

Bài 1: (6,0 điểm) Cho biểu thức:
$$P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $|x-1| = \sqrt{4-\sqrt{12}} + \sqrt{19-\sqrt{192}}$

c) Tìm x để $Q = \frac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên

Bài 2: (3 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$ thì $n^4 - n + 2$ không phải là số chính phương

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $3(y^2 - 8x) = 3 - 4x^2$

Bài 3: (2 điểm) Giải phương trình: $(\sqrt{x+1}+1)(5-x) = 2x$

Bài 4: (7, 0 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A; $BC = 2a$ (cm). Đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. Chứng minh rằng :

a) $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$

b) Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với AC, qua điểm C vẽ đường thẳng song song với AB, hai đường thẳng này cắt nhau tại M. Gọi N và K lần lượt là trung điểm của BM và HC. Chứng minh AK vuông góc với KN.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ADHE.

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2015}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2015}{2}}$

—————HẾT—————

ĐÁP ÁN

Bài 1: (6,0 điểm) Cho biểu thức: $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$

a) Rút gọn P.

ĐKXĐ: $x > 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Rút gọn } P &= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}(1-x)-(1-x^2)}{\sqrt{x}(1-x)} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1-x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1+x+\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1-x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1$$

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $|x-1| = \sqrt{4-\sqrt{12}} + \sqrt{19-\sqrt{192}}$

Ta có:

$$|x-1| = \sqrt{4-\sqrt{12}} + \sqrt{19-\sqrt{192}}$$

$$|x-1| = 3$$

$$\Leftrightarrow x-1=3 \text{ hoặc } x-1=-3$$

$$\Leftrightarrow x=4 \text{ hoặc } x=-2.$$

Vì $x=4$ thỏa mãn đkxđ nên ta có:

Giá trị của biểu thức P là:

$$P = \frac{(\sqrt{4} + 1)^2}{\sqrt{4}} = \frac{9}{2}$$

c) Tìm x để $Q = \frac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên

Với ĐKXD: $x > 0, x \neq 1$.

Ta có: $Q = \frac{6}{P} = \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2} > 0$ mọi x thuộc đkxd.

Mặt khác $Q - 3 = \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2} - 3 = \frac{6\sqrt{x} - 3(\sqrt{x} + 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)^2}$
 $= \frac{6\sqrt{x} - 3(x + 2\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{-3(x + 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2} < 0$ mọi x thuộc đkxd.

Nên : $Q < 3$ mọi x thuộc đkxd.

Vậy : $0 < Q < 3$ với mọi $x > 0, x \neq 1$.

Vì Q nhận giá trị nguyên nên $Q = 1$ hoặc $Q = 2$.

$$\begin{aligned} +) \quad Q = 1 &\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow x + 4\sqrt{x} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x = (2 \pm \sqrt{3})^2 \text{ (t/m đkxd)} \end{aligned}$$

$$+) \quad Q = 2 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 0 \text{ .PT vô nghiệm}$$

Vậy với $x = (2 \pm \sqrt{3})^2$ thì Q nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (3 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$ thì $n^4 - n + 2$ không phải là số chính phương

Đặt $M = n^4 - n + 2$

Ta có: $M = n^4 - (n - 2) < (n^2)^2$ (vì $n > 2$ nên $n - 2 > 0$)

Mặt khác: $A = n^4 - 2n^2 + 1 + 2n^2 - n + 1 = (n^2 - 1)^2 + (2n^2 - 1 + 1)$

$$\Rightarrow M > (n^2 - 1)^2 \text{ (vì } 2n^2 - n + 1 = 2(n - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8} > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow (n^2 - 1)^2 < M < (n^2)^2$$

Vậy M không là số chính phương.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $3(y^2 - 8x) = 3 - 4x^2$

$$3(y^2 - 8x) = 3 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 24x + 36 - 36 = 3 - 3y^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x - 3)^2 = 3(13 - y^2) \quad (1)$$

Ta thấy $3(13 - y^2) : 4$, suy ra $(13 - y^2) : 2 \Rightarrow$ lẻ.

Ta lại có: $13 - y^2 \geq 0$ nên suy ra $y^2 = 1; y^2 = 9$

Khi đó (1) có dạng: $4(x - 3)^2 = 36$ hoặc $4(x - 3)^2 = 12$ (Loại)

$\Rightarrow x - 3 = \pm 3$ do đó $x = 6$ hoặc $x = 0$.

Vậy các cặp (x, y) : $(6; 1)$, $(6; -1)$, $(0; 1)$, $(0; -1)$ thỏa mãn (1) là nghiệm của PT đã cho.

ĐK: $x \geq -1$

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của PT(1).

Với $x \neq 0$ ta nhân 2 vế của PT (1) với $(\sqrt{x+1} - 1)$ ta có:

$$(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)(5 - x) = 2x(\sqrt{x+1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x + 1 - 1)(5 - x) = 2x(\sqrt{x+1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow x(5 - x) = 2x(\sqrt{x+1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow 5 - x = 2(\sqrt{x+1} - 1) \quad (\text{do } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x+1} - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 = 3 \quad (\text{do } \sqrt{x+1} + 1 > 0 \text{ với mọi } x \geq -1.)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad (\text{t/m đk}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 3$.

a. Xét tứ giác ADHE có: $\angle A = \angle D = \angle E = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ ADHE là hình chữ nhật $\Rightarrow HE = AD$.

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong:

$\triangle AHB$ vuông tại H, đường cao HE ta có:

$$BH^2 = BA \cdot BE(1)$$

$\triangle AHC$ vuông tại H, đường cao HD ta có:

$$AH^2 = AD \cdot AC$$

Mà $HE = AD$ nên

$$AH^2 = AD \cdot AC = AC \cdot HE(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AB \cdot EB + AC \cdot EH = BH^2 + AH^2 = AB^2 \text{ (đpcm)}$$

b, Gọi O là giao điểm của AH và ED.

Chứng minh được OK là đường trung bình của tam giác AHC

Chứng minh được tứ giác BNKO là hình bình hành để suy ra BO song song với NK

- Chứng minh được O là trực tâm của tam giác ABK

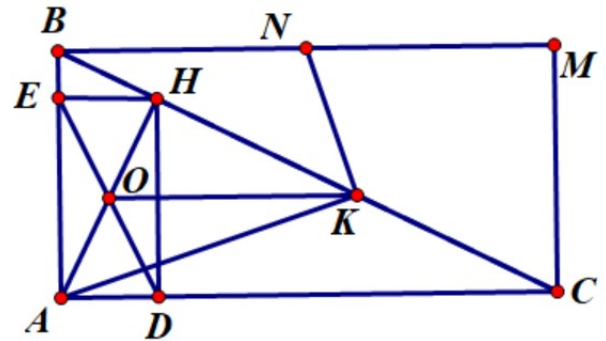
- Chứng minh được BO vuông góc với AK để suy ra NK vuông góc với AK

c. Tìm giá trị lớn nhất của: diện tích tứ giác ADHE.

$\triangle ABC$ vuông tại A, trung tuyến AM ta có: $AM = \frac{1}{2}BC = a$ (cm)

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có: $AH^2 = AE \cdot AB \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB}$

Tương tự: $AD = \frac{AH^2}{AC}$



Bài 4: (7, 0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A; $BC = 2a$ (cm). Đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. Chứng minh rằng :

a) $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$

b) Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với AC, qua điểm C vẽ đường thẳng song song với AB, hai đường thẳng này cắt nhau tại M. Gọi N và K lần lượt là trung điểm của BM và HC. Chứng minh AK vuông góc với KN.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ADHE.

Do đó: $S_{ADHE} = AE \cdot AD = \frac{AH^2}{AB} \cdot \frac{AH^2}{AC} = \frac{AH^4}{AB \cdot AC} = \frac{AH^3}{BC} \leq \frac{AM^3}{BC} = \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AH \equiv AM \Leftrightarrow H \equiv M$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Vậy max $S_{ADHE} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = \sqrt{2015}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2015}{2}}$

Ta có $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$. Suy ra:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{2(c^2 + a^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$$

Đặt $x = \sqrt{b^2 + c^2}, y = \sqrt{c^2 + a^2}, z = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$VT \geq \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2\sqrt{2}z}$$

suy ra

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} - x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} - y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} - z \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z \right) \right]$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} [(2(y+z) - 3x) + (2(z+x) - 3y) + (2(x+y) - 3z)]$$

$$\text{Suy ra } VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2015}{2}}$$