

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A. Kiến thức

1. Định nghĩa: Số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên

(tức là nếu n là số chính phương thì $n = k^2 (k \in \mathbb{Z})$)

Ví dụ: $4 = 2^2; 16 = 4^2$

2. Tính chất

1) Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 không thể có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8

Như vậy để chứng minh một số không phải số chính phương ta chỉ ra số đó có hàng đơn vị là 2, 3, 7, 8

2) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các TSNT với số mũ chẵn, không chứa TSNT với số mũ lẻ

Ví dụ: $3600 = 60^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$\Rightarrow$ Để chứng minh một số không phải SCP ta chỉ ra số đó khi phân tích ra TSNT thì có số mũ lẻ

3) Số chính phương chỉ có thể có 1 trong 2 dạng $3n$ hoặc $3n+1$ ($a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$) không có SCP nào có dạng $3n+2$ ($n \in \mathbb{N}$)

4) Số chính phương chỉ có thể có 1 trong 2 dạng $4n$ hoặc $4n+1$ ($a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$) không có SCP nào có dạng $4n+2$ hoặc $4n+3$ ($n \in \mathbb{N}$)

5) Số các ước số của một số chính phương là số lẻ, ngược lại một số có số lượng các ước là lẻ thì đó là số chính phương

6) Nếu số chính phương chia hết cho p thì chia hết cho p^2

7) Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là các số chính phương

ab là SCP và $(a, b) = 1 \Rightarrow a, b$ đều là các số chính phương

8) Số chính phương tận cùng bằng 1 hoặc 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn (121, 49, ...)

- Số chính phương tận cùng là 5 thì chữ số hàng chục là 2

- Số chính phương tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là lẻ

9) Mọi SCP khi chia cho 5, cho 8 chỉ dư 0, 1, 4

10) Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào

11) Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó là số 0

12) Nếu $n^2 < k < (n+1)^2$ ($n \in \mathbb{Z}$) thì k không là số chính phương

13) Nếu tích hai số a và b là một số chính phương thì các số a và b có dạng $a = mp^2; b = mq^2$

***) HỆ QUẢ:** Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4

- Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9

- Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25

- Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16

B. Các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương, hoặc tổng nhiều số là số chính phương

Cách giải:

- Để chứng minh một số n là số chính phương ta thường dựa vào định nghĩa, tức là chứng minh $n = k^2$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài 1:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì $A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là một số chính phương

Lời giải

Cách 1: Ta có: $A = (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4 = x^4 + 10x^3y + 35x^2y^2 + 50xy^3 + 25y^4$

$$= (x^2 + 5xy)^2 + 2(x^2 + 5xy) \cdot 5y^2 + (5y^2)^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2, 5xy, 5y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow A$ là số chính phương

Cách 2: Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t$ ($t \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 2:

Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 luôn là số chính phương.

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là: $n, n+1, n+2, n+3 (n \in \mathbb{N})$

Ta có: $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $(n^2+3n+1) \in \mathbb{N}$

Vậy tích của bốn số tự nhiên liên tiếp luôn là số chính phương (*đpcm*).

Bài 3:

Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là số chính phương.

Lời giải

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp là: $n-2, n-1, n, n+1, n+2 (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

Ta có: $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$

Vì n^2 là số chính phương nên n không thể có chữ số tận cùng là 3 hoặc 8 nên $n^2 + 2$ không chia hết cho 5, hay $5(n^2 + 2)$ không phải là số chính phương (*đpcm*).

Bài 4:

Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Lời giải

Gọi hai số chính phương liên tiếp lần lượt là: a^2 và $(a+1)^2 (a \in \mathbb{Z})$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 &= a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^4 + 2a^3 + a^2) + (2a^2 + 2a + 1) = (a^2 + a)^2 + 2(a^2 + a) + 1 \\ &= (a^2 + a + 1)^2 \text{ là số chính phương lẻ vì } a^2 + a = a(a+1) \text{ là số chẵn } \Rightarrow a^2 + a + 1 \text{ là số lẻ.} \end{aligned}$$

Bài 5:

Chứng minh rằng số $n^2 + 2014$ với n nguyên dương không phải là số chính phương

Lời giải

Giả sử $n^2 + 2014$ là số chính phương

$$\text{Đặt } n^2 + 2014 = k^2 \Rightarrow k^2 - n^2 = 2014 \Leftrightarrow (k+n)(k-n) = 2014$$

Ta có $(k+n) - (k-n) = 2n$ chẵn $\Rightarrow k+n, k-n$ cùng tính chất chẵn lẻ $\Rightarrow k, n$ cùng tính chẵn lẻ

Mặt khác ta lại có: $(k+n)(k-n) = 2014 \Rightarrow k-n; k+n$ đều chia hết cho 2 hay $(k-n)(k+n) : 4$

Mà $2014 : 4 \Rightarrow (k+n)(k-n) \neq 2014$

Vậy không có số nguyên dương nào của n để $n^2 + 2014$ là số chính phương (**đpcm**).

Bài 6:

Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Lời giải

Vì a, b là hai số lẻ, ta đặt $\begin{cases} a = 2k+1 \\ b = 2m+1 \end{cases} (k, m \in \mathbb{N}) \Rightarrow a^2 + b^2 = 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 = 4t + 2 (t \in \mathbb{N})$

Không có số chính phương nào dạng $4t^2 + 2 (t \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow a^2 + b^2$ không phải số chính phương (**đpcm**).

Bài 7:

Cho 5 số chính phương bất kỳ có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6. Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số SCP

Lời giải

Cách 1: Ta đã biết một số chính phương có chữ số hàng đơn vị là 6 thì chữ số hàng chục là lẻ. Vì vậy chữ số hàng chục của 5 số chính phương đã cho là: 1, 3, 5, 7, 9

Khi đó tổng của chúng là: $25 = 5^2$ là số chính phương

Cách 2: Nếu một số chính phương $M = a^2$ có chữ số hàng đơn vị là 6 thì chữ số tận cùng của a là 4 hoặc 6 nên $a : 2 \Rightarrow a : 4$

Theo dấu hiệu chia hết cho 4 thì hai chữ số tận cùng của M chỉ có thể là 16, 36, 56, 76, 96

Do đó ta có: $1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$ là số chính phương

Bài 8: Chứng minh rằng các số sau là số chính phương

a) $A = \underbrace{11\dots1}_{n+1} \underbrace{55\dots5}_n 6$

b) $B = \underbrace{11\dots11}_{1997} \underbrace{22\dots22}_{1998} 5$

c) $A = \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ chũs } 01} + \underbrace{44\dots4}_{n \text{ chũs } 04} + 1$

d) $A = \underbrace{11\dots1}_{2n} + \underbrace{11\dots1}_{n+1} + \underbrace{66\dots6}_n + 8 = \left(\frac{10^n + 8}{3} \right)^2$

e) $A = \underbrace{44\dots4}_{2n} + \underbrace{22\dots2}_{n+1} + \underbrace{88\dots8}_n + 7 = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 7}{3} \right)^2$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = \underbrace{11\dots 1}_{n+1} \cdot 10^{n+1} + \underbrace{55\dots 5}_n \cdot 10 + 6 = \frac{99\dots 9}{9} \cdot 10^{n+1} + \underbrace{55\dots 5}_n \cdot 10 + 6 = \frac{10^{n+1}-1}{9} \cdot 10^{n+1} + \frac{5(10^n-1)}{9} \cdot 10 + 6$$

$$A = \frac{10^{2n+2} - 10^{n+1} + 5 \cdot 10^{n+1} - 50 + 54}{9} = \frac{10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4}{9} = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3} \right)^2$$

$$\text{b) } B = \underbrace{11\dots 11}_{1997} \cdot 10^{1999} + \underbrace{22\dots 22}_{1998} \cdot 10 + 5 = \frac{1}{9}(10^{1997}-1) \cdot 10^{1999} + \frac{2}{9}(10^{1998}-1) \cdot 10 + 5$$

$$= \frac{1}{9}(10^{3996} + 2 \cdot 5 \cdot 10^{1998} + 25) = \left[\frac{1}{3}(10^{1998} + 5)^2 \right]^2 = \left(\frac{100\dots 005}{3} \right)^2$$

$$\text{c) Ta có: } 1 = \frac{10^1-1}{9}; 11 = \frac{10^2-1}{9}; 111 = \frac{10^3-1}{9}$$

$$A = \frac{10^{2n}-1}{9} + \frac{4(10^n-1)}{9} + 1 = \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2$$

Vì $10^{n+2} \div 3 \Rightarrow A$ là số chính phương

$$\text{d) Ta có: } A = \underbrace{11\dots 1}_{2n} + \underbrace{11\dots 1}_{n+1} + \underbrace{66\dots 6}_n + 8 = \left(\frac{10^n + 8}{3} \right)^2$$

$$\text{e) Ta có: } A = \underbrace{44\dots 4}_{2n} + \underbrace{22\dots 2}_{n+1} + \underbrace{88\dots 8}_n + 7 = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 7}{3} \right)^2$$

Bài 9: Chứng minh rằng các số sau là số chính phương

Cho $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + k(k+1)(k+2)$. Chứng minh rằng $4S+1$ là số chính phương

Lời giải

$$\text{Ta có: } k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)[(k+3)-(k-1)] = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) \Rightarrow 4S+1 = k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = (k^2+3k+1)^2 \text{ là số chính phương.}$$

Bài 10: Khó

Cho một dãy số có số đầu tiên là 16, các số sau được tạo ra bằng cách viết thêm số 15 vào chính giữa số liền trước nó: 16, 1156, 111556, ... Chứng minh rằng mọi số của dãy đều là số chính phương

Lời giải

Trong mỗi số của dãy trên, số chữ số 5 luôn ít hơn số chữ số 1 là một chữ số

Đặt $A = \underbrace{11\dots11}_{n.\text{chữ.số.1}}.\underbrace{55\dots55}_{n-1.\text{chữ.số.5}}$ thuộc dãy số trên. Ta sẽ chứng minh A là số chính phương

Thật vậy, đặt $a = \underbrace{11\dots11}_{n.\text{chữ.số.1}} \Rightarrow 10^n = 9a + 1$

Ta có:

$$A = \underbrace{11\dots11}_{n.\text{chữ.số.1}}.10^n + 5.\underbrace{11\dots11}_{n-1.\text{chữ.số.1}}.10 + 5 + 1 = \underbrace{11\dots11}_{n.\text{chữ.số.1}}.10^n + 5.\underbrace{11\dots11}_{n.\text{chữ.số.1}} + 1 = a(9a + 1) + 5a + 1 = (3a + 1)^2 = \underbrace{33\dots33}_{n-1.\text{chữ.số.3}}4^2$$

Vậy A là số chính phương.

Bài 11:

Cho $a = \underbrace{11\dots1}_{2016}; b = \underbrace{10\dots05}_{2015}$. Chứng minh rằng $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $b = \underbrace{10\dots05}_{2015} = \underbrace{10\dots0}_{2016} - 1 + 6 = \underbrace{9\dots9}_{2016} + 5 = 9a + 6 \Rightarrow ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a+1 \in \mathbb{N}$$

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Cách 2:

Ta có: $a = \underbrace{11\dots1}_{2016} = \frac{10^{2016} - 1}{9}; b = \underbrace{10\dots05}_{2015} \Rightarrow ab + 1 = \frac{10^{2016} - 1}{9} \cdot (10^{2016} + 5) + 1 = \frac{(10^{2016})^2 + 4 \cdot 10^{2016} - 5 + 9}{9}$

$$= \left(\frac{10^{2016} + 2}{3} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{ab+1} = \left(\frac{10^{2016} + 2}{3} \right)$$

Mà $(10^{2016} + 2) : 3 \Rightarrow \sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Bài 12:

Cho số tự nhiên a gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên b gồm 30 chữ số 2. Chứng minh $a-b$ là một số tự nhiên.

Lời giải

Cách 1: Ta có $a = \underset{60}{11\dots1} = \frac{10^{60}-1}{9}$; $b = \underset{30}{22\dots2} = 2 \cdot \frac{10^{30}-1}{9} \Rightarrow a-b = \frac{10^{60}-1}{9} - 2 \cdot \frac{(10^{30}-1)}{9} = \frac{10^{60}-2 \cdot 10^{30}+1}{9}$

$$= \left[\frac{10^{30}-1}{3} \right]^2 = \left(\underset{30}{33\dots3} \right)^2$$

Cách 2: Ta có $b = \underset{30}{22\dots2} = 2 \cdot \underset{30}{11\dots1}$; $a = \underset{60}{11\dots1} = \underset{30}{11\dots1} \cdot \underset{30}{1.00\dots0} + \underset{30}{11\dots1} = \underset{30}{11\dots1} \cdot 10^{30} + \underset{30}{11\dots1}$

Đặt $c = \underset{30}{11\dots1} \Rightarrow 9c+1 = \underset{30}{99\dots9}+1 = 10^{30} \Rightarrow a = c \cdot (9c+1) + c = 9c^2 + 2c$. $b = 2c \Rightarrow a-b = 9c^2 + 2c - 2c = (3c)^2$

$$= \left(\underset{30}{33\dots3} \right)^2.$$

Bài toán tổng quát: Cho k số tự nhiên khác 0, số tự nhiên a gồm $2k$ chữ số 1 và số tự nhiên b gồm k chữ số 2. Chứng minh rằng $a-b$ là một số tự nhiên.

Bài 13:

Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải

Giả sử ta có $\frac{n^2-1}{3} = a(a+1)$.

Từ đó ta có $n^2 = 3a^2 + 3a + 1 \Rightarrow 4n^2 - 1 = 12a^2 + 12a + 3 \Rightarrow (2n-1)(2n+1) = 3(2a+1)^2$

Vì $2n-1, 2n+1$ là hai số lẻ liên tiếp nên ta có các trường hợp sau

- TH1: $\begin{cases} 2n-1=3p^2 \\ 2n+1=q^2 \end{cases} \Rightarrow q^2 = 3p^2 + 2$ (vô lý). Vậy trường hợp này không xảy ra

- TH2: $\begin{cases} 2n-1=p^2 \\ 2n+1=3q^2 \end{cases} \Rightarrow p$ là số lẻ nên $p=2k+1$

Từ đó $2n = (2k+1)^2 + 1 \Rightarrow n = k^2 + (k+1)^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 14:

Cho k là một số nguyên dương và $a = 3k^2 + 3k + 1$

a) Chứng minh rằng $2a$ và a^2 là tổng của ba số chính phương

b) Chứng minh rằng nếu a là một ước của một số nguyên dương b và b là một tổng gồm ba số chính phương thì b^n là một tổng của ba số chính phương.

Lời giải

a) Ta có: $2a = 6k^2 + 6k + 2 = (2k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2$

và $a^2 = 9k^4 + 18k^3 + 15k^2 + 6k + 1 = (k^2 + k)^2 + (2k^2 + 3k + 1)^2 + (2k^2 + k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

b) Vì $b \vdots a$ nên đặt $b = ca$

Vì b là tổng của ba số chính phương nên đặt $b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

Khi đó $b^2 = c^2 \cdot a^2 = c^2 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$

Để kết thúc việc chứng minh, ta tiến hành như sau: Cho $n = 2p+1$ ta được:

$b^{2p+1} = (b^p)^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$ và cho $n = 2p+2$ ta được $b^n = (b^p)^2 b^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$

Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương

Cách giải: Để chứng minh n không là số chính phương, tùy vào từng bài ta có thể sử dụng các cách sau

- 1) Chứng minh n không thể viết được dưới dạng bình phương của một số nguyên
- 2) Chứng minh $k^2 < n < (k+1)^2$ với k là số nguyên
- 3) Chứng minh n có tận cùng là 2, 3, 7, 8
- 4) Chứng minh n có dạng $4n+2; 4n+3$
- 5) Chứng minh n có dạng $3k+2$
- 6) Chứng minh n chia hết cho số nguyên tố p mà không chia hết cho p^2 .

Bài 1: BTVN

Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 thì có thể là số chính phương được hay không? Tại sao?

Lời giải

Gọi số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 là n

Ta có: $2018 = 3m+2$ nên số tự nhiên n chia 3 dư 2, do đó số n có dạng $3k+2 (k \in \mathbb{N})$

Mặt khác một số chính phương không có dạng $3k+2 \Rightarrow$ số tự nhiên n không là số chính phương

Bài 2:

Chứng minh rằng số $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 (n \in \mathbb{N}, n > 1)$ không phải là số chính phương

Lời giải

Ta có $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = (n^4 + 2n^3 + n^2) + (n^2 + 2n + 1) = (n^2 + n)^2 + (n+1)^2 > (n^2 + n)^2, \forall n > 1$

$\Rightarrow A > (n^2 + n)^2, \forall n > 1$ (1)

Mặt khác $(n^2 + n + 1)^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1 + n^2 = A + n^2 > A, \forall n > 1$

$\Rightarrow A < (n^2 + n + 1)^2$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow (n^2 + n)^2 < A < (n^2 + n + 1)^2$

Ta có $n^2 + n$ và $n^2 + n + 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên A không thể là số chính phương.

Bài 3:

Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Lời giải

Ta có: $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{33} = 1 + 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + \dots + (2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33})$

$A = 3 + 2^2(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{30}(1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 3 + 2 \cdot 30 + \dots + 2^{29} \cdot 30$

$A = 3 + (2 + \dots + 2^{29}) \cdot 3 \cdot 10$ có chữ số tận cùng là 3. Do đó A không là số chính phương.

Bài 4: Vào 10 chuyên ĐHSP TPHCM, năm học 2015 - 2016

Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n

Lời giải

Ta có: $2012^{4n} : 4, 2014^{4n} : 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$2013^{4n} = 2013^{4n} - 1 + 1 = (2013^{4n} - 1) + 1$ chia cho 4 dư 1

$2015^{4n} = 2015^{4n} - (-1)^{4n} + 1$ chia cho 4 dư 1

Do đó $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2

Ta có: $A : 2$, nhưng A không chia hết cho 2^2

Mà 2 là số nguyên tố $\Rightarrow A$ không là số chính phương.

Bài 5:

Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2, n \in \mathbb{N}, (n > 1)$ không phải số chính phương

Lời giải

Ta có :

$n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n^4 - n^2 + 2n + 2) = n^2[n^2(n+1)(n-1) + 2(n+1)] = n^2(n+1)(n^3 - n^2 + 2)$

$= n^2(n+1)[(n^3 + 1) - (n^2 - 1)] = n^2(n+1)[(n+1)(n^2 - n + 1) - (n+1)(n-1)] = n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2)$

Ta đi chứng minh $n^2 - 2n + 2$ không phải số chính phương (dựa vào $n^2 < A < (n+1)^2$)

Ta có:

$$n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2; n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2 \Rightarrow (n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$$

$\Rightarrow n^2 - 2n + 2$ Không phải số chính phương (đpcm).

Bài 6: BTVN

a) Cho $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Chứng minh rằng: $A+4$ không là số chính phương

b) Cho $B = 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{100}$. Chứng minh rằng: $2B+3$ không là số chính phương

Lời giải

a) Ta có: $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20} \Rightarrow 2A = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{21} \Rightarrow 2A - A = A = 2^{21} - 2^2 \Rightarrow A + 4 = 2^{21} = 2 \cdot (2^{10})^2$

Không phải là số chính phương

b) Ta có: $B = 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{100} \Rightarrow 3B = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{101} \Rightarrow 2B + 3 = 3^{101} = 3 \cdot (3^{50})^2 \Rightarrow$ đpcm.

Dạng 3: Tìm giá trị của biến để biểu thức là số chính phương

Cách giải: Chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau

Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa

Phương pháp 2: Sử dụng tính chẵn lẻ

Phương pháp 3: Sử dụng tính chất chia hết và chia có dư

Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất

Bài 1:

Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương

a) $n^2 + 2n + 12$

b) $n(n+3)$

d) $n^2 + n + 1598$

e) $n^2 + 4n + 2013$

Lời giải

a) Đặt $n^2 + 2n + 12 = k^2 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n^2 + 2n + 1) - k^2 = -11 \Leftrightarrow k^2 - (n+1)^2 = 11$

$$\Leftrightarrow (k+n-1)(k-n-1) = 1.11 = (-1).(-11)$$

Ta lại có: $k+n-1 > k-n-1$

+) TH1: $\begin{cases} k+n-1=11 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+n=12 \\ k-n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=6 \\ n=4 \end{cases}$ (thỏa mãn)

+) TH2: $\begin{cases} k+n-1=-1 \\ k-n-1=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+n=0 \\ k-n=-10 \end{cases}$ (loại)

Vậy $n=4$ là giá trị cần tìm

b) $n(n+3) = a^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4a^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 9 = 4a^2 + 9 \Leftrightarrow (2n+3)^2 - 4a^2 = 9$

$$\Leftrightarrow (2n+3-2a)(2n+3+2a) = 9$$

Ta có: $2n+3+2a \geq 2n+3-2a$ và $9 = 9.1 = 3.3 = (-1).(-9) = (-3).(-3)$, nên có 4 trường hợp:

+) TH1: $\begin{cases} 2n+3+2a=9 \\ 2n+3-2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ a=2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

+) TH2: $\begin{cases} 2n+3+2a=3 \\ 2n+3-2a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+a=0 \\ n-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ a=0 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$$+) \text{ TH3: } \begin{cases} 2n+3+2a=-1 \\ 2n+3-2a=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-4 \\ a=2 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+) \text{ TH4: } \begin{cases} 2n+3+2a=-3 \\ 2n+3-2a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+a=-3 \\ n-a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-3 \\ a=0 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy $n=0;1$ là giá trị cần tìm.

$$c) \text{ Đặt } n^2 + n + 1598 = m^2 (m \in N) \Rightarrow (4n^2 + 4n + 1) + 6355 = 4m^2 \Rightarrow (2n+1)^2 + 6355 = m^2$$

$$(2m+2n+1)(2m-2n-1) = 6355 = 6355.1 = 155.41 = 271.5 = 205.31$$

Ta có: $2m+2n+1 > 2m-2n-1$ và là các số lẻ nên có 4 trường hợp

$$\Rightarrow n \in \{1588, 316, 43, 28\}$$

$$d) \text{ Đặt } n^2 + 4n + 2013 = m^2 (m \in N) \Rightarrow (n+2)^2 + 2009 = m^2$$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m+n-2) = 2009.1 = 287.7 = 49.41$$

Vì $m+n+2 > m+n-2$ nên ta có 3 trường hợp xảy ra.

Bài 2:

Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương

Lời giải

$$\text{Đặt } n^2 - 14n - 256 = k^2 (k \in N) \Leftrightarrow (n-7)^2 - k^2 = 305 \Leftrightarrow (n-k-7)(n+k-7) = 305$$

$$= 305 = 61.5 = (-1)(-305) = (-61)(-5)$$

$$\text{Do } n, k \in N \Rightarrow n+k-7 > n-k-7$$

$$+) \begin{cases} n+k-7=61 \\ n-k-7=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=40 \\ k=32 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+) \begin{cases} n+k-7=1 \\ n-k-7=305 \end{cases} \Leftrightarrow n=160 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+) n-k-7=-305 \Rightarrow n=-146 \text{ (loại)}$$

$$+) n-k-7=-61 \Rightarrow n=-26 \text{ (loại)}$$

Bài 3:

Tìm số nguyên n sao cho $n+1955$ và $n+2014$ là một số chính phương

Lời giải

$$\text{Giả sử } n+1955 = a^2; n+2014 = b^2 \text{ với } (a, b \in N; a < b)$$

$$\text{Khi đó } b^2 - a^2 = 59 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 59 \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=1 \\ b+a=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=29 \\ b=30 \end{cases}$$

Suy ra được $n = -1114$

Bài 4:

Tìm số tự nhiên n có hai chữ số sao cho nếu cộng số đó với số có hai chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì ta được một số chính phương

Lời giải

Gọi số cần tìm là: $\overline{ab} (1 \leq a, b \leq 9)$

Số viết theo thứ tự ngược lại là: $\overline{ba}$

Tổng của hai số đó là: $\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a+b)$

Vì tổng của hai số là số chính phương, đặt $11(a+b) = m^2 (m \in \mathbb{N}) \Rightarrow a+b=11 \Rightarrow$ có 8 số là:

29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Bài 5:

Tìm số tự nhiên n sao cho số sau là số chính phương $13n+3$

Lời giải

c) Đặt $13n+3 = y^2 (y \in \mathbb{N}) \Rightarrow 13(n-1) = y^2 - 16 \Leftrightarrow 13(n-1) = (y+4)(y-4) \Rightarrow (y+4)(y-4) : 13$

mà

$$13 \in \rho \Rightarrow \begin{cases} y+4 : 13 \\ y-4 : 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 13k-4 \\ y = 13k+4 \end{cases} (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 13(n-1) = (13k \pm 4)^2 - 16 = 13k(13k \pm 8) \Rightarrow 13k^2 \pm 8k + 1 = n$$

Vậy $n = 13k \pm 8k + 1 (k \in \mathbb{N})$ thì $13n+3$ là số chính phương.

Bài 6:

Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương

Hướng dẫn giải

Ta có $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 21 \leq 2n+1 \leq 99$

$$\Rightarrow 2n+1 \in \{25, 49, 81, 121, 169\} \Rightarrow n \in \{12, 24, 40, 60, 84\}$$

$$\Rightarrow 3n+1 \in \{37, 73, 121, 181, 253\}$$

Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy $n = 40$ là giá trị cần tìm.

Bài 7:

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1, 2n+1, 5n+1$ đều là các số chính phương

Lời giải

Nếu $n = 3k+1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n+1 = 3k+2$, không là số chính phương

Nếu $n = 3k+2 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2n+1 = 6k+5$, chia cho 3 dư 2 nên không là số chính phương. Vậy $n \vdots 3$

$2n+1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1. Suy ra $2n \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 4 \Rightarrow n+1$ lẻ

Do $n+1$ là số chính phương

Bài 8: Chọn HSG Toán 9 tỉnh Thái Bình

Tìm số nguyên dương n sao cho $A = (n+3)(4n^2+14n+7)$ là một số chính phương

Lời giải

Ta có $A = (4n^2+14n+7) = (n+3)(4n+2)+1$ với n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2+14n+7$ là nguyên tố cùng nhau.

Vì vậy, để chứng minh A là số chính phương thì $4n^2+14n+7$ và $n+3$ phải là số chính phương

Do $n \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có $(2n+3)^2 \leq 4n^2+14n+7 < (2n+4)^2 \Rightarrow 4n^2+14n+7 = (2n+3)^2 \Rightarrow n=1$

Khi đó $n+3=4$ là số chính phương

Thử lại, với $n=1$ ta có $A=10^2$

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n=1$

Bài 9:

Tìm $3 \leq a \in \mathbb{N}$ sao cho $\overline{a(a-1).a(a-1)} = \overline{(a-2).a.a.(a-1)}$

Lời giải

Ta có: $\overline{a(a-1).a(a-1)} = \overline{(a-2).a.a.(a-1)} \Leftrightarrow \overline{a.(a-1)}^2 = \overline{(a-2).a.a.(a-1)} \quad (*)$

Vì VT(*) là số chính phương nên VP(*) cũng là số chính phương

Vì số chính phương chỉ có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{0;1;4;6;9\}$

Nên a có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{1;2;5;6;7;0\}$

Do a là chữ số nên $a \leq 9$. Kết hợp với $3 \leq a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \{5;6;7\}$

Bài 10:

Tìm số tự nhiên n để $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương

Lời giải

$$\text{Đặt } 2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2 (a > 0, a \in \mathbb{N}) \Rightarrow 48^2 + 2^n = a^2 \Rightarrow 2^n = (a - 48)(a + 48)$$

$$+) n = 0 \Rightarrow (a - 48)(a + 48) = 1 \Rightarrow \text{vô lý}$$

$$+) n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a + 48 = 2^x \\ a - 48 = 2^y \end{cases} (x + y = n; x > y) \Rightarrow 96 = 2^x - 2^y \Rightarrow 2^y (2^{x-y} - 1) = 2^5 \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 5 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow n = 12$$

Vậy $n = 12$ là giá trị cần tìm.

Bài 11:

Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho : $1! + 2! + \dots + n!$ là số chính phương

Lời giải

$$+) n = 1 \Rightarrow S = 1! = 1 = 1^2$$

$$+) n = 2 \Rightarrow S = 1! + 2! = 3 \text{ (loại)}$$

$$+) n = 3 \Rightarrow S = 1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$$

$$+) n = 4 \Rightarrow S = 1! + 2! + 3! + 4! = 33 \text{ (loại)}$$

$$+) n \geq 5 \Rightarrow S = \underbrace{1! + 2! + 3! + 4!}_{33} + \underbrace{5! + 6! + \dots + n!}_{\text{tc} \equiv 0} \Rightarrow \text{không là số chính phương}$$

Vậy $n = 1$ hoặc $n = 3$.

Bài 12:

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n! + 232$ là số chính phương

Lời giải

$$+) n = 1 \Rightarrow 1! + 232 = 233 \text{ (loại)}$$

$$+) n = 2, 3 \Rightarrow \text{(loại)}$$

$$+) n = 4 \Rightarrow 4! + 232 = 256 = 16^2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+) n \geq 5 \Rightarrow n! : 5 \Rightarrow n! + 232 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow n! + 232 \text{ không là số chính phương}$$

Vậy $n = 4$.

Bài 13:

Cho n là số nguyên dương sao cho $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 24

Lời giải

Đặt $n+1=a^2; 2n+1=b^2 (a, b \in \mathbb{N}) \Rightarrow b$ lẻ $\Rightarrow b=2k+1 \Rightarrow b^2=4k(k+1)+1$

Mà $n = \frac{b^2-1}{2} = \frac{4k(k+1)}{2} = 2k(k+1) \Rightarrow n$ chẵn $\Rightarrow n+1$ lẻ $\Rightarrow a$ lẻ $\Rightarrow a=2q+1 (q \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow a^2 = 4q(q+1)+1 \Rightarrow n = \underbrace{4q(q+1)}_{\vdots 2} \vdots 8(1)$

Mặt khác: $a^2 + b^2 = 3n + 2 \equiv 2 \pmod{3}$

Và $a^2, b^2 \equiv 0, 1 \pmod{3} \Rightarrow a^2, b^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow (2n-1) - (n+1) \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$

Mà $(3, 8) = 1 \Rightarrow n \Rightarrow n \vdots 24 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 14:

Biết $x \in \mathbb{N}; x > 2$. Tìm x sao cho $x(x-1)x(x-1) = (x-2)xx(x-1)$

Lời giải

Ta có vế trái của đẳng thức là số chính phương nên vế phải cũng là số chính phương

Một số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9

Nên x chỉ có thể có tận cùng là: 1, 2, 5, 6, 7, 0 (1)

Do x là chữ số nên $x \leq 9 \Rightarrow 2 < x \leq 9$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow x \in \{5, 6, 7\}$

Bằng phép thử ta thấy $x = 7$ thỏa mãn bài toán: $76^2 = 5776$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương

a) $n^2 - n + 2$

b) $n^5 - n + 2$

Lời giải

a) Với $n=1$ thì $n^2 - n + 2 = 2$ không là số chính phương

Với $n=2$ thì $n^2 - n + 2 = 4$ là số chính phương

Với $n > 2$ thì $n^2 - n + 2$ không là số chính phương vì: $(n-1)^2 < n^2 - n + 2 < n^2$

b) Ta có $(n^5 - n) : 5$ vì $n^5 - n = (n^2 - 1)n(n^2 + 1)$

- $n = 5k \Rightarrow n : 5$

- $n = 5k \pm 1 \Rightarrow n^2 - 1 : 5$

- $n = 5k \pm 2 \Rightarrow n^2 + 1 : 5$

Nên $n^5 - n + 2$ chia 5 thì dư 2 nên $n^5 - n + 2$ có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên $n^5 - n + 2$ không phải là số chính phương.

Vậy không có giá trị nào của n thỏa mãn bài toán.

Bài 2:

Có hay không số tự nhiên n để $2006 + n^2$ là số chính phương

Hướng dẫn giải

Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2006 \Leftrightarrow (m+n)(m-n) = 2006$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $m+n+m-n=2m \Rightarrow 2$ số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow m+n$ và $m-n$ là 2 số chẵn

$\Rightarrow (m+n)(m-n) : 4$ nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ điều giả sử là sai

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2006 + n^2$ là số chính phương.

Bài 3:

Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b) = 3^2(a - b)$

Do $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương nên $a - b$ là số chính phương.

Ta thấy $1 \leq a - b \leq 8$ nên $a - b \in \{1; 4\}$

Với $a - b = 1$ thì $\overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$ loại các số là hợp số 21, 32, 54, 65, 76, 87, 98 còn số 43 là số nguyên tố

Với $a - b = 4$ thì $\overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$ loại các hợp số 51, 62, 84, 95 còn số 73 là số nguyên tố

Vậy $\overline{ab} \in \{43; 73\}$.

Bài 1: Vào 10 chuyên Phan Bội Châu, năm học 2014 - 2015

Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow \overline{ab} = (a+b)\sqrt{a+b}$ (1)

Vì $\overline{ab}; a+b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a+b$ phải là số chính phương

Mà: $1 \leq a+b \leq 18 \Rightarrow a+b \in \{1; 4; 9; 16\}$

+) $a+b=1$ thay vào (1) $\Rightarrow \overline{ab}=1$ (loại) $a+b=1$ thay vào (1) $\Rightarrow \overline{ab}=1$ (loại)

+) $a+b=4$ và $a+b=16$ đều bị loại

+) $a+b=9$ thay vào (1) $\Rightarrow \overline{ab}=27 \Rightarrow a=2; b=7$

Bài 2: Vào 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa, năm học 2012 - 2013

Tìm số nguyên dương n sao cho $\frac{n(2n-1)}{26}$ là số chính phương

Lời giải

Đặt $n(2n-1) = 26q^2$ (1)

Do VP chẵn và $2n-1$ lẻ nên n chẵn hay $n=2k$

Do đó (1) $\Rightarrow k(4k-1) = 13q^2$ (2)

Nhận thấy $(k, 4k-1)=1$ nên:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} k = u^2 \\ 4k-1 = 13v^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = 13u^2 \\ 4k-1 = v^2 \end{cases}$$

Xét trường hợp 1 ta có :

$$\begin{cases} k = u^2 \\ 4k-1 = 13v^2 \end{cases} \Rightarrow 4k = 13v^2 + 1 = 12v^2 + v^2 + 1 \Rightarrow (v^2 + 1) : 4 \Rightarrow v^2 \equiv 3 \pmod{4} \text{ (vô lý)}$$

Xét trường hợp 2 ta có :

$$\begin{cases} k = 13u^2 \\ 4k-1 = v^2 \end{cases} \Rightarrow 4k = v^2 + 1 \text{ (vô lý)}$$

Vậy không tồn tại n thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 3: Vào 10 chuyên Phan Bội Châu Nghệ An, năm học 2010 - 2011

Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $A = n^4 + n^3 + n^2$ có giá trị là số chính phương

Lời giải

Ta có: $A = n^4 + n^3 + n^2 = n^2(n^2 + n + 1)$

- Với $n = 0 \Rightarrow A = 0$ (thỏa mãn)

- Với $n \neq 0 \Rightarrow A$ là số chính phương khi và chỉ khi $n^2 + n + 1$ là số chính phương.

Khi đó $n^2 + n + 1 = k^2 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 4(n^2 + n + 1) = 4k^2 \Rightarrow (2n+1)^2 - 4k^2 = -3$

$\Rightarrow (2n+1-2k)(2n+1+2k) = -3$

Vì $2n+1+2k \geq 2n+1-2k, \forall n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ nên

$$\begin{cases} 2n+1-2k = -3 \\ 2n+1+2k = 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 2n+1-2k = -1 \\ 2n+1+2k = 3 \end{cases}$$

+) $\begin{cases} 2n+1-2k = -3 \\ 2n+1+2k = 1 \end{cases} \Rightarrow n = -1$ (thỏa mãn)

+) $\begin{cases} 2n+1-2k = -1 \\ 2n+1+2k = 3 \end{cases} \Rightarrow n = 0$ (loại)

Vậy $n = 0; n = -1$ là các giá trị cần tìm.

Bài 4: Vào 10 chuyên Hưng Yên, năm học 2013 - 2014

Cho p là một số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương

Lời giải

Do p là số nguyên tố nên các ước số nguyên dương của p^4 là: $1; p; p^2; p^3; p^4$

Đặt $S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$

Giả sử $S = n^2 \Rightarrow 4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 \quad (1) \quad (n \in \mathbb{Z})$

Ta có: $4p^4 + 4p^3 + 4p^2 < (2n)^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p \Leftrightarrow (2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2$

$\Leftrightarrow 4n^2 = (2p^2 + p + 1)^2 \quad (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow p = 3$

Thử lại với $p = 3$ thỏa mãn. Vậy số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

Bài 5: HSG lớp 9 Thanh Oai, năm học 2012 - 2013

Cho tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương

Lời giải

$$\text{Đặt } n^2 - 14n - 256 = k^2 \ (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (n-7)^2 - k^2 = 305 \Leftrightarrow (n-k-7)(n+k-7) = 305 = 1.305 = 5.61.5$$

Xét các trường hợp : Do $n+k-7 > n-k-7$

- Trường hợp 1: $n-k-7=1$ và $n+k-7=305 \Rightarrow n=160$ (nhận)
- Trường hợp 2: $n-k-7=-305$ và $n+k-7=-1 \Rightarrow n=-146$ (loại)
- Trường hợp 3: $n-k-7=5$ và $n+k-7=61 \Rightarrow n=40$ (nhận)
- Trường hợp 4: $n-k-7=-61$ và $n+k-7=-5 \Rightarrow n=-26$ (loại)

Vậy $n=40, k=28$ hoặc $n=160, k=152$.

Bài 6: HSG Bắc Giang, năm học 2017 - 2018

Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

Lời giải

Vì $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = k^2 \ (k \in \mathbb{N})$

Ta có: $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = (x+2)(4x^2 + 6x - 3)$ nên ta có $(x+2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$

Đặt $(x+2, 4x^2 + 6x - 3) = d \ (d \in \mathbb{N}^*)$

Ta có $(x+2):d \Rightarrow (x+2)(4x-2):d \Rightarrow (4x+6x-4):d$

Lại có $4x^2 + 6x - 3:d \Rightarrow (4x^2 + 6x - 3) - (4x^2 + 6x - 4) = 1:d \Rightarrow d=1$

Vậy $(x+2, 4x^2 + 6x - 3) = 1$

Mà $(4x^2 + 6x - 3)(x+2) = k^2$ nên ta có $x+2$ và $4x^2 + 6x - 3$ là số chính phương

$\Rightarrow x+2$ và $4x^2 + 6x - 3 = b^2 \ (a, b \in \mathbb{N}^*)$

Vì $x > 0$ nên ta có $4x^2 < b^2 < 4x^2 + 12x + 9 \Leftrightarrow (2x)^2 < b^2 < (2x+3)^2$

Vì b lẻ nên $b^2 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 3 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x=2$

Với $x=2$ ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = 100 = 10^2$ là số chính phương.

Bài 7: HSG lớp 9 Huyện Kim Thành, năm học 2012 – 2013

Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là số chính phương

Lời giải

$$\text{Giả sử } n^2 + 17 = k^2 (k \in \mathbb{N}) \text{ và } k > n \Rightarrow (k-n)(k+n) = 17 \Rightarrow \begin{cases} k-n=11 \\ k+n=17 \end{cases} \Rightarrow n=8$$

Vậy $n=8$ là giá trị cần tìm.

Bài 8: HSG lớp 9 Huyện Vũ Quang, năm học 2018 – 2019

Tìm các số nguyên dương n sao cho $2^n + 3^n + 4^n$ là số chính phương

Lời giải

$$\text{Đặt } A = 2^n + 3^n + 4^n$$

- Nếu $n=1 \Rightarrow A=9$ (thỏa mãn)

- Xét $n > 1$ hay $n \geq 2$ thì $2^n + 4^n$ chia hết cho 4

Ta có 3^n chia 4 dư 1 với n chẵn hoặc -1 với n lẻ. Mà một số chính phương chia 4 dư 0 hoặc 1 nên A phải chia 4 dư 1 nên 3^n phải chia 4 dư 1. Suy ra n chẵn.

Với n chẵn ta có: 2^n chia 3 dư 1, 4^n chia 3 dư 1, 3^n chia hết cho 3

Do đó A chia 3 dư 2 (vô lí, vì một số chính phương chia 3 có số dư là 0 hoặc 1).

Vậy $n=-1$.

Bài 9: HSG lớp 9 Huyện Lục Nam Bắc Giang, năm học 2018 – 2019

Tìm các số nguyên x sao cho $x^3 - 3x^2 + x + 2$ là số chính phương

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x-2)(x^2 - x - 1)$$

- Xét $x-2=0 \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn)

- Xét $x^2 - x - 1 = 0$ (loại)

- Xét $x-2 = x^2 - x - 1 \Rightarrow x=1$

- Xét $x \neq 2, x \neq 1$. Với x nguyên ta chứng minh được $(x-1; x^2 - x - 1) = 1$

Nên $x^3 - 3x^2 + x + 2$ là số chính phương thì $x^2 - x - 1 = y^2 (y \in \mathbb{Z})$

Tìm được $x=2$ (loại do $x \neq 2$) và $x=-1$. Thử lại $x=-1$ ta có $x^3 - 3x^2 + x + 2$ có giá trị bằng -1 không phải là số chính phương nên $\Rightarrow x=-1$ (loại)

Vậy $x=2$ hoặc $x=1$ thì $x^3 - 3x^2 + x + 2$ là số chính phương.

Bài 10: HSG lớp 9 Huyện Vũ Quang

Tìm các số hữu tỉ n thỏa mãn tổng sau là số chính phương: $n^2 + n + 503$

Giả sử tồn tại số hữu tỷ n và số nguyên dương m để $n^2 + n + 503 = m^2$

Lời giải

Bài 10: HSG lớp 9 Thăng Bình, năm học 2018 - 2019

Tìm các số tự nhiên n sao cho $n-50$ và $n+50$ đều là số chính phương

Lời giải

Bài 10: HSG lớp 9 Huyện Thanh Oai, năm học 2012 - 2013

Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: Vào 10 chuyên Nam Định, năm học 2019 - 2020

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ sao cho $2(x^2 + y^2 - 3x + 2y) - 1$ và $5(x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3)$ đều là số chính phương.

Lời giải

Bài 10: Vào 10 chuyên Nam Định, năm học 2019 - 2020

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 3^n$ là một số chính phương

Lời giải

Bài 10: Vào 10 chuyên Phú Thọ, năm học 2017 - 2018

Tìm các số nguyên m sao cho $m^2 + 12$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: Vào 10 chuyên Toán Hải Dương, năm học 2017 - 2018

Tìm tất cả các cặp $(x; y)$ nguyên dương sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: Vào 10 chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, năm học 2017 - 2018

Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên n để $A = n^4 + 4n^{p-1}$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: Vào 10 chuyên Hưng Yên, năm học 2018 - 2019

Cho các giá trị nguyên của x để $M = x^4 + (x+1)^3 - 2x^2 - 2x$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: Vào 10 chuyên Hưng Yên, năm học 2018 - 2019

Cho các giá trị nguyên của x để $M = x^4 + (x+1)^3 - 2x^2 - 2x$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: Vào 10 chuyên ĐHKHTN - ĐHQGHN, năm 1992

Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: Romanian MO 2004

Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho các số nguyên a, b thỏa mãn $n^2 = a + b$ và $n^3 = a^2 + b^2$

Lời giải

Bài 10: Romanian MO 2004

Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho các số nguyên a, b thỏa mãn $n^2 = a + b$ và $n^3 = a^2 + b^2$

Lời giải

Bài 10: HSG Nam Định, năm học 2015 - 2016

Tìm số nguyên dương n để $\frac{n-37}{n+43}$ là bình phương của một số hữu tỷ dương tùy ý

Lời giải

Bài 10: HSG Sóc Trăng, năm học 2015 - 2016

Tìm số tự nhiên n có dạng $\overline{abc}$ thỏa mãn $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n-2)^2$ với $n \in \mathbb{Z}, n > 2$

Lời giải

Bài 10: HSG Sóc Trăng, năm học 2016 - 2017

Tìm số tự nhiên n sao cho $n+12$ và $n-11$ đều là số chính phương

Lời giải

Bài 10: HSG Quảng Nam, năm học 2014 - 2015

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương

Lời giải

Bài 10: HSG Trà Vinh, năm học 2016 - 2017

Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương

Lời giải

Bài 10: HSG Lâm Đồng, năm học 2016 - 2017

Cho n là số tự nhiên. Hãy tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho số $A = 1010n^2 + 2010(n + p) + 10^{10195}$ có thể viết được dưới dạng hiệu của 2 số chính phương.

Lời giải

Bài 10: Chuyên Yên Bái, năm học 2016 - 2017

Cho tất cả các số nguyên n sao cho A là một số chính phương với
 $A = 4n^4 + 22n^3 + 37n^2 + 12n - 12$

Lời giải

Bài 10: Chuyên Hải Dương, năm học 2015 - 2016

Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: HSG Quảng Bình, năm học 2018 - 2019

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $C = 2019^n + 2020$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: HSG Bắc Ninh, năm học 2018 - 2019

Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: HSG Hải Dương, năm học 2016 - 2017

Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9$ là số chính phương

Lời giải

Bài 10: HSG Hải Dương, năm học 2016 - 2017

Tìm các số có hai chữ số $\overline{ab} (a \neq b)$ sao cho số $n = \overline{ab} - \overline{ba}$ là một số chính phương

Lời giải