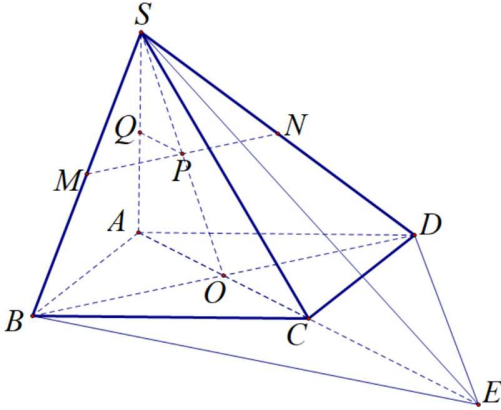
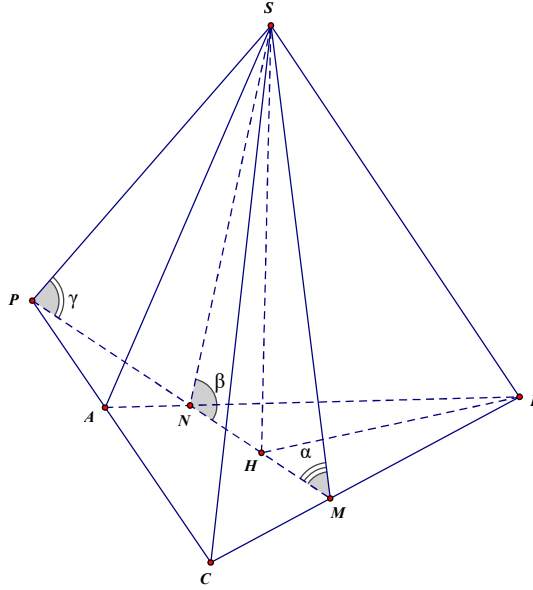


Câu	Nội dung	Điểm
1a (3,5 đ)	Hàm số $f(x) = -2x - 3\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ có tất cả bao nhiêu điểm cực đại ?	3,5
	Tập xác định $D = \mathbb{R}$ Ta có $y' = -2 - 3 \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}; y'' = \frac{-3}{\sqrt{(x^2 - 2x + 2)^3}} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = -\frac{2}{3}$ Xét hàm số $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ có $g'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 - 2x + 2})^3} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ + lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm 1$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = -\frac{2}{3}$ có đúng một nghiệm x_0 trên $\mathbb{R}$, mà $y''(x_0) < 0$ nên x_0 là điểm cực đại duy nhất của hàm số đã cho KL: Hàm số đã cho có đúng một điểm cực đại.	1.0 0.5 0.5 1.0 0.5
1b (3.0 đ)	Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm	3.0
	$\sqrt{x^6 - x^4} - (x+1)\sqrt{x} = 3m\sqrt{x}(\sqrt{x} + m) + m^3 + m \quad (1)$ ĐKXD: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \end{cases}$ + Khi $x = 0$ thì $m = 0$. + Khi $x \geq 1$ thì (1) $\Leftrightarrow (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1} = (\sqrt{x} + m)^3 + (\sqrt{x} + m)$ Hàm số $f(x) = t^3 + t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà phương trình đã cho có dạng $f(\sqrt{x^2 - 1}) = f(\sqrt{x} + m)$ nên (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x} + m \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x} = m$ Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x}$ với $x \in [1; +\infty)$, hàm số này liên tục trên $[1; +\infty)$. $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \forall x \in (1; +\infty)$ (do $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 1, \forall x \in (1; +\infty)$, $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in (1; +\infty)$) do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$, mà $\begin{cases} g(1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -1$. KL: Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -1$.	0.5 0.5 1.0 1.0

Câu 2. (5.5 đ)	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi $AB = a, \widehat{BAD} = 120^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = x$ (thay đổi). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD .	5.5
2a (2.5đ)	a) Trong trường hợp $SA = a$, hãy tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và MN .	2.0
	 Từ giả thiết $AS = AB = AD = a$ suy ra M, N lần lượt là trung điểm của AB, SD do đó $MN \parallel BD$, mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp SA$ (1). Gọi Q là trung điểm SA, $P = MN \cap SO$ (với O là tâm đáy) thì PQ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và MN do đó $d(SA, MN) = PQ = \frac{AO}{2} = \frac{a}{4}$.	0.5 0.5 0.5 0.5
	b) Tính x (theo a) để góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AMN) bằng 60° .	2.5
	Để thấy C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, gọi E là điểm đối xứng A qua C. Lúc đó $AM \perp (SBE), AN \perp (SDE)$ và do đó $SE \perp (AMN)$, lại có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AMN) bằng góc giữa hai đường thẳng SA, SE và bằng $\widehat{ASE}$ Mà $AE = 2AC = 2a$ nên để góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AMN) bằng 60° thì $\widehat{ASE} = 60^\circ \Leftrightarrow SA = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.	1.5 1.0
Câu 3a. (3,0 đ)	a) Danh sách lớp 12A1 có 40 học sinh được đánh số thứ tự từ 1 đến 40, giáo viên chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên 4 học sinh trong lớp đi lao động. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có số thứ tự trong bản danh sách lập thành một cấp số cộng?	3.0
	Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{40}^4$. Gọi biến cố A: “Trong 4 học sinh được chọn có số thứ tự trong bản danh sách lập thành một cấp số cộng”. Gọi: $a, (a \geq 1)$ là số thứ tự của học sinh đầu tiên và d là công sai của cấp số cộng. Khi đó số thứ tự của 4 học sinh lần lượt là: $a, a + d, a + 2d, a + 3d$. Suy ra: $\begin{cases} a \geq 1 \\ a + 3d \leq 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ d \leq \frac{40-a}{3} \Rightarrow d \leq \frac{40-a}{3} \leq 13. \end{cases}$	0.5 0.5 1.0

	Suy ra số cấp số cộng là: $\sum_{d=1}^{13} (40 - 3d) = 247 \Rightarrow n(A) = 247$. Vậy xác suất sao cho 4 học sinh được chọn có số thứ tự trong bản danh sách lập thành một cấp số cộng là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{247}{C_{40}^4}$.	0.5												
Câu 3b. (2.0 đ)	b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m + 3 - 4x$ bằng -5	2.5												
	Xét $f(x) = x^2 - 4x + m + 3$ có $\Delta' = 1 - m$. TH1. $m \geq 1$: $f(x) \geq 0 \forall x \Leftrightarrow y = x^2 - 8x + m + 3$. <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>4</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>$m - 13$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> $\min y = -5 \Leftrightarrow m = 8$ (TM).	x	$-\infty$	4	$+\infty$	y	$+\infty$	$m - 13$	$+\infty$	0.5				
x	$-\infty$	4	$+\infty$											
y	$+\infty$	$m - 13$	$+\infty$											
	TH2. $m < 1$: $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{1 - m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{1 - m}$. $\square$ Nếu $x \in (x_1; x_2)$: $y = -x^2 - 3 - m$. $y(x_1) = -8 + 4\sqrt{1 - m}$. $y(x_2) = -8 - 4\sqrt{1 - m}$. $\Rightarrow y(x_1) < y(x_2)$ $\Rightarrow \min_{(x_1; x_2)} y = -8 - 4\sqrt{1 - m} < -8$ (Không TM).	0.5												
	$\square$ Nếu $x \notin (x_1; x_2)$: $y = x^2 - 8x + 3 + m$. +) $x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 > m > -3$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>4</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td></td><td>$m - 13$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> $\min y = m - 13 = -5 \Leftrightarrow m = 8$ (Loại).	x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$	y	$+\infty$			$m - 13$	$+\infty$	0.5
x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$									
y	$+\infty$			$m - 13$	$+\infty$									
	+) $x_2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -3$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>4</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>$-8 + 4\sqrt{1 - m}$</td><td></td><td>$-8 - 4\sqrt{1 - m}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> $\Rightarrow \min y = -8 - 4\sqrt{1 - m} < -8$ (Không TM). Vậy $m = 8$.	x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$	y	$+\infty$	$-8 + 4\sqrt{1 - m}$		$-8 - 4\sqrt{1 - m}$	$+\infty$	0.5
x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$									
y	$+\infty$	$-8 + 4\sqrt{1 - m}$		$-8 - 4\sqrt{1 - m}$	$+\infty$									
Câu 4. (1.5 đ)	Cho hình chóp đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng nhau, H là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (Q) thay đổi luôn đi qua SH và cắt các mặt phẳng chứa các mặt bên của hình chóp theo ba đường thẳng tạo với mặt phẳng (ABC) các góc α, β, γ . Chứng minh rằng $\tan \alpha . \tan \beta . \tan \gamma < 8$	1.5												



Trước hết ta chứng minh $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12$

Xét hình chóp đều $S.ABC$ cạnh a , đường cao SH .

(Q) là mặt phẳng qua SH và $\begin{cases} (Q) \cap (SBC) = SM \\ (Q) \cap (SAB) = SN \\ (Q) \cap (SAC) = SP \end{cases}$ (Hình vẽ).

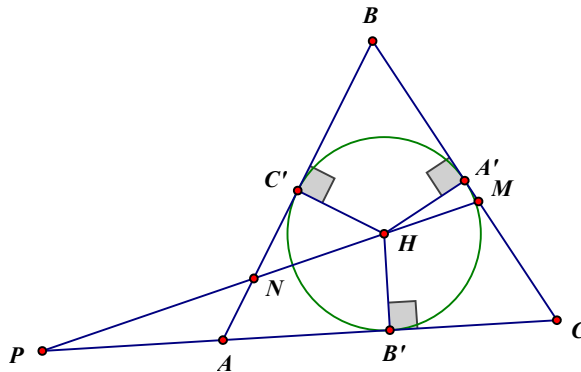
Khi đó $\widehat{SMH} = \alpha$, $\widehat{SNH} = \beta$, $\widehat{SPH} = \gamma$.

Ta có $\tan \alpha = \frac{SH}{HM}$, $\tan \beta = \frac{SH}{HN}$, $\tan \gamma = \frac{SH}{HP}$.

Dễ tính được $SH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ nên hệ thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HP^2} = \frac{18}{a^2} (1).$$

0.5



Vì hình chóp $S.ABC$ đều nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp ΔABC .

Gọi A', B', C' tương ứng là trung điểm của BC, AC, AB .

	Khi đó $HA' \perp BC, HB' \perp AC, HC' \perp AB$ và $\widehat{A'HB'} = \widehat{B'HC'} = \widehat{C'HA'} = 120^\circ$. Đặt $\widehat{MHA'} = x, \widehat{PHB'} = y, \widehat{NHC'} = z$ thì $x + z = 60^\circ$ và $y + z = 120^\circ$. Suy ra $\begin{cases} z = 60^\circ - x \\ y = 60^\circ + x \end{cases}$ Ta có $\cos x = \frac{HA'}{HM} \Rightarrow HM = \frac{HA'}{\cos x}$. Mà $HA' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ nên $HM = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos x}$. Chứng minh tương tự có $HN = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos z}, HP = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos y}$. Do đó $VT(1) = \frac{12}{a^2} \cdot (\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z)$ Mặt khác $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \cos^2 x + \cos^2(60^\circ + x) + \cos^2(60^\circ - x)$ $= \frac{1}{2} [1 + \cos 2x + 1 + \cos(120^\circ + 2x) + 1 + \cos(120^\circ - 2x)]$ $= \frac{1}{2} (3 + \cos 2x + 2\cos 120^\circ \cdot \cos 2x)$ $= \frac{1}{2} (3 + \cos 2x - \cos 2x) = \frac{3}{2}$ Suy ra $VT(1) = \frac{12}{a^2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{a^2}$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm $\tan^2 \alpha, \tan^2 \beta, \tan^2 \gamma$ ta có $12 = \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma \geq 3\sqrt[3]{\tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta \cdot \tan^2 \gamma}$ $\Leftrightarrow 8 \geq \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma \text{ nhưng do } \tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma \text{ không cùng bằng nhau nên}$ không xảy ra dấu “=” và do đó suy ra đpcm.	0.5 0.5
Câu 5. (1.5 đ)	Cho x, y là những số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4 + y^4 - 2}{x^2 + y^2 + 1}$.	1.5
	Theo giả thiết $x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 3xy = 1$ (1) Đặt $\begin{cases} s = x + y \\ p = x \cdot y \end{cases}$. Điều kiện $s^2 \geq 4p$. Khi đó (1) trwro thành $s^2 - 3p = 1 \Leftrightarrow s^2 = 3p + 1 \geq 0 \Rightarrow p \geq -\frac{1}{3}$ Mà $s^2 \geq 4p$ nên lại có $3p + 1 \geq 4p \Leftrightarrow p \leq 1$ Ta có $x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = xy + 1$ $x^4 + y^4 - 2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 - 2 = (1 + xy)^2 - 2(xy)^2 - 2$	0.5

