HƯỚNG DẪN CHẤM
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: TOÁN
*(Hướng dẫn chấm có **04** trang)*

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Đáp án	**C**	**B**	**D**	**B**	**A**	**A**	**D**	**D**
Câu	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Đáp án	**A**	**C**	**B**	**A**	**C**	**B**	**D**	**C**

II. PHẦN TỰ LUẬN

Lưu ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm (HDC) dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với HDC mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của HDC.
- Điểm bài thi là tổng điểm các bài không làm tròn số.

Hướng dẫn chấm tự luận

Câu 1 (3,0 điểm).

1) Tìm nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình $(x-4)y^2=x^2$ (1)

2) Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

<table>
<tr><th>Ý</th><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Câu 1.1
(1,5 điểm)</td><td>Với $x=4$ thì (1) trở thành: $0.y^2=16$ (vô lý) $\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Với $x\neq 4$ thì $y^2=\dfrac{x^2}{x-4}=\dfrac{x^2-16+16}{x-4}=x+4+\dfrac{16}{x-4}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Do $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $y^2\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{16}{x-4}\in\mathbb{Z}$.
Do đó $x-4$ là ước của $16\Rightarrow$ $x-4\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8;\pm16\}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>$x-4$</td><td>-16</td><td>-8</td><td>-4</td><td>-2</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>x</td><td>-12</td><td>-4</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>12</td><td>20</td></tr>
<tr><td>y^2</td><td>-9</td><td>-2</td><td>0</td><td>-2</td><td>-9</td><td>25</td><td>18</td><td>16</td><td>18</td><td>25</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td>±5</td><td>$\pm3\sqrt{2}$
(loại)</td><td>±4</td><td>$\pm3\sqrt{2}$
(loại)</td><td>±5</td></tr>
</table>
</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Kết luận: Phương trình có các nghiệm nguyên là:
$(5;5),(5;-5),(4;4),(4;-4),(-4;0),(20;5),(20;-5)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Đirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ra được hai số có</td><td>0,5</td></tr>
</table>

1.2 (1,5 điểm)	cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2. Khi đó ta có $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.	
	+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a, b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a-b$ là số chẵn và $a-b$ cũng là số chẵn $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \vdots 4$ (đpcm).	0,5

Câu 2 (4,0 điểm).

1) Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số). Biết rằng $P(1) = 10, P(2) = 20,\ P(3) = 30.$ Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{P(12) + P(-8)}{10} + 25.$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 3} = y + \sqrt{y^2 + 3} & (1) \\ x^3 - y^3 = 3x - 3y + 4 & (2) \end{cases}.$

Ý	Đáp án	Điểm
Câu 2.1 (2,0 điểm)	Đặt $Q(x) = P(x) - 10x$ Có $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$	0,5
	Giả sử $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$	0,5
	Khi đó $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r) + 10x$	0,5
	Từ đó tính được $\dfrac{P(12) + P(-8)}{10} + 25 = 2009.$	0,5
Câu 2.2 (2,0 điểm)	Điều kiện: $\lvert x\rvert \ge \sqrt{3}.$	0,25
	Đặt $\begin{cases} u = x + \sqrt{x^2 - 3} \\ v = y + \sqrt{y^2 + 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \ge x, v \ge y \\ x = \dfrac{u^2 + 3}{2u} \\ y = \dfrac{v^2 - 3}{2v} \end{cases}$	0,25
	Từ phương trình $(1) \Rightarrow u = v \Rightarrow y = \dfrac{u^2 - 3}{2u} \Rightarrow x - y = \dfrac{3}{u}.$	0,25
	Phương trình $(2) \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + y^2 + xy) = 3(x-y) + 4$ $\Leftrightarrow (x-y)\left[(x-y)^2 + 3xy - 3\right] = 4$	0,25
	Biến đổi sang ẩn phụ ta được phương trình mới $\dfrac{3}{u}\left(\dfrac{9}{u^2} + 3.\dfrac{u^2+3}{2u}.\dfrac{u^2-3}{2u} - 3\right) = 4 \Leftrightarrow 9u^4 - 16u^3 - 36u^2 + 27 = 0$ $\Leftrightarrow (u-3)(9u^3 + 11u^2 - 3u - 9) = 0$ (*)	0,25
	Nếu $x \le 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 3} < x + \lvert x\rvert = x - x = 0$ Mặt khác $y + \sqrt{y^2 + 3} > y + \lvert y\rvert \ge 0$ do đó (1) vô nghiệm.	0,25

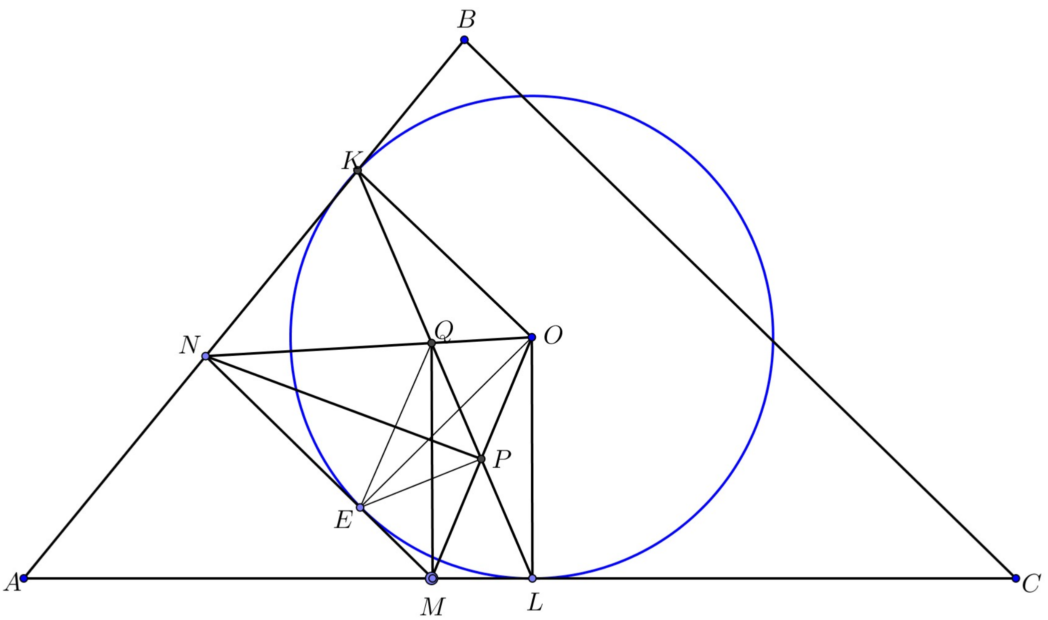
	Vậy $x > 0,$ kết hợp điều kiện $\|x\| \geq \sqrt{3} \Rightarrow x \geq \sqrt{3} \Rightarrow u \geq \sqrt{3} > 1$	
	Khi đó $9u^3 + 11u^2 - 3u - 9 > 9.1^3 + 3u(u-1) + 8u^2 - 9 > 0.$ Do đó $(*) \Leftrightarrow u = 3 \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 3} = 3 \\ y + \sqrt{y^2 + 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$	0,25
	Đối chiếu điều kiện kết luận nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2;1).$	0,25

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác $ABC.$ Đường tròn (O) tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại $K, L.$ Tiếp tuyến của (O) tại điểm E thuộc cung nhỏ KL cắt đường thẳng AL, AK tương ứng tại $M, N.$ Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại $Q.$

1) Chứng minh rằng $\widehat{MON} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$

2) Chứng minh rằng đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

3) Chứng minh $KQ.PL = EM.EN.$

Ý	Đáp án	Điểm
3.1 **(1,5 điểm)**		
	1) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $\widehat{MOL} = \widehat{MOE}; \widehat{NOE} = \widehat{NOK} \quad (1)$	0,25
	Tứ giác $ALOK$ có $\widehat{AKO} + \widehat{ALO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{KOL} = 180^\circ$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{MOL} + \widehat{MOE} + \widehat{EON} + \widehat{NOK} = 180^\circ$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}\left(\widehat{MOL} + \widehat{MOE} + \widehat{EON} + \widehat{NOK}\right) = 90^\circ \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}\widehat{BAC} + \left(\widehat{MOE} + \widehat{EON}\right) = 90^\circ$	0,25
	Hay $\frac{1}{2}\widehat{BAC} + \widehat{MON} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (ĐPCM)	0,25
	2) Từ giả thiết và 1) suy ra $\widehat{OEP} = \widehat{OLK} \quad (3)$	0,25

	Do tam giác OKL cân tại O nên $\widehat{OKL}=\widehat{OLK}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra tứ giác $OKEP$ nội tiếp. Mặt khác do tứ giác $OKNE$ nội tiếp đường tròn đường kính ON	0,25
	Từ đó suy ra 5 điểm O,K,N,E,P cùng thuộc đường tròn đường kính ON	0,25
	$\Rightarrow \widehat{NPO}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow NP\perp OM$ (5)	0,25
	Chứng minh tương tự cũng có $MQ\perp ON$ (6) mà $OE\perp MN$ (7)	0,25
	Từ (5),(6),(7) $\Rightarrow$ ba đường cao MQ,NP và OE của tam giác OMN đồng quy (ĐPCM)	0,25
3.3 (1,0 điểm)	3) Từ giả thiết và câu 1) ta có $QK=QE, PE=PL$ (8)	0,25
	Theo phần 2) tứ giác $ONEP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QNE}=\widehat{EPM}$ (9) tứ giác $OMEQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NQE}=\widehat{PME}$ (10)	0,25
	Từ (9) và (10) suy ra $\Delta NQE\sim\Delta PME(g.g)\Rightarrow \dfrac{NE}{EP}=\dfrac{EQ}{EM}\Rightarrow EM.EN=EQ.EP$ (11)	0,25
	Từ (1) và (11) suy ra $KQ.PL=EM.EN$ (đpcm)	0,25

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các số thực không âm a,b,c và thoả mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh $ab+bc+ca\le abc+2$ (*)

Ý	Đáp án	Điểm
4 (1,0 điểm)	Từ giả thiết $a^2+b^2+c^2+abc=4$, ta suy ra: trong ba số a,b,c có ít nhất một trong ba số bé hơn hoặc bằng 1. Thật vậy nếu $a>1,b>1,c>1$ thì $a^2+b^2+c^2+abc>4$ (mâu thuẫn)	0,25
	Nếu cả ba số a,b,c đều ≤ 1 hoặc ≥ 1 thì $a^2+b^2+c^2+abc\le 4$, hoặc $a^2+b^2+c^2+abc\ge 4$. Theo giả thiết thì dấu bằng xảy ra nên $a=b=c=1$. Bất đẳng thức (*) đã được chứng minh	0,25
	Trường hợp còn lại, tồn tại chỉ hai trong ba số a,b,c cùng ≤ 1 hoặc cùng ≥ 1. Không mất tính tổng quát giả sử 2 số đó là a và c thì ta có $(a-1)(c-1)\ge 0 \Leftrightarrow ac+1\ge a+c \Leftrightarrow abc+b\ge ab+bc \Leftrightarrow abc\ge ab+bc-b$ $\Leftrightarrow 2+abc\ge 2+ab+bc-b$.	0,25
	Ta cần chứng minh $2+ab+bc-b\ge ab+bc+ca$ hay $2-b\ge ac$ Theo giả thiết ta có: $4=abc+a^2+b^2+c^2\ge (a^2+c^2)+b(b+ac)\ge 2ac+b(b+ac)$ Suy ra $(b+2)(b+ac-2)\le 0\Leftrightarrow b+ac\le 2$ (do $b+2>0$). Vậy ta đã chứng minh được (*).Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.	0,25

--------------------------------HẾT--------------------------------