

Người làm: Nguyễn Thị Thu
Zalo: Nguyễn Thị Thu- số dt zalo: 0393588422
Email: thuhienkhai@gmail.com

CD5: SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

Dạng 1. Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên

Dạng 2. Áp dụng định lý Fermat

Dạng 3. Phương pháp phân tích

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Miện, tỉnh Hải Dương, 2022- 2023)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $p = 2 \Rightarrow 2^p + p^2 = 8$ không là số nguyên tố (loại).

Nếu $p = 3 \Rightarrow 2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố (chọn).

Nếu $p > 3$ thì p là số lẻ $\Rightarrow p = 2k + 1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^p = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k$ chia cho 3 dư 2.

Lại có p^2 là số chính phương lớn hơn 3 nên chia cho 3 dư 1. Suy ra $2^p + p^2$ chia hết cho 3 (loại).

Vậy $p = 3$.

Câu 2. (HSG 7 thành phố Thanh Hoá, 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét: } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) &= (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d) \\ &= a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) + d(d - 1) \end{aligned}$$

Vì a là số nguyên dương nên $a, (a - 1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp
 $\Rightarrow a(a - 1); 2$ tương tự ta có $b(b - 1); c(c - 1); d(d - 1)$ đều chia hết cho 2.
 $\Rightarrow a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) + d(d - 1)$ là số chẵn.

Lại có $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(b^2 + d^2)$ là số chẵn.

Do đó $a + b + c + d$ là số chẵn mà $a + b + c + d > 2$
 $\Rightarrow a + b + c + d$ là hợp số.

Câu 3. (HSG 7 thành phố Lào Cai, 2022 - 2023)

Chứng minh $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ không thể là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có: $n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) + (n+1) = (n+1)(n^2 - n + 2)$

Do $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $n+1 > 1$ và $n^2 - n + 2 > 1$ Vậy $(n+1)(n^2 - n + 2)$ là hợp số hay $n^3 + n + 2$ không thể là số nguyên tố.

Câu 4. (HSG 7 huyện Kim Thành, 2022 - 2023)

Cho biết a, b là các số nguyên tố thỏa mãn: $a^2 - b^2 - 4 = 113$. Chứng minh rằng $a + b$ cũng là một số nguyên tố.

Lời giải

$$a^2 - b^2 - 4 = 113$$

$$a^2 - b^2 = 117 \quad (*)$$

Nếu a và b cùng tính chẵn lẻ thì $(a^2 - b^2) : 2$ mà $117 \not\vdots 2$ nên $(*)$ vô lý.

Do đó trong hai số a, b phải có một số chẵn

Mà a, b có một số nguyên tố nên $a = 2$ hoặc $b = 2$.

Nếu $a = 2$ thì $4 - b^2 = 117$

$$b^2 = -113 \text{ (Vô lý)}$$

Nếu $b = 2$ thì $a^2 - 4 = 117$

$$a^2 = 121$$

$$a = 11$$

$$a + b = 11 + 2 = 13 \text{ là số nguyên tố (đpcm)}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hoá, 2017 - 2018)

Tìm số nguyên tố p để $p+2, p+6, p+8, p+14$ cũng là các số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $p = 2$ thì $p+2 = 4$, là hợp số $\Rightarrow$ loại

Nếu $p = 3$ thì $p+6 = 9$, là hợp số $\Rightarrow$ loại

Nếu $p = 5$ thì $p+2 = 7, p+6 = 11, p+8 = 13, p+14 = 19$, đều là các số nguyên tố.

Nếu $p > 5$, vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 5

$\Rightarrow p$ có dạng $5k+1$ hoặc $5k+2$ hoặc $5k+3$ hoặc $5k+4$ ($k \in \mathbb{N}$)

- Nếu $p = 5k+1$ thì $p+14 = 5k+1+14 = 5k+15 = 5(k+3) : 5$, mà $p+14 > 5$

nên $p+14$ là hợp số

- Nếu $p = 5k+2$ thì $p+8 = 5k+2+8 = 5k+10 = 5(k+2) : 5$, mà $p+8 > 5$

nên $p+8$ là hợp số

- Nếu $p = 5k + 3$ thì $p + 2 = 5k + 3 + 2 = 5k + 5 = 5(k + 1) : 5$, mà $p + 2 > 5$ nên $p + 2$ là hợp số
 - Nếu $p = 5k + 4$ thì $p + 6 = 5k + 4 + 6 = 5k + 10 = 5(k + 2) : 5$, mà $p + 6 > 5$ nên $p + 6$ là hợp số
- Vậy p chỉ có 1 giá trị duy nhất là $p = 5$

Dạng 4. Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh, trường 2022-2023)

Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn $(x - 1)(x + 1) = 6y^2$

Lời giải

- Vì $6y^2 : 2 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) : 2$
 - Vì $(x - 1) + (x + 1) = 2x : 2$ nên $x - 1; x + 1$ cùng tính chẵn lẻ
- Suy ra $x - 1; x + 1$ là hai số chẵn liên tiếp.
- Do đó $(x - 1)(x + 1) : 8$
- $$\Rightarrow 6y^2 : 8 \Rightarrow 3y^2 : 4 \Rightarrow y^2 : 4 \Rightarrow y : 2$$
- Mà y là số nguyên tố nên $y = 2$
- Thay $y = 2$ vào $(x - 1)(x + 1) = 6y^2 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 24 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 4.6$
- $$\Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$
- $$(x; y) = (5; 2)$$
- Vậy

Câu 2. (HSG 7 Tây Hồ, 2022 - 2023)

Tìm cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn $p^q \cdot q^p = (2p + q + 1) \cdot (2q + p + 1)$

Lời giải

- Ta có: $p^q \cdot q^p = (2p + q + 1) \cdot (2q + p + 1)$ (1)
- TH1: p, q có một số là số chẵn
- Giả sử p là số chẵn
- Do p là số nguyên tố
- $$\Rightarrow p = 2$$
- Từ (1) $\Rightarrow 2^q \cdot q^2 = (4 + q + 1)(2q + 2 + 1) = (q + 5) \cdot (2q + 3) (*)$
- $$\Rightarrow (q + 5)(2q + 3) : 2 \text{ mà } 2q + 3 \text{ là số lẻ nên } q + 5 : 2 \Rightarrow q \text{ lẻ} \Rightarrow q \geq 3$$
- Do (*) suy ra $(q + 5)(2q + 3) : q$
- $$\Rightarrow \begin{cases} q + 5 : q \\ 2q + 3 : q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 : q \\ 3 : q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = q \\ 3 = q \end{cases} \text{ (do } q \text{ là số nguyên tố)}$$

Thử lại ta nhận $q = 5; p = 2$

TH2: p, q là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow p \geq 3; q \geq 3$

$\Rightarrow 2p + q + 1; 2q + p + 1$ là những số chẵn

$\Rightarrow (2p + q + 1)(2q + p + 1) : 4$ mà $p^q \cdot q^p$ là số lẻ nên vô lí

Vậy $(p, q) \in \{(2, 3); (3, 2)\}$

Dạng 5. Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

(Hết)

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>