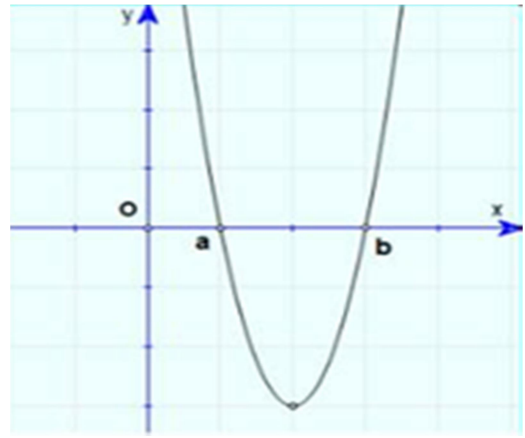


Câu 1 (7 điểm). a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-3)^2(x^2 + mx + 16)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x) = f(5-x)$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

b) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{16-3y} = x^2 + 8 \end{cases}$$

Câu 2 (4 điểm). a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm m để hàm số $g(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng ba điểm cực trị, biết rằng $f(b) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.



b) Một công ty nhận được 50 hồ sơ xin việc của 50 người khác nhau muốn xin việc vào công ty, trong đó có 20 người biết tiếng Anh, 17 người biết tiếng Pháp và 18 người không biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Công ty cần tuyển 5 người biết ít nhất một thứ tiếng Anh hoặc Pháp. Tính xác suất để trong 5 người được chọn có đúng 3 người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp?

Câu 3 (1,5 điểm). Cho các số thực x, y thỏa $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2 \left[\frac{xy - (x+y)}{x+y-1} \right] + 4 \left(\frac{x+2y}{x^2+3y-1} \right) + 4 \left(\frac{y+2x}{y^2+3x-1} \right).$$

Câu 4 (6 điểm). a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$, góc $BAD = 120^\circ$. Biết $SA = SB = SC$ và góc giữa mặt phẳng (SCD) với mặt đáy bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

b) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1, AC = 2, AA' = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM = 3B'M; CN = 2C'N$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$.

Câu 5 (1,5 điểm). Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{MA^2}{OA^2} + \frac{MB^2}{OB^2} + \frac{MC^2}{OC^2}$

.....Hết.....

ĐÁP ÁN-BIỂU ĐIỂM.

Nội dung	Điểm
Câu 1 (7 điểm). a) (3,5 điểm).	
Ta có $g(x) = f(5-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(5-x) = (x-5)(2-x)^2 \left[(5-x)^2 + m(5-x) + 16 \right]$.	0,5
Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (6; +\infty)$	
$\Leftrightarrow (x-5)(2-x)^2 \left[(5-x)^2 + m(5-x) + 16 \right] \geq 0, \forall x \in (6; +\infty)$	0,5
$\Leftrightarrow (5-x)^2 + m(5-x) + 16 \geq 0, \forall x \in (6; +\infty)$ (vì $x-5 > 0$ và $(2-x)^2 > 0, \forall x \in (6; +\infty)$)	0,5
$\Leftrightarrow m \leq \frac{(x-5)^2 + 16}{x-5}, \forall x \in (6; +\infty).$	0,5
Đặt $h(x) = \frac{(x-5)^2 + 16}{x-5}$, với $x \in (6; +\infty)$.	
Do $x \in (6; +\infty)$ nên $x-5 > 0$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:	1
$h(x) = \frac{(x-5)^2 + 16}{x-5} = (x-5) + \frac{16}{x-5} \geq 2\sqrt{(x-5) \cdot \frac{16}{x-5}} = 8$, dấu “=” xảy ra khi $x = 9$.	
Do đó ycbt $\Leftrightarrow m \leq 8$, kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta được $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.	0,5
Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn.	
-----	-----
b) (3,5 điểm) Đk: $x \geq -2, y \leq \frac{16}{3}$	0,5
Từ phương trình (1): $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$	
$\Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow y = x-2$, thế $y = x-2$ vào (2) ta được	0,5
Pt: $4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(3\sqrt{x+2} - x - 4) + \frac{1}{3}(3\sqrt{22-3x} - 14 + x) = x^2 - x - 2$	1
$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(\frac{-x^2 + x + 2}{3\sqrt{x+2} + x + 4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{-x^2 + x + 2}{3\sqrt{22-3x} + 14 - x}\right) = x^2 - x - 2$	0,5
$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt{x+2} + x + 4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt{22-3x} + 14 - x}\right) + 1 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$	0,5
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-1; -3)$ và $(2; 0)$.	0,5
-----	-----
Câu 2 (4 điểm).a) (2 điểm). Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + f(x) + m$.	

$$h'(x) = 2.f(x)f'(x) + f'(x) = f'(x)(2f(x) + 1); \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2f(x) + 1 = 0 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}; \quad 2f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = c \quad (c < a).$

BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y			$f(a)$			$+\infty$
	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		

Ta có: $f(c) = -\frac{1}{2} \Rightarrow h(c) = f^2(c) + f(c) + m = m - \frac{1}{4}; \quad h(b) = f^2(b) + f(b) + m = m.$

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f^2(x) + f(x) + m] = +\infty.$

Ta có BBT của hàm số $h(x) = f^2(x) + f(x) + m$

x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$		
h'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
h	$+\infty$	$m - \frac{1}{4}$	$h(a)$	m	$+\infty$		

Do đó hàm số $g(x) = |h(x)|$ có đúng ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m - \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}.$

b) (2 điểm). Số người biết tiếng Anh hoặc tiếng Pháp là: $50 - 18 = 32.$

Số người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp là: $(20 + 17) - 32 = 5.$

Số phần tử của không gian mẫu là số cách chọn 5 người trong 32 người biết tiếng Anh hoặc tiếng Pháp. Suy ra: $n(\Omega) = C_{32}^5.$

Gọi A là biến cố “trong 5 người được chọn có đúng 3 người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp”.

Chọn 3 người biết cả tiếng Anh và tiếng Pháp: có C_5^3 cách.

Ứng với mỗi cách chọn 3 người nói trên, có C_{27}^2 cách chọn 2 người còn lại. Suy ra,

$$n(A) = C_5^3 \cdot C_{27}^2.$$

Vậy xác suất của biến cố A là: $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1755}{100688}.$

Câu 3 (1,5 điểm). Ta có: $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \leq 0 \\ (y-1)(y-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 3x - 2 \\ y^2 \leq 3y - 2 \end{cases}.$

$$\text{Khi đó: } P \geq \frac{3(x+y)-5(x+y)+2xy}{x+y-1} + 4\left(\frac{x+2y}{3x+3y-3}\right) + 4\left(\frac{y+2x}{3y+3x-3}\right).$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^2+y^2+2xy-5(x+y)+4}{x+y-1} + \frac{4(x+y)}{x+y-1} \Rightarrow P \geq \frac{(x+y)^2-(x+y)+4}{x+y-1}.$$

Đặt $t = x + y$ vì $2 \leq x + y \leq 4$ nên $t \in [2; 4]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t + 4}{t - 1}$ với $\forall t \in [2; 4]$. Ta có $f'(t) = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t - 1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}$.

$$f(2) = 6, f(3) = 5, f(4) = \frac{16}{3}.$$

Vì hàm số liên tục trên $[2; 4]$ nên $\min_{[2; 4]} P = \min_{[2; 4]} f(t) = 5$ khi $(x; y) \in \{(1; 2), (2; 1)\}$.

0,5

0,5

Câu 4 (6 điểm).

a) (3 điểm). Ta có $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 120^\circ$.

Xét tam giác ABC có: $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$.

Suy ra $\triangle ABC$ là tam giác đều có cạnh bằng $2a$.

Gọi I là giao điểm của AC và BD , O là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Do $SA = SB = SC$. Suy ra $SO \perp (ABC)$.

Ta có $(SCD) \cap (ABCD) = CD$

$$\widehat{BCA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{OCI} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{OCI} + \widehat{ICD} = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow OC \perp CD \quad (1)$$

Lại có:

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp SO \text{ (do } SO \perp (ABC)) \\ CD \perp OC \\ SO \cap OC = O \\ SO, OC \subset (SOC) \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SOC)$$

$$\Rightarrow SC \perp CD \text{ (Do } CD \perp (SOC); CD \subset (SOC)) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $((SCD); (ABCD)) = \widehat{SCO} = 45^\circ$.

Xét $\triangle SOC$ có $\widehat{SCO} = 45^\circ$ nên $\triangle SOC$ cân tại O

Suy ra $SO = OC$.

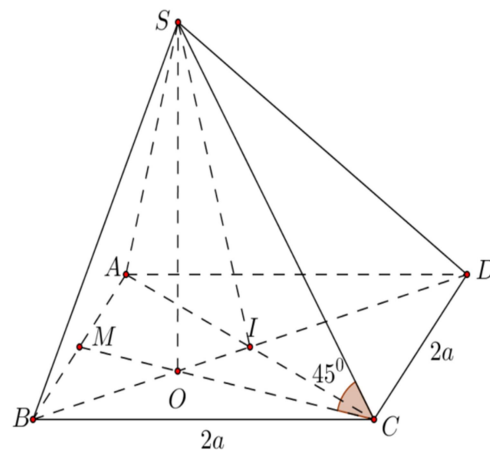
Ta có $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm của AB .

$$\text{Khi đó đường cao } AM = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } OC = \frac{2}{3}CM = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = OC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{ABCD} = 2a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ = 2a^2\sqrt{3}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 2a^2\sqrt{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^3}{3}.$$



0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

b) (3 điểm).

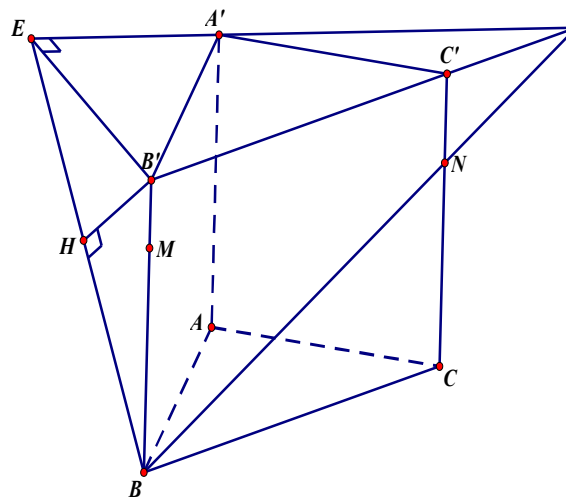
Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC \cos \widehat{BAC}$
 $= 1^2 + 2^2 - 2.1.2.\cos 120^\circ = 7$. Suy ra
 $BC = \sqrt{7}$.

Ta cũng có $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$

$$= \frac{1^2 + \sqrt{7}^2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}, \text{ suy ra } \cos \widehat{A'B'C} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Gọi $D = BN \cap B'C'$, suy ra $\frac{DC'}{DB'} = \frac{C'N}{B'B} = \frac{1}{3}$,

nên $DB' = \frac{3}{2}B'C' = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.



Từ đó, ta có $A'D^2 = A'B'^2 + B'D^2 - 2.A'B'.B'D.\cos \widehat{A'B'D} = 1^2 + \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2.1.\frac{3\sqrt{7}}{2}.\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{43}{4}$.

Hay $A'D = \frac{\sqrt{43}}{2}$.

Kẻ $B'E \perp A'D$ và $B'H \perp BE$, suy ra $B'H \perp (A'BN)$, do đó $d(B'; (A'BN)) = B'H$.

$$\text{Từ } \cos \widehat{A'B'C} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin \widehat{A'B'C} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$
$$\text{Do đó } S_{A'B'D} = \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot B'D \cdot \sin \widehat{A'B'D} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$
$$B'E = \frac{2S_{A'B'D}}{A'D} = \frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{43}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}; \frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'E^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\right)^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{46}{27} \Rightarrow B'H = \sqrt{\frac{27}{46}}.$$

Từ $BM = 3B'M$ suy ra $d(M; (A'BN)) = \frac{3}{4}d(B'; (A'BN)) = \frac{3}{4}.B'H = \frac{3}{4}.\sqrt{\frac{27}{46}} = \frac{9\sqrt{138}}{184}$.

Câu 5 (1,5 điểm).

Gọi $N = AM \cap BC$, kẻ $MM_1 // OA$ thì ta có $\begin{cases} OA \perp (OBC) \\ MM_1 // OA \end{cases} \Rightarrow MM_1 \perp (OBC)$

$$\begin{aligned} & \text{kẽ } MA_1 \perp OA, A_1 \in OA. \text{ Khi đó } AM^2 = AA_1^2 + MA_1^2 = AA_1^2 + MO^2 - OA_1^2 \\ & = OM^2 + (AA_1 - OA_1)(AA_1 + OA_1) = OM^2 + OA(OA - 2OA_1) \end{aligned}$$

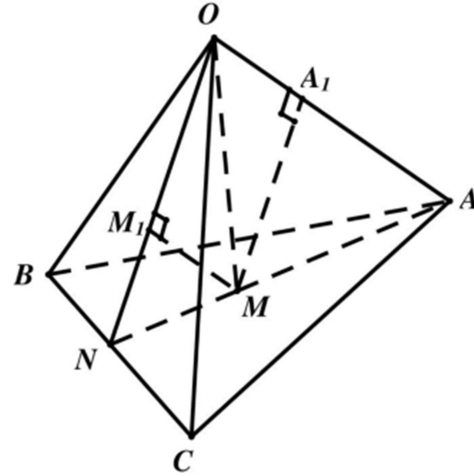
$$= OM^2 + OA^2 - 2OA \cdot OA_1$$

$$\text{Suy ra } \frac{AM^2}{OA^2} = \frac{OM^2}{OA^2} + 1 - \frac{2OA_1}{OA} \quad (1).$$

Tương tự gọi B_1, C_1 là các điểm tương tự như A_1 ta có

$$\frac{MB^2}{OB^2} = \frac{OM^2}{OB^2} + 1 - \frac{2OB_1}{OB} \quad (2)$$

$$\frac{MC^2}{OC^2} = \frac{OM^2}{OC^2} + 1 - \frac{2OC_1}{OC} \quad (3)$$



$$\text{Từ (1),(2),(3) ta có } T = OM^2 \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right) - 2 \left(\frac{OA_1}{OA} + \frac{OB_1}{OB} + \frac{OC_1}{OC} \right) + 3$$

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì ta đã biết kết quả quen thuộc

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2} \text{ nên } T = \frac{OM^2}{OH^2} - 2 \left(\frac{OA_1}{OA} + \frac{OB_1}{OB} + \frac{OC_1}{OC} \right) + 3$$

$$\text{Mặt khác } \frac{OA_1}{OA} = \frac{NM}{NA} = \frac{S_{MhC}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Tương tự } \frac{OB_1}{OB} = \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \frac{OC_1}{OC} = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} \text{ nên } \frac{OA_1}{OA} + \frac{OB_1}{OB} + \frac{OC_1}{OC} = 1$$

$$\text{Do đó } T = \frac{OM^2}{OH^2} + 1 \geq 2 \text{ do } OM \geq OH. \text{ Vậy } \min T = 2 \text{ khi } M \equiv H.$$