**Dạng 4. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **PHƯƠNG PHÁP**  Có ba cách để viết được phương trình dao động một cách nhanh chóng đó là:  **Cách 1:** Viết dựa theo phương trình tổng quát sau đó giải hệ phương trình  hoặc  tại thời điểm t để suy ra pha ban đầu của dao động.  **Cách 2:** Sử dụng vòng tròn lượng giác. Cách này là tổng quát nhất và được trình bày chi tiết nhất trong cuốn sách này.  **Cách 3:** Giải theo số phức bằng cách sử dụng máy tính fX 570MS; 570ES; 570ES Plus. Cách này rất hay và tìm được phương trình nhanh chóng nhưng không phải bài nào cũng làm được.  **Sau đây là phương pháp giải chi tiết cho ba cách trên**  **Cách 1:**  \* Chọn hệ quy chiếu: - Trục Ox;  - Gốc tọa độ tại VTCB ;  - Chiều dương;  - Gốc thời gian.  \* Phương trình dao động có dạng: x = Acos(ωt + ϕ) (đvd)  \* Phương trình vận tốc: v = −ωAsin(ωt + ϕ) (đvd/s)  \* Phương trình gia tốc: a = −ω2Acos(ωt + ϕ) (đvd/s2)  ***1.*** ***Tìm ω***  \* Đề cho: T, f.  - ω = 2πf = , với T = ,  N – Tổng số dao động trong thời gian Δt  \* Đề cho x, v, a, A  ω ==  = =  ***2.*** ***Tìm A***  \* Đề cho: cho x ứng với v ⇒ A =  - Nếu v = 0 (buông nhẹ) ⇒ A = x  - Nếu v = vmax ⇒ x = 0 ⇒ A =  \* Đề cho: amax ⇒ A =  \* Đề cho: chiều dài quĩ đạo CD ⇒ A = .  \* Đề cho: lực Fmax = kA. ⇒ A = .  \* Đề cho : W hoặc hoặc  ⇒ A = .  Với W = Wđmax = Wtmax =.  ***Tìm ϕ*** : Dựa vào điều kiện ban đầu  \* Nếu t = 0 :  - x = x0 , v = v0 ⇒ ⇒  ⇒ ϕ = ?  - v = v0; a = a0 ⇒ ⇒ tanϕ = ω ⇒ ϕ = ?  - x0 = 0, v = v0 (vật qua VTCB)  **Cách 2: giải theo vòng tròn lượng giác**  Cách này chỉ đơn giản là xác định điểm trên vòng tròn sau đó dựa vào điểm đó mà xác định pha ban đầu  **Cách 3: giải theo số phức bằng cách sử dụng máy tính fX 570ES; 570ES Plus**  **1. Cơ sở lý thuyết:**      **2. Phương pháp giải SỐ PHỨC:**  Biết lúc t = 0 có:    **3. Chọn chế độ thực hiện phép tính về số phức của máy tính: CASIO fx–570ES, 570ES Plus**   |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Các bước *Chọn chế độ*** | **Nút lệnh** | **Ý nghĩa- Kết quả** | | Chỉ địnhdạng nhập / xuất toán | Bấm: **SHIFT MODE 1** | Màn hình xuất hiện **Math.** | | Thực hiện phép tính về số phức | Bấm: **MODE 2** | Màn hình xuất hiện **CMPLX** | | Hiển thị dạng toạ độ cực: r**∠θ** | Bấm: **SHIFT MODE** ⯆ **3 2** | Hiển thị số phức dạng r **∠θ** | | Hiển thị dạng đề các: **a + ib**. | Bấm: **SHIFT MODE** ⯆ 3 1 | Hiển thị số phức dạng **a+bi** | | Chọn đơn vị đo góc là độ (**D**) | Bấm: **SHIFT *MODE* 3** | Màn hình hiển thị chữ **D** | | Chọn đơn vị đo góc là Rad (**R**) | Bấm: **SHIFT *MODE* 4** | Màn hình hiển thị chữ **R** | | Nhập ký hiệu góc **∠** | Bấm **SHIFT (-).** | Màn hình hiển thị **∠** |   **4. Thao tác trên máy tính** *(570ES;* 570ES Plus*)***:** Mode 2, R (radian)**,**  **Bấm nhập : =**  - **Với máy *fx 570ES***: bấm tiếp SHIFT, 2 , 3, = máy sẽ hiện , đó là biên độ **A** và pha ban đầu **ϕ**. |

**🕮 VÍ DỤ MẪU:**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Một chất điểm dao động điều hòa trên trục Ox. Trong thời gian Δt = 10π s chất điểm thực hiện được 100 dao động toàn phần. Gốc thời gian là lúc chất điểm đi qua vị trí có li độ 2 cm theo chiều âm với tốc độ là  cm/s. Phương trình dao động của chất điểm là  A. x = 6 cos (20t – π/6) cm. B. x = 4 cos (20t + π/3) cm.  C. x = 4 cos (20t – π/3) cm. D. x = 6 cos (20t + π/6) cm. |

**Phân tích và hướng dẫn giải**

Phương trình dao động có dạng: 

Phương trình vận tốc: 

Đầu tiên ta tìm tần số góc: 

Từ đây ta tính được biên độ theo hệ thức độc lập:



Cuối cùng thay t = 0 vào hệ phương trình (x,v) để tìm pha ban đầu:



Kết hợp nghiệm ta thu được: 

Phương trình dao động của vật: 

***Tới đây đáp án của bài toán là B***

**Lưu ý:** *Cách giải trên là đầy đủ và tổng quát nhất để tìm phương trình dao động của vật. Tuy nhiên, với dạng toán này thì việc kết hợp giữa phương pháp loại trừ với vòng tròn lượng giác để tìm phương trình dao động là cách giải hay và nhanh nhất.*

**Sau đây là cách giải kết hợp phương pháp loại trừ với vòng tròn lượng giác**

Nhìn vào 4 đáp án ta thấy  nên không cần tính .

Theo bài ra: Gốc thời gian là lúc chất điểm đi qua vị trí có li độ 2 cm theo chiều âm nên vận tốc âm. (x > 0; v < 0 ) nên vật nằm ở góc phần tư thứ nhất vì vậy  .

Suy ra loại đáp án A và C.

Đáp án B và D có biên độ khác nhau, vì thế chỉ cần tìm biên độ là có ngay phương trình dao động.

Biên độ tính theo hệ thức độc lập:



x

a

v



−A

A



Vùng 2

Vùng 4

Vùng 3

Vùng 1

***Vậy chọn đáp án B***

*Còn một cách nữa cũng tương đối nhanh, chắc các bạn cũng muốn biết đúng không! Tác giả xin được giới thiệu ngay sau đây.*

*Đó là cách giải bằng số phức kết hợp bấm máy tính cầm tay fx 570 ES hoặc fx 570 ES Plus.*

**Cách 3: Giải bằng số phức**

Ta có: 

Tại thời điềm ban đầu t = 0 ta có:

****

**Sau đây là cách bấm máy tính:**

Đối với máy Fx 570 Es (plus):

Bấm ***MODE* 2** để đưa về số phức.

Bấm **SHIFT *MODE* 4** đưa đơn vị đo về Radian.

Nhập vào máy:  **SHIFT *2* 3** =

Phương trình dao động của vật: 

***Chọn đáp án B***

**Kết luận:** *với 3 cách giải trên, các bạn đã có cái nhìn rộng hơn về dạng toán này. Để nắm chắc dạng toán này các bạn tham khảo các ví dụ tiếp theo nhé!*

Sau đây là bài thi đại học năm 2013.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2 (Trích đề thi đại học năm 2013):** Một vật nhỏ dao động điều hòa dọc theo trục Ox với biên độ 5 cm, chu kì 2 s. Tại thời điểm t = 0, vật đi qua vị trí cân bằng O theo chiều dương. Phương trình dao động của vật là  A. (cm) B. (cm)  C. (cm) D. |

**Phân tích và hướng dẫn giải**

Biên độ đề đã cho, vì vậy không cần tính.

Tiếp theo tính tần số góc: 

Tới đây loại ngay B và C.

Theo bài ra: Tại thời điểm t = 0, vật đi qua cân bằng O theo chiều dương nên . Vì thế chọn đáp án A.

*Bài toán mất không quá 10 s. Các cách còn lại các bạn tự tính nhé!*

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Một chất điểm dao động điều hoà trên trục Ox với chu kì 0,2 s. Lấy gốc thời gian là lúc chất điểm đi qua vị trí có li độ 2 cm theo chiều âm với tốc độ là 20π cm/s. Phương trình dao động của chất điểm là  A. cm B. cm.  C. cm. D. cm. |

**Phân tích và hướng dẫn giải**

Tần số góc và biên độ trong 4 đáp án như nhau nên không phải tính.

Tại thời điểm t = 0, vật có x > 0 ; v < 0 nên vật thuộc góc phần tư thứ 1 (vùng 1) Suy ra  .

***Vậy chọn đáp án C***

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Một vật dao động có gia tốc biến đổi theo thời gian: a = 6sin20t (m/s2). Biểu thức vận tốc của vật là  A. v = 120cos20t (cm/s). B. v = 0,012cos(20t + π/2) (cm/s).  C. v = 30cos(20t – π) (cm/s). D. v = 0,3cos20t (cm/s). |

**Phân tích và hướng dẫn giải**





***Vậy chọn đáp án C***

|  |
| --- |
| **Ví dụ 5:** Một vật dao động điều hòa với biên độ A = 4cm và T = 2s. Chọn gốc thời gian là lúc vật qua vị trí cân bằng theo chiều dương của quỹ đạo. Phương trình dao động của vật là :  A. x = 4cos(2πt − π/2)cm. B. x = 4cos(πt − π/2)cm.  C. x = 4cos(2πt + π/2)cm. D. x = 4cos(πt + π/2)cm. |

**Phân tích và hướng dẫn giải**

Theo bài ra, ta có: ω =  = π rad/s và A = 4cm ⇒ loại A và C.

- Xác định pha ban đầu ϕ:

+ t = 0: x0 = 0, v0 > 0 :  ⇒  chọn ϕ = −

⇒ vậy phương trình dao động của vật: x = 4cos(πt − π/2)cm.

***Chọn đáp án B.***

|  |
| --- |
| **Ví dụ 6:** Một vật dao động điều hòa với tốc độ ban đầu là 1m/s và gia tốc là . Khi đi qua vị trí cân bằng thì vật có vận tốc là 2m/s. Phương trình dao động của vật là  A.  cm. B.  cm.  C. cm. D. cm. |

**Phân tích và hướng dẫn giải**

Theo hệ thức độc lập:



Thay số ta có:  vì vậy loại A và D.

Dễ dàng tính được biên độ: , loại tiếp C.

***Vậy chọn đáp án B***

*Bài này ta không cần tính pha ban đầu vì đáp án B và C có pha ban đầu đều bằng nhau. Tuy nhiên để kiểm nghiệm sự đúng đắn của phương pháp loại trừ. Tôi sẽ tìm pha ban đầu cho các bạn tham khảo nhé!*

Li độ ban đầu của vật: 

Từ hình vẽ ta có:



x

a

V

O

−20

20



ϕ

M

N

Theo bài ra: ban đầu vật có tốc độ 1 m/s, nghĩa là ban đầu vật sẽ ở một trong hai vị trí M hoặc N như trên hình nên pha ban đầu sẽ nhận một tronghai giá trị . Do đáp án đều cho pha ban đầu có giá trị âm nên ta chọn .

**Kết luận:** *nếu như bằng cách loại trừ các bạn thu được đáp án thì không có gì phải lo lắng cả.*

|  |
| --- |
| **Ví dụ 7** **(Sở GD&ĐT Yên Bái 2016)** Chất điểm dao động điều hòa trên đoạn MN = 4 cm, với chu kì T = 2 s. Chọn gốc thời gian khi chất điểm có li độ x = −1 cm, đang chuyển động theo dương. Phương trình dao động là:  A. x = 2cos(πt + 2π/3) cm. B. x = 4cos(πt + π/3) cm.  C. x = 2cos(πt − 2π/3) cm. D. x = 2cos(4πt – 2π/3) cm. |

***Phân tích và hướng dẫn giải***

Theo bài ra: Chất điểm dao động điều hòa trên đoạn MN = 4 cm nên biên độ sẽ là . Loại ngay B

Chu kỳ T = 2s . Loại tiếp D

Gốc thời gian được chọn khi chất điểm có li độ x = -1 cm, đang chuyển động theo chiều dương nên . Loại tiếp A như thế C là đáp án cần tìm.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 8:** Một vật dao động điều hòa với tốc độ ban đầu là 1m/s và gia tốc là . Khi đi qua vị trí cân bằng thì vật có vận tốc là 2m/s. Phương trình dao động của vật là  A.  cm. B.  cm.  C. cm. D. cm. |

***Phân tích và hướng dẫn giải***

Ta có: 

 

Biên độ dao động:



Theo bài ra tại t = 0 ta có:



Biểu diễn các giá trị trên lên vòng tròn lượng giác để tìm pha ban đầu:

Từ hình vẽ ta dễ dàng xác định được 

Vậy phương trình dao động của vật: 

**Ngoài ra cũng có thể giải theo cách thông thường để xác định pha ban đầu:**

Tại t = 0 ta có:



Phương trình dao động của vật: 

**Chọn đáp án C**

*Trong hai cách tìm pha ban đầu như trên thì cách tìm theo vòng tròn lượng giác trực quan hơn. Ngoài ra khi làm trắc nghiệm sẽ cho kết quả cực nhanh.*

*Để nắm rõ cách làm này ta làm thêm một số ví dụ nữa.*

|  |
| --- |
| **Ví dụ 9:** Một chất điểm dao động điều hoà trên trục Ox với chu kì 0,2s. Lấy gốc thời gian là lúc chất điểm đi qua vị trí có li độ 2 cm theo chiều âm với tốc độ là 20π cm/s. Phương trình dao động của chất điểm là  A. cm. B. cm.  C. cm. D. cm. |

***Phân tích và hướng dẫn giải***

Tần số góc: 

Phương trình dao động của vật có dạng:



x

a

v









Loại nghiệm 

vì t = 0 

Từ trên ta có:



Vậy phương trình dao động của vật là:



Để rõ hơn về việc loại nghiệm  ta dùng vòng tròn lượng giác biểu diễn thời điểm ban đầu của vật.

Vì t = 0  nên vật thuộc góc phần tư thứ nhất (vùng 1) vì thế ta chọn nghiệm  một cách dễ dàng.

***Chọn đáp án C***

**Chú ý:** *Việc xác định pha ban đầu chính xác dấu với việc vận dụng vòng tròn lượng giác là tốt nhất và cũng nhanh nhất. Khi sử dụng vòng tròn lượng giác ta biết được ngay vùng mà con lắc đang ở từ đó theo phương pháp loại trừ ta có ngay đáp số.*

**Như bài trên ta thấy:** Tại t = 0 vật có x > 0 và v < 0 vì thế vật nằm ở góc phần tư thứ nhất hay còn gọi là vùng I. Từ đây ta có ngay  từ đó chỉ có đáp án C là đúng. Như thế là ta không cần tính tần số góc và biên độ dao động của vật. Nếu các bạn theo trường phái giải nhanh thì cách này các bạn nên nắm thật chắc.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 10:** Một vật dao động có gia tốc biến đổi theo thời gian: a = 6sin20t (m/s2). Biểu thức vận tốc của vật là  A. v = 120cos20t (cm/s). B. v = 0,012cos(20t + π/2) (cm/s).  C. v = 30cos(20t + π) (cm/s). D. v = 0,3cos20t (cm/s). |

***Phân tích và hướng dẫn giải***

*Có thể rất nhiều bạn sẽ giải bài toán này bằng cách lấy nguyên hàm của gia tốc a theo thời gian t ta sẽ thu được ngay vận tốc. Cách giải như sau:*





**Từ đây ta có đáp án là C**

**Chú ý:** *Nhìn chung cũng không khó lắm nếu các bạn nắm rõ nguyên hàm của hàm lượng giác cơ bản này. Tuy nhiên còn một cách nhanh hơn mà tôi tin các bạn sẽ quan tâm tới. Cách nhanh đó chính là sử dụng vòng tròn lượng giác để tìm pha ban đầu của vận tốc v.* **Cách làm như sau**

Phương trình gia tốc: 

x

a

v





Trước tiên chuyển hàm sin về cos:



Tiếp theo biểu diễn lên vòng tròn lượng giác cả ba đại lượng x; v; a.

Đây là cách mà tôi sẽ dùng cho tất cả các bài toán liên quan đến vòng tròn. Cách này các bạn đã được học trong phần ứng dụng của vòng tròn lượng giác từ phần trước.

Từ hình vẽ, không khó để xác định pha ban đầu của gia tốc a, vận tốc v, li độ x. Vì bài hỏi phương trình vận tốc nên ta cần .

Vận tốc cực đại: 

Phương trình vận tốc: 

Nếu hỏi phương trình li độ x ta có:

Biên độ dao động: 

Pha ban đầu của li độ: 

Phương trình li độ (dao động của vật):



*Tới đây các bạn đã có thêm cách giải nhanh để giải các dạng bài viết phương trình dao động theo kiểu bài toán ngược thế này.*

|  |
| --- |
| **Ví dụ 11:** **(THPT Lê Hồng Phong – Đồng Nai 2015)** Một vật có khối lượng m = 1000g dao động điều hòa với chu kỳ T = 2s. Vật qua vị trí cân bằng với vận tốc v0 = 31,4cm/s2. Biết rằng ở thời điểm t = 0 vật qua ly độ x = 5cm theo chiều âm của trục tọa độ. Lấy π2 ≈ 10. Phương trình dao động điều hòa của vật là:  **A.** x = 10cos(πt − ) (cm). **B.** x = 10cos(πt + ) (cm).  **C.** x = 10cos(πt + ) (cm). **D.** x = 10cos(πt − ) (cm). |

***Phân tích và hướng dẫn giải***

Tần số góc của dao động: 

Biên độ dao động của vật: .

Phương trình dao động của vật: 

Phương trình vận tốc: 

Khi 

Vậy phương trình dao động của vật là:  ⇒ ***Chọn B***

|  |
| --- |
| **Ví dụ 12:** **(Chuyên Nguyễn Huệ – Hà Nội lần 4/2015)**  Một vật dao động điều hòa dọc theo trục Ox chiều dài quỹ đạo là 10cm, chu kì 2s. Tại thời điểm t = 2,5s vật đi qua vị trí biên dương. Phương trình dao động của vật là  **A.** x = 5cos(2πt + π)cm. **B.** x = 10cos(πt + π/2)cm.  **C.** x = 5cos(2πt - π/2) cm. **D.** x = 5cos(πt - π/2) cm. |

***Phân tích và hướng dẫn giải***

Theo bài ra: Chiều dài quỹ đạo là 10cm vì thế biên độ sẽ là 

Đến đây loại ngay B

Tần số góc của dao động: . Loại tiếp A và C như vậy D là đáp án cần tìm.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 13:** **(THPT Đông Hà – Quảng Trị lần 2/2015)** Một vật nhỏ dao động điều hòa trên quỹ đạo dài 40 cm. Khi qua li độ x = 10 cm, vật có tốc độ bằng 20πcm/s. Chọn gốc thời gian là lúc vật đi qua vị trí cân bằng theo chiều âm. Phương trình dao động của vật là  **A.** x = 10cos cm. **B.** x = 10cos cm.  **C.** x = 20cos cm. **D.** x = 10cos cm. |

***Phân tích và hướng dẫn giải***

Theo bài ra: Chiều dài quỹ đạo là 40cm vì thế biên độ sẽ là 

Đến đây chọn ngay đáp án C mà không cần phải do dự gì thêm.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 14:** **(Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình lần 2/2016)** Một chất điểm dao động điều hòa trên một đoạn thẳng dài 10cm. Biết rằng trong thời gian 1 phút nó thực hiện được 90 dao động. Chọn mốc thời gian là lúc nó đi qua vị trí cân bằng theo chiều dương thì phương trình dao động là:  **A.** x = 5cos(t –) (cm) **B.** x = 5cos(3πt – ) (cm)  **C.** x = 10cos(3πt – ) (cm) **D.** x = 5cos(3πt + ) (cm) |

***Phân tích và hướng dẫn giải***

Tần số dao động:  đến đây loại ngay A

Chọn mốc thời gian là lúc nó đi qua vị trí cân bằng theo chiều dương đến đây loại tiếp D.

Chất điểm dao động điều hòa trên một đoạn thẳng dài 10cm nên A=5cm loại tiếp C. vậy B là đáp án cần tìm.

|  |
| --- |
| **Ví dụ 15:** Một lò xo có độ cứng k nằm ngang, một đầu gắn cố định một đầu gắn vật có khối lượng m. Kích thích để vật dao động điều hòa với vận tốc cực đại bằng 3m/s và gia tốc cực đại bằng 30π (m/s2). Thời điểm ban đầu t = 0 vật có vận tốc v = +1,5m/s và thế năng đang tăng. Phương trình gia tốc của vật là  A. a = 30πcos(10πt + ) (m/s2) B. a = 15πcos(20πt + ) (m/s2)  C. a = - 30πcos(10πt +) (m/s2) D. a = 30πcos(20πt +) (m/s2) |

***Phân tích và hướng dẫn giải***

 Theo bài ra ta có:



Loại ngay B; D

t = 0 

nên vật thuộc góc phần tư thứ ba **(vùng III)**



Từ hình vẽ ta có: 

Vậy phương trình gia tốc là: 

**Chọn đáp án A.**

Ta cũng có thể tìm phương trình dao động a theo cách: 

Dựa vào vòng tròn ta có 

Vậy phương trình dao động theo gia tốc:

