angle C}{5 - 4} = 10^\circ \quad (\text{Vì } \angle B - \angle C = 10^\circ)$$

$$\text{Suy ra: } \angle B = 5 \cdot 10^\circ = 50^\circ; \angle C = 4 \cdot 10^\circ = 40^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad (\text{Định lý tổng ba góc trong tam giác})$$

$$\text{Suy ra } \angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$$

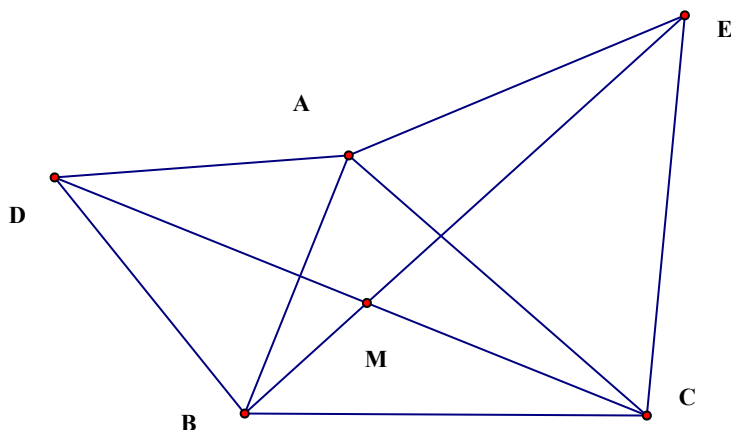
**Câu 13. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)**

Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Vẽ về phía ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ABD$  và  $ACE$ .  
Gọi  $M$  là giao điểm của  $DC$  và  $BE$ .

a) Chứng minh  $\triangle ABE = \triangle ADC$

b) Tính số đo  $\angle BMC$

**Lời giải**



Xét  $\triangle ABE$  và  $\triangle ADC$  có:

$$AD = AB \quad (\triangle ABD \text{ đều})$$

$$AC = AE \quad (\triangle ACE \text{ đều})$$

$$\angle BAE = \angle DAC (=60^\circ + \angle BAC)$$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADC \quad (\text{c.g.c})$$

$$\angle BMC = \angle MCE + \angle CEM = \angle MCA + \angle ACE + \angle CEM$$

$$= \angle AEM + \angle ACE + \angle CEM = \angle AEC + \angle ACE = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

**Câu 14. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)**

Tính số đo bằng độ của góc tạo bởi kim phút và kim giờ của một chiếc đồng hồ vào lúc đồng hồ chỉ 12 giờ 20 phút?

**Lời giải**

Tính từ 12 giờ đúng đến 12 giờ 20 thì kim phút quay được  $120^\circ$ , kim giờ quay được  $10^\circ$ .

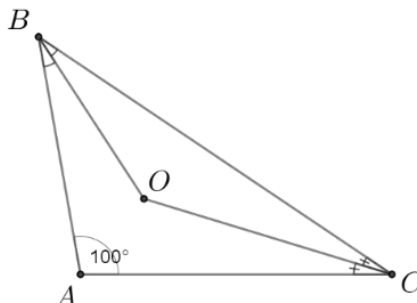
Vậy số đo của góc tạo bởi kim phút và kim giờ của một chiếc đồng hồ chỉ 12 giờ 20 phút là:

$$120^\circ - 10^\circ = 110^\circ$$

**Câu 15. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)**

Tam giác  $ABC$  có số đo góc  $A$  bằng  $100^\circ$ . Tia phân giác của góc  $ABC$  và tia phân giác của góc  $ACB$  cắt nhau tại  $O$ . Tính số đo của góc  $BOC$ ?

**Lời giải**



Ta có  $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$  (tổng ba góc trong một tam giác)

$$100^\circ + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\angle OBC = \frac{\angle ABC}{2}$$

Ta lại có: (vì  $BO$  là tia phân giác của  $\angle ABC$ )

$$\angle BCO = \frac{\angle ACB}{2} \quad (\text{tia } CO \text{ là tia phân giác của } \angle ACB)$$

$$\angle OBC + \angle BCO = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

Suy ra

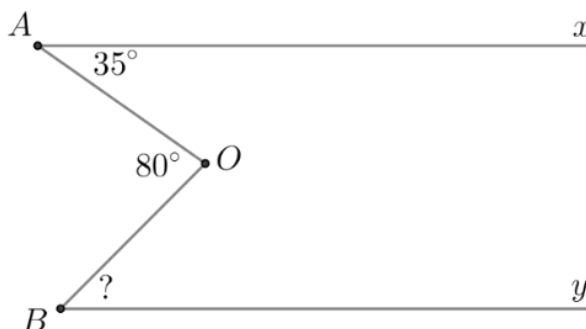
$$\angle OBC + \angle BCO + \angle BOC = 180^\circ \quad (\text{tổng ba góc trong một tam giác})$$

$$\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle BCO) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

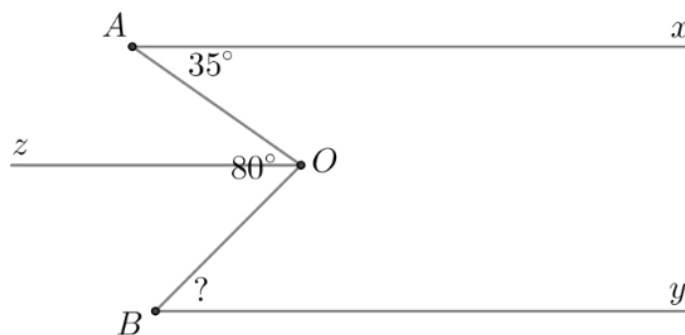
Suy ra

**Câu 16. (HSG 7 huyện Yên Bình 2022 - 2023)**

Trong hình bên, cho  $Ax \parallel By$ ; Biết  $\angle A = 35^\circ$  và  $\angle O = 80^\circ$ . Tính góc  $B$ .



**Lời giải**



Qua  $O$  kẻ  $Oz \parallel Ax$

Vì  $Oz \parallel Ax$  nên  $\angle A = \angle AOz = 35^\circ$  (hai góc so le trong)

Mà  $\angle AOz + \angle BOz = \angle AOB$

$$\Rightarrow 35^\circ + \angle BOz = 80^\circ \Rightarrow \angle BOz = 45^\circ$$

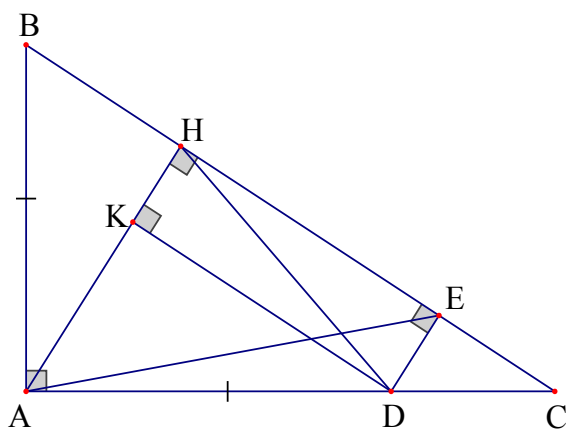
Do  $Oz \parallel Ax$  mà  $Ax \parallel By$  nên  $Oz \parallel By$

$$\Rightarrow \angle B = \angle BOz = 45^\circ \quad (2 \text{ góc so le trong}).$$

**Câu 17. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB < AC$ . Vẽ  $AH \perp BC$  ( $H \in BC$ ), trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $AD = AB$ . Vẽ  $DE \perp BC$ . Tính số đo góc  $AEC$ .

**Lời giải**



Kẻ  $DK \perp AH, (K \in AH)$

Ta có:  $DE \perp BC$ ;  $KH \perp BC \Rightarrow DE \parallel KH$ .

Xét tam giác  $KHD$  và tam giác  $EDH$  có :

$$\left. \begin{array}{l} AD \text{ chung} \\ \angle DHK = \angle EDH (\text{slt}) \\ \angle DKH = \angle HED = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta KHD = \Delta EDH$$

(cạnh huyền- góc nhọn )

Nên  $DK = EH$ .

Vi:  $\angle DAK + \angle HAB = 90^\circ$ ;  $\angle HAB + \angle HBA = 90^\circ \Rightarrow \angle DAK = \angle HBA$

Xét tam giác  $ADK$  và tam giác  $AHB$  có:

$$\left. \begin{array}{l} AD = AB \\ \angle DAK = \angle HBA \text{ (cmt)} \\ \angle DKA = \angle AHB = (90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADK = \triangle BAH$$

(cạnh huyền- góc nhọn)

$$\Rightarrow DK = AH \text{ mà } DK = EH \Rightarrow EH = HA$$

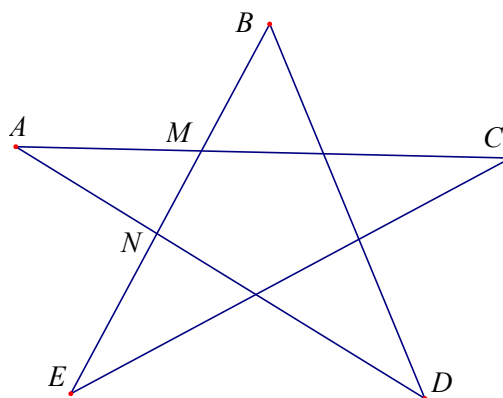
Xét  $\triangle AHE$  có  $\angle H = 90^\circ$ ,  $EH = AH$  nên  $\triangle AHE$  vuông cân tại  $H \Rightarrow \angle AEH = 45^\circ$

Mà  $\angle AEH + \angle EEA = 180^\circ$  (hai góc kề bù) suy ra  $\angle AEC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

**Câu 18. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022-2023)**

Trong hình bên, tính  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ ?

**Lời Giải**



Gọi giao điểm của  $BE$  và  $AC$ ,  $AD$  lần lượt là  $M$ ,  $N$ .

Ta có  $\angle AMN$  là góc ngoài của tam giác  $MCE \Rightarrow \angle AMN = \angle C + \angle E$

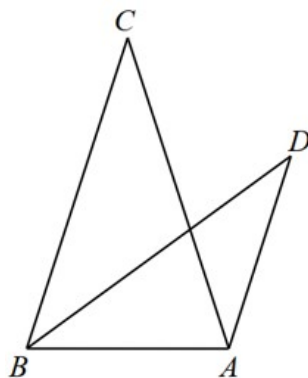
$\angle ANM$  là góc ngoài của tam giác  $BND \Rightarrow \angle ANM = \angle B + \angle D$

Xét  $\triangle AMN$  có  $\angle A + \angle AMN + \angle ANM = 180^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$

Vậy  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$

**Câu 19. (HSG 7 Đức Thọ, Hà Tĩnh 2021 – 2022)**

Cho hình vẽ bên. Biết  $BC \parallel AD$ ,  $CA = CB$ ,  $AB = AD$  và  $\angle C = \angle D$ . Tính số đo  $\angle BAC$ .



**Lời giải**

Vì  $BC \parallel AD$  nên  $\widehat{C} = \widehat{CAD}$  (2 góc so le trong) (1)

Vì  $CA = CB$  nên  $\triangle CAB$  cân tại  $C$  suy ra  $\widehat{CAB} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}$  (tính chất tam giác cân) (2)

Vì  $AB = AD$  nên  $\triangle DAB$  cân tại  $D$  suy ra  $\widehat{ABD} = \widehat{D}$  (tính chất tam giác cân)

Mà  $\widehat{ABD} + \widehat{D} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

$\Rightarrow 2\widehat{D} + \widehat{BAD} = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{C} + \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 180^\circ$  (vì  $\widehat{C} = \widehat{D}$ ) (3)

$$2\widehat{C} + \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 5\widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 36^\circ$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

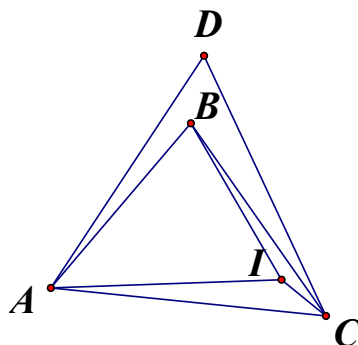
$$\Rightarrow \widehat{CAB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

Vậy  $\widehat{BAC} = 72^\circ$

**Câu 20. (HSG 7 Yên Mỹ, Hưng Yên 2021 – 2022)**

Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $B$ , có  $\widehat{ABC} = 80^\circ$ . Lấy điểm  $I$  nằm trong tam giác sao cho  $\widehat{IAC} = 10^\circ$  và  $\widehat{ICA} = 30^\circ$ . Tính số đo  $\widehat{AIB}$ .

**Lời giải**



Do  $\triangle ABC$  cân tại  $B$ , có  $\widehat{ABC} = 80^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \frac{180^\circ - \widehat{ABC}}{2} \quad (\text{Số đo góc ở đáy của một tam giác cân})$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

Vì  $\angle HAC = 10^\circ$  và  $\angle PCA = 30^\circ$  nên  $\angle HAB = 40^\circ$  và  $\angle PCB = 20^\circ$

Vẽ tam giác đều  $ACD$  như hình vẽ

Suy ra:  $\angle BAD = \angle BCD = 10^\circ$

Xét  $\triangle ABD$  và  $\triangle DBC$  có:

$$\angle BAD = \angle BCD = 10^\circ; AB = BC; AD = DC$$

$$\text{Nên } \triangle ABD = \triangle CBD \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \angle ADB = \angle CDB = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Xét  $\triangle ABD$  và  $\triangle AIC$  có:  $AD = AC; \angle BAD = \angle IAC = 10^\circ; \angle BDA = \angle ICA = 30^\circ$

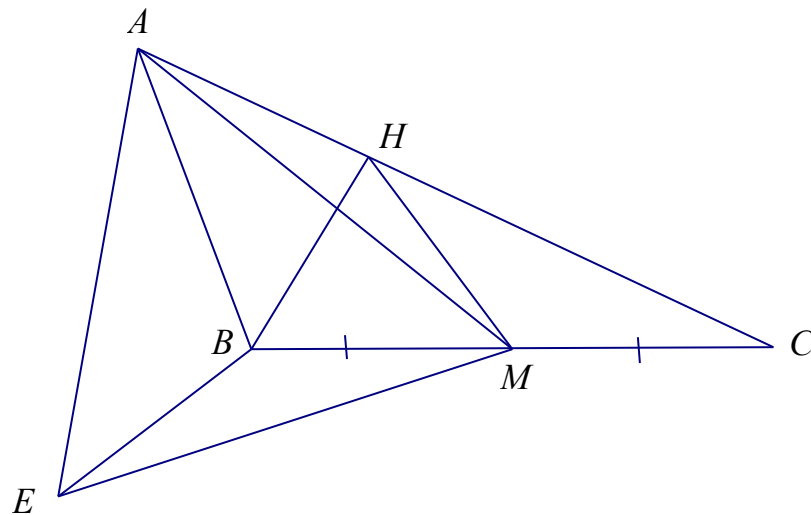
Nên  $\triangle ABD = \triangle AIC$  (g-c-g)  $\Rightarrow AB = AI$  (Hai cạnh tương ứng)

$$\text{Nên } \triangle AIB \text{ cân tại } A \text{ do đó: } \angle AIB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 60^\circ$$

**Câu 21 . (HSG 7 Bắc Ninh 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$ , đường trung tuyến  $AM$ ,  $\angle MAB = 30^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ . Tính số đo  $\angle ABC$  biết  $\angle ABC$  là góc tù.

**Lời giải**



Kẻ  $BH$  vuông góc với  $AC$  tại  $H$  suy ra  $\Rightarrow \triangle BHC$  là tam giác nửa đều

$$BH = \frac{BC}{2}$$

Có

Có  $\triangle BHC$  vuông tại  $H$  có trung tuyến  $HM \Rightarrow HM = \frac{BC}{2} = BM$

Suy ra  $MB = BH = MH$  (1) và  $\triangle BMH$  đều  $\Rightarrow \angle BMH = 60^\circ$  hay  $\angle BMA + \angle HMA = 60^\circ$  (\*)

Vẽ  $\triangle MAE$  đều ( $E$  và  $M$  khác phía đối với  $AB$ )  $\Rightarrow \angle AME = 60^\circ$  hay  $\angle BME + \angle AMB = 60^\circ$  (\*)

Từ (\*) và (\*\*) có  $\angle BME = \angle HMA$

Do  $\angle MAB = 30^\circ$  suy ra  $AB$  vừa là phân giác vừa là trung trực của  $EM \Rightarrow MB = EB$  (2)

Xét  $\triangle AMH$  và  $\triangle EMB$  có:  $MH = MB$  (cmt),  $\angle HME = \angle BMA$  (cmt),  $MA = ME$  (cmt)

Suy ra  $\triangle AMH = \triangle EMB$  (c.g.c) nên  $AH = EB$  (3)

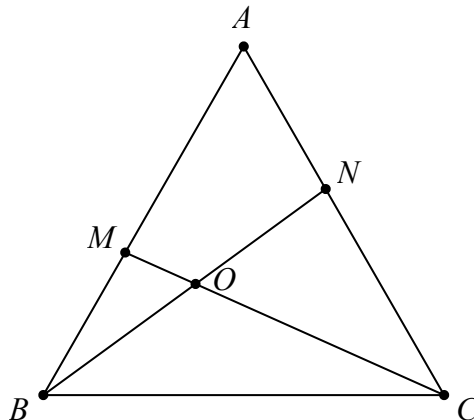
Từ (1), (2) và (3) suy ra  $AH = BH \Rightarrow \triangle AHB$  vuông cân tại  $H$  nên  $\angle ABH = 45^\circ$

Từ đó  $\angle ABC = \angle ABH + \angle HBC = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$ .

**Câu 22. (HSG 7 Điện Bàn 2022 - 2023).**

Cho tam giác đều  $ABC$ . Trên các cạnh  $AB$  và  $AC$  lần lượt lấy hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $AM = CN$  ( $M \neq A, M \neq B; N \neq A, N \neq C$ ). Gọi  $O$  là giao điểm của  $BN$  và  $CM$ . Chứng tỏ rằng tổng  $\angle MAN + \angle MON$  có giá trị không đổi.

**Lời giải**



Ta có:  $AC = CB$  (vì  $\triangle ABC$  đều)

$\angle BCN = \angle CAM$  ( $\triangle ABC$  đều)

$AM = CN$  (gt)

Suy ra:  $\triangle CBN = \triangle ACM$  (c.g.c)  $\Rightarrow \angle CBO = \angle ACM$

$\Rightarrow \angle CBO + \angle OCB = \angle ACO + \angle OCB = \angle ACB = 60^\circ$

Trong tam giác  $BOC$  có  $\angle BOC = 180^\circ - (\angle CBO + \angle OCB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ,

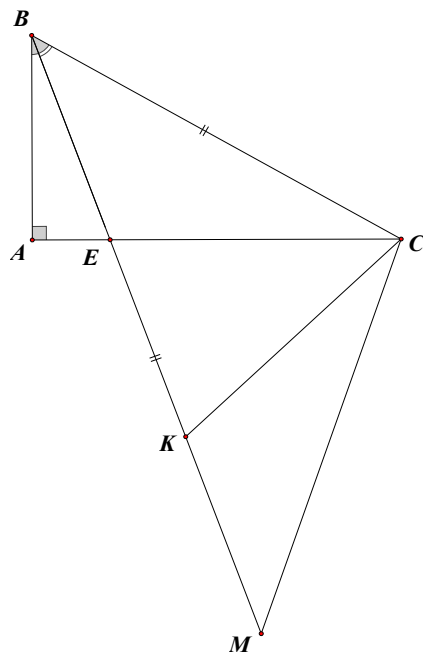
suy ra  $\angle MON = \angle BOC = 120^\circ$  (đối đỉnh)

Từ đó ta có:  $\angle MAN + \angle MON = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$  (không đổi).

**Câu 23. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa 2021 - 2022)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Trên  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $\angle EBC = 2\angle ABE$ . Trên tia  $BE$  lấy điểm  $M$  sao cho  $EM = BC$ . So sánh  $\angle MBC$  và  $\angle BMC$ .

**Lời giải**



Trên tia  $BE$  lấy điểm  $K$  sao cho  $BK = BC$  (1) suy ra  $\triangle BKC$  cân tại  $B$   
 $\Rightarrow \angle BKC = \angle BCK = \frac{180^\circ - \angle BKC}{2} = \frac{180^\circ - \angle BKC}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EBC = 90^\circ - \angle ABE = \angle AEB$

Mà  $\angle AEB = \angle CEK$  (đối đỉnh)  
 $\Rightarrow \angle BKC = \angle CEK \Rightarrow \triangle CKE$  cân tại  $C \Rightarrow CE = CK$  và  $\angle ECK = \angle KEC$   
 $\Rightarrow \angle EBC = \angle KCM$  (cùng bù với hai góc bằng nhau).

Mà  $BK = EM$  nên  $BE = KM$

Xét  $\triangle CEB$  và  $\triangle CKM$  có  
 $CE = CK$  ( $\triangle CKE$  cân tại  $C$ )

$\angle EBC = \angle KCM$  (cmt)

$BE = KM$  (cmt)

Do đó  $\triangle CEB = \triangle CKM$  (c-g-c)  $\Rightarrow \angle MBC = \angle BMC$  (hai góc tương ứng)

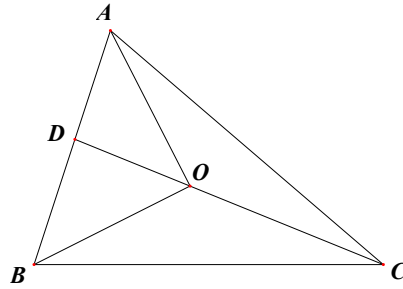
**Câu 24. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2021 - 2022)**

Cho tam giác  $ABC$ ,  $O$  là điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng  $\angle BOC = \angle A + \angle ABO + \angle ACO$ .

b) Biết  $\angle ABO + \angle ACO = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$  và tia  $BO$  là tia phân giác của  $\angle ABC$ . Chứng minh rằng tia  $CO$  là tia phân giác của  $\angle ACB$ .

**Lời giải**



a) Chứng minh rằng  $\angle BOC = \angle A + \angle ABO + \angle ACO$ .

Gọi  $D$  là giao điểm của  $CO$  và cạnh  $AB$

Xét  $\triangle BOD$  có  $\angle BOC = \angle BBO + \angle BDO$  ( tính chất góc ngoài của tam giác)

$\triangle ADC$  có  $\angle BDC = \angle A + \angle ACO$  ( tính chất góc ngoài của tam giác)

Hay  $\angle BDO = \angle A + \angle ACO$

Suy ra  $\angle BOC = \angle BBO + \angle BDO = \angle BBO + \angle A + \angle ACO$

Vậy  $\angle BOC = \angle A + \angle ABO + \angle ACO$

b) Nếu  $\angle ABO + \angle ACO = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$  thì  $\angle BOC = \angle A + 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$

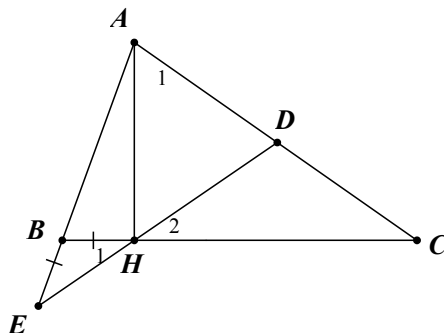
Xét  $\triangle BOC$  ta có:

$$\angle OCB = 90^\circ - \frac{\angle A + \angle ABC}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = \frac{\angle ACB}{2}$$

**Câu 25. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017- 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $\angle B < 90^\circ$  và  $\angle B = 2\angle C$ . Kẻ đường cao  $AH$ . Trên tia đối của tia  $BA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BE = BH$ . Đường thẳng  $HE$  cắt  $AC$  tại  $D$ . Chứng minh  $\angle BEH = \angle ACB$

**Lời giải**



Tam giác  $BEH$  cân tại  $B$  nên  $\angle E = \angle H_1$

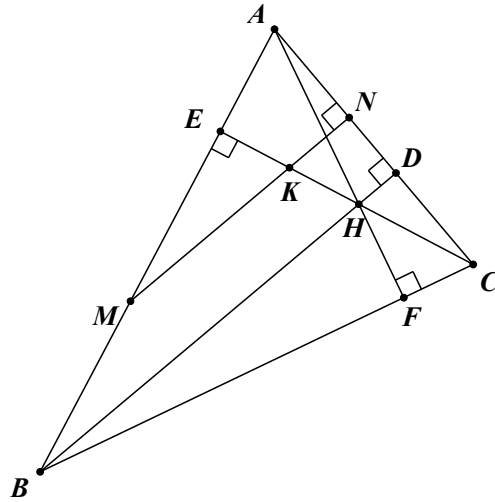
mà  $2\angle E = \angle ABC = \angle E + \angle H_1 = 2\angle E$

Nên  $\angle BEH = \angle ACB$

**Câu 26. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017- 2018)**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  có  $AB > AC$ , ba đường cao  $BD$ ,  $CE$  và  $AF$  cắt nhau tại  $H$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $AB$  sao cho  $AM = AC$ . Gọi  $N$  là hình chiếu của  $M$  trên  $AC$ ;  $K$  là giao điểm của  $MN$  và  $CE$ . Chứng minh hai góc  $KAH$  và  $MCB$  bằng nhau.

**Lời giải**



$\triangle AMC$  có 2 đường cao  $MN$  và  $CE$  cắt nhau tại  $K$

Nên  $K$  là trực tâm của  $\triangle AMC$

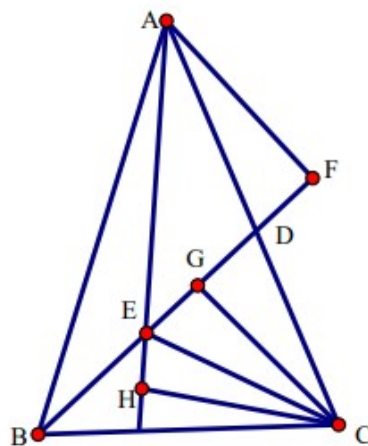
Suy ra  $AK$  là đường cao thứ 3

hay  $AK \perp MC \Rightarrow \angle KAH = \angle MCB$ .

**Câu 27. (HSG 7 Vĩnh Phúc- năm học 2022 - 2023)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , gọi  $D$  là trung điểm của  $AC$ . Trên đoạn  $BD$  lấy điểm  $E$  sao cho  $\angle DAE = \angle ABD$ . Chứng minh rằng  $\angle DAE = \angle ECB$ .

**Lời giải**



Vẽ  $AF \perp DB$ ;  $CG \perp DB$ ;  $CH \perp AE$

Xét  $\triangle ABF$  và  $\triangle CAH$  có:  $\angle AFB = \angle AHC = 90^\circ$ ,  $AB = AC$  (gt),  $\angle ABF = \angle CAH$  (gt)

Suy ra:  $\triangle ABF = \triangle CAH$  (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra  $AF = CH$ .

Xét  $\triangle ADF$  và  $\triangle CDG$  có:  $\angle AFD = \angle CGD = 90^\circ$ ,  $AD = DC$  (gt),  $\angle ADF = \angle CDG$  (đối đỉnh)

Suy ra  $\triangle ADF = \triangle CDG$  (cạnh huyền – góc nhọn) Suy ra  $AF = CG$ .

Từ đó ta có  $CH = CG$

Xét  $\triangle CEH$  và  $\triangle CEG$  có:  $\angle H = \angle G = 90^\circ$ ,  $CE$  là cạnh chung,  $CH = CG$  (cmt)

Suy ra  $\triangle CEH = \triangle CEG$  (cạnh huyền – cạnh góc vuông)  $\Rightarrow \angle ECH = \angle ECG$

Mà  $\angle ECG = \angle ECB + \angle ECB$ ;  $\angle ECH = \angle EAC + \angle ECA$

Do đó  $\angle ECB + \angle ECB = \angle EAC + \angle ECA$  (1)

Mặt khác:  $\angle EBA + \angle ECB = \angle ECB + \angle ECA$  (2)

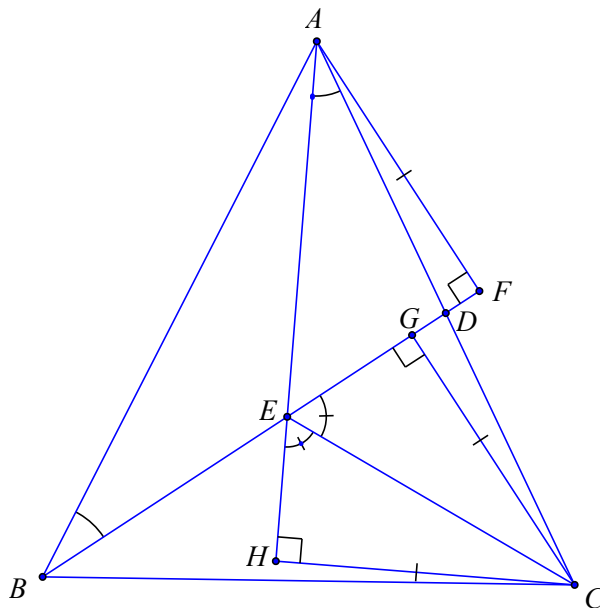
Lấy (1) trừ (2) theo vế ta có:  $\angle ECB - \angle EBA = \angle EAC - \angle ECB = \angle EBA - \angle ECB \Rightarrow \angle EBA = \angle ECB$

Mà  $\angle EAE = \angle ABD$  nên  $\angle EAE = \angle ECB$

**Câu 28. (HSG 7 huyện Lục Nam năm 2020 - 2021)**

Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . Trên đường trung tuyến  $BD$  lấy điểm  $E$  sao cho  $\angle EAE = \angle ABD$  ( $E$  nằm giữa  $B$  và  $D$ ). Chứng minh rằng  $\angle EAE = \angle ECB$ .

**Lời giải**



Vẽ  $AF$  vuông góc  $BD$ ,  $CG$  vuông góc  $BD$ ,  $CH$  vuông góc với  $AE$ . Ta có

$\triangle ABF = \triangle CAH$  (cạnh huyền – góc nhọn). Suy ra:  $AF = CH$ .

$\triangle ADF = \triangle CDG$  (ch - gn) suy ra  $AF = CG$ .

Từ đó ta có  $CH = CG$ .

$\triangle CEH = \triangle CEG$  (ch-cgv)

$\Rightarrow \angle ECH = \angle ECG$

Mà  $\angle ECG = \angle ECB + \angle ECB$ ;  $\angle ECH = \angle EAC + \angle ECA$ ;

Mà

Do đó:  $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA}$  (1)

Mặt khác:  $\widehat{EBA} + \widehat{EBC} = \widehat{ECB} + \widehat{ECA}$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta có:  $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} - \widehat{EBA} - \widehat{EBC} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} - \widehat{ECB} - \widehat{ECA}$

$\widehat{ECB} - \widehat{EBA} = \widehat{EAC} - \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{ECB} - \widehat{EBA} = \widehat{EBA} - \widehat{ECB}$

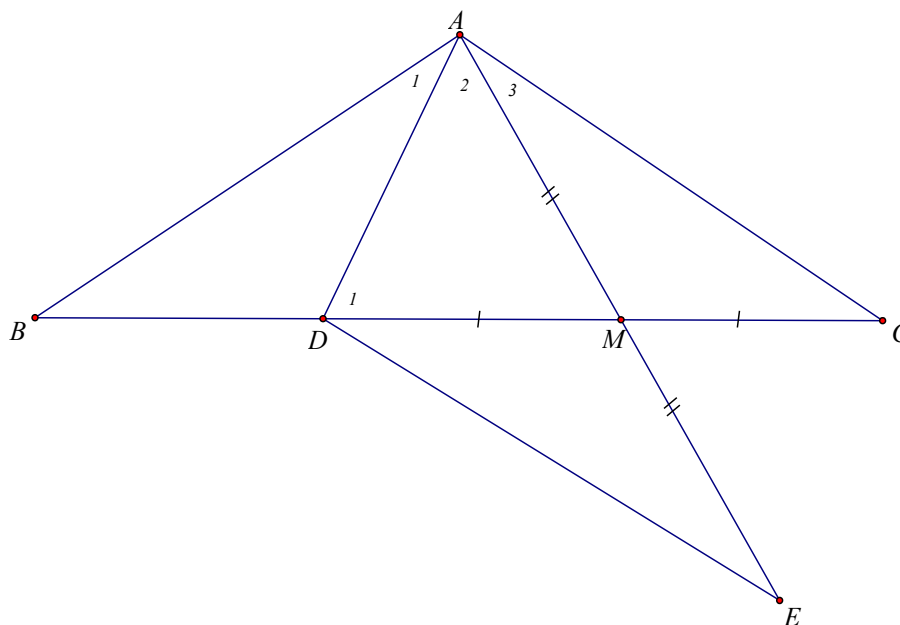
$\Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{ECB}$

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ECB}$  (đpcm).

**Câu 29. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, năm học 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  cân. Trên cạnh đáy  $BC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = 2BD$ . Chứng minh rằng  $\widehat{BAD} < \frac{1}{2}\widehat{CAD}$

**Lời giải**



Gọi  $M$  là trung điểm của  $DC$ . Trên tia đối của tia  $MA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $MA = ME$

Ta có hai tam giác  $AMC$  và  $EMD$  bằng nhau

Vì  $MD = MC$ ,  $MA = ME$ ,  $\widehat{AMC} = \widehat{EMD}$

Nên  $DE = DC$ ,  $\widehat{A_3} = \widehat{DEM}$

Mặt khác:  $\widehat{D_1} = \widehat{B}$  (tính chất góc ngoài của tam giác)

Mà  $\widehat{B} = \widehat{C}$  (vì  $\triangle ABC$  cân, đáy  $BC$ ) nên  $\widehat{D_1} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AD$

Từ đó  $DE > DA$

$\Rightarrow \widehat{A_2} > \widehat{DEM}$

$\Rightarrow \widehat{A_2} > \widehat{A_3}$

Vì  $\angle A_1 = \angle A_3$  (do  $\triangle ABD = \triangle ACM$ )

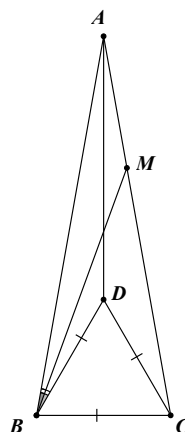
Nên  $\angle A_2 + \angle A_3 > \angle A_1 + \angle A_3$  hay  $2\angle A_1 < \angle A_2 + \angle A_3$

$$\Rightarrow \angle BAD < \frac{1}{2} \angle CAD$$

**Câu 30. (HSG 7 Huyện 2017 - 2018)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $\angle A = 20^\circ$ , vẽ tam giác đều  $DBC$  (  $D$  nằm trong  $\triangle ABC$  ). Tia phân giác của  $\angle ABD$  cắt  $AC$  tại  $M$ . Chứng minh tia  $AD$  là phân giác của  $\angle BAC$ .

**Lời giải**



$$\triangle ADB = \triangle ADC \text{ (c.c.c)}$$

Chứng minh

$$\Rightarrow \angle DAB = \angle DAC \quad \angle DAB = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

, do đó

Vậy tia  $AD$  là phân giác của  $\angle BAC$ .

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com  
<https://www.vnteach.com>