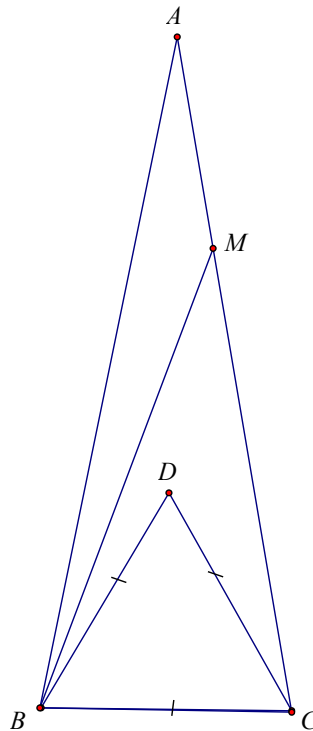


Câu 51. (HSG 7 huyện Hồng Ngự năm học 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\angle A = 20^\circ$ vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong $\triangle ABC$). Tia phân giác của $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh:

- Tia AD là phân giác của $\angle BAC$
- $AM = BC$

Lời giải



a) Dễ dàng chứng minh $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \angle DAB = \angle DAC$$

$$\angle DAB = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

Do đó

b) $\triangle ABC$ cân tại A

Mà $\angle A = 20^\circ$ (gt) nên $\angle ABC = 80^\circ$

$\triangle ABC$ đều nên $\angle DBC = 60^\circ$

Tia BD nằm giữa hai tia BA và BC suy ra $\angle ADB = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Tia BM là phân giác của $\angle ABD$ nên $\angle ABM = 10^\circ$

Xét hai tam giác ABM và BAD có:

AB cạnh chung

$$\angle BAM = \angle ABD = 20^\circ$$

$$\angle ABM = \angle DAB = 10^\circ$$

Vậy $\triangle ABM = \triangle BAD$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AM = BD$$

Mà $BD = BC$ (gt)

$$\Rightarrow AM = BC$$

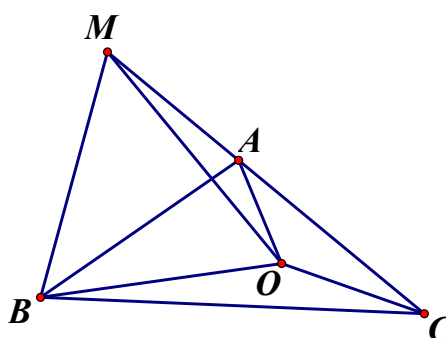
Câu 52. (Olympic 7, trường Sương Bình 2017 - 2018; trường Thanh Oai 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\angle A = 108^\circ$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của $\angle C$ sao cho $\angle BO = 12^\circ$, vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO).

a) Chứng minh ba điểm C, A, M thẳng hàng.

b) Chứng minh tam giác AOB cân.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle ABC$ cân tại A , $\angle A = 108^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C = 36^\circ$
 $\Rightarrow \angle OCA = \angle OCB = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$ (Vì CO là tia phân giác của $\angle ACB$).

Xét $\triangle BOC$ có $\angle BOC = 180^\circ - (12^\circ + 18^\circ) = 150^\circ$

Xét $\triangle BOM$ là tam giác đều $\Rightarrow \angle BOM = 60^\circ$

$$\Rightarrow \angle MOC = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$$

Xét $\triangle BOC$ và $\triangle MOC$ có:

$MO = OB$; $\angle BOM = \angle MOC (= 60^\circ)$; OC là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BOC = \triangle MOC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle OCM = \angle OCB = 18^\circ$$

Mà $\angle OCA = 18^\circ$ nên hai tia CM, CA trùng nhau, do đó 3 điểm C, O, M thẳng hàng.

b) $\triangle CBM$ có $CM = CB \Rightarrow \triangle CBM$ cân tại C ; $\angle C = 36^\circ$

$$\Rightarrow \angle CBM = \angle CMB = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

Mà $\angle BAM = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$

$$\Rightarrow \angle BAM = \angle CMB = 72^\circ \Rightarrow \triangle BAM \text{ cân tại } B \Rightarrow BA = BM \text{ (tính chất tam giác cân)}$$

Mà $OM = BM = BO$ ($\triangle BOM$ đều)
 $\Rightarrow BA = OB \Rightarrow \triangle AOB$ cân tại B .

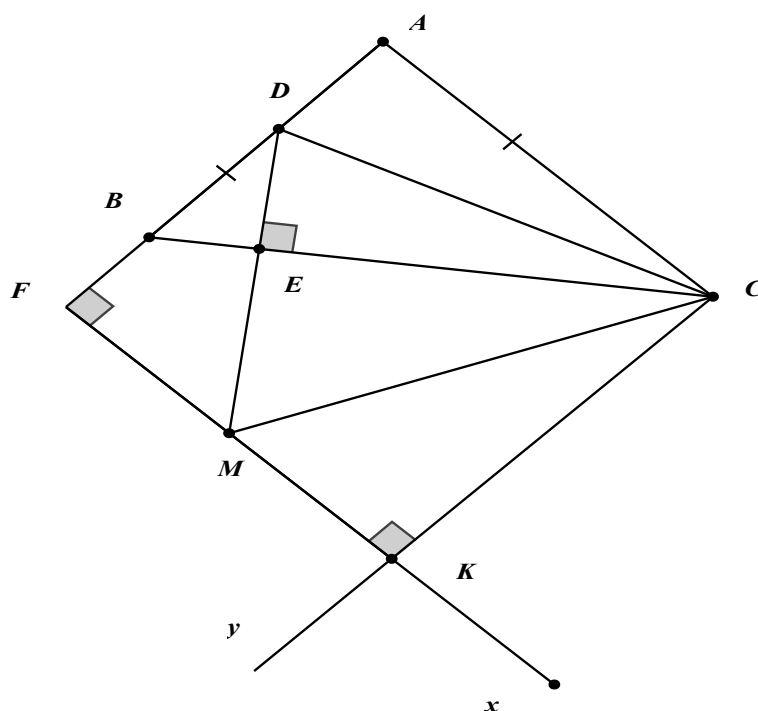
Câu 53. (HSG 7 huyện năm 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A với $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15$ cm. Tia phân giác của $\angle C$ cắt AB tại D .
 Kẻ $DE \perp BC$ ($E \in BC$)

a) Chứng minh $AC = CE$

b) Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Kẻ tia $Fx \perp FA$ cắt tia DE tại M . Tính $\angle BCM$

Lời giải



a) Chứng minh được $\triangle ACD = \triangle ECD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AC = CE$ (hai cạnh tương ứng)

b) Kẻ $Cy \perp Fx$ cắt nhau tại K

Ta thấy $AC = AF = FK = CK = CE$ và $\angle ACK = 90^\circ$

Chứng minh được $\triangle CEM = \triangle CKM$ (ch – cgv)

$\Rightarrow \angle ECM = \angle KCM$ (hai góc tương ứng)

$$\angle BCM = \angle DCE + \angle ECM = \frac{1}{2} \angle ACK = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

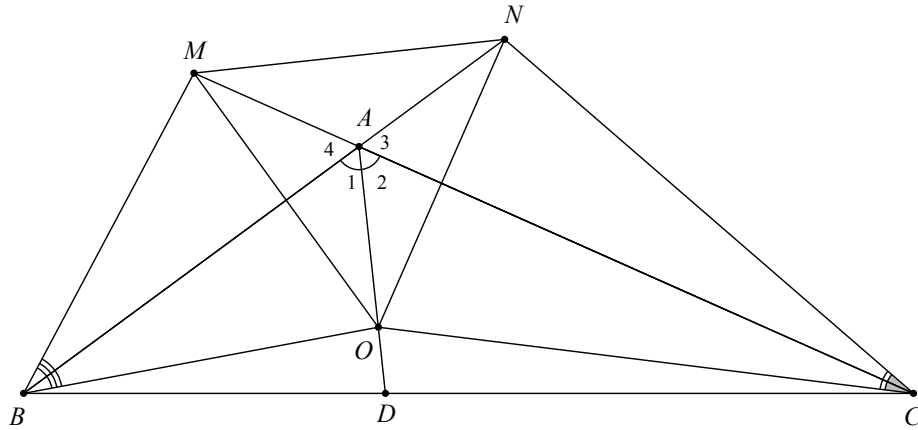
Mà

Câu 54. (HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O . Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\angle ABM = \angle ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\angle ACN = \angle ACO$.

- a) Chứng minh $AM = AN$.
b) Chứng minh $\triangle MON$ là tam giác đều.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$ nên $\angle A = 120^\circ$
Do AD là tia phân giác nên $\angle A_1 = \angle A_2 = 60^\circ$
Ta lại có: $\angle A_3 = \angle A_4 = 180^\circ - \angle A = 60^\circ$
Suy ra: $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \angle A_4 = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ABD$ (g - c - g) $\Rightarrow AM = AO$ (1)

và $\triangle ACN = \triangle ACO$ (g - c - g) $\Rightarrow AN = AO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AM = AN$ (đpcm).

b) $\triangle AOM = \triangle AON$ (c - g - c) $\Rightarrow OM = ON$ (3)

$\triangle AOM = \triangle AMN$ (c - g - c) $\Rightarrow OM = MN$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $OM = ON = MN$

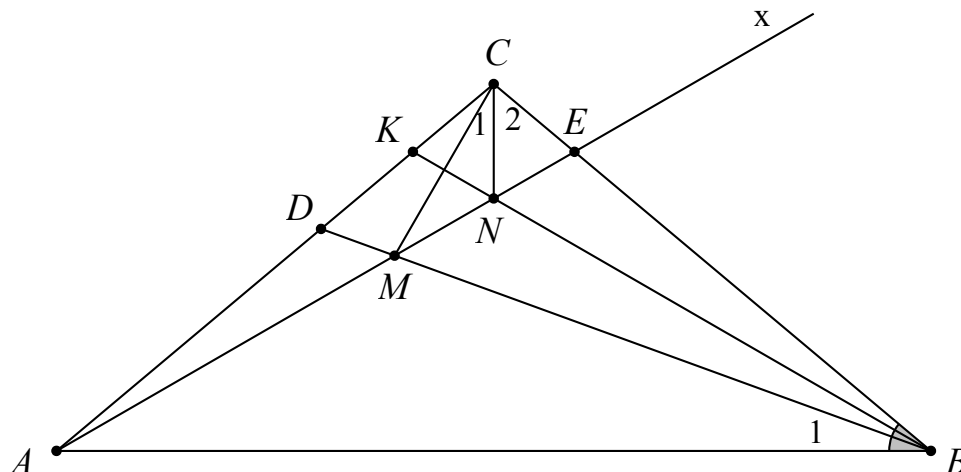
$\Rightarrow \triangle MON$ là tam giác đều (đpcm).

Câu 55. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Tam giác ABC cân tại C và $\angle C = 100^\circ$; BD là phân giác của $\angle B$. Từ A kẻ tia Ax tạo với AB một góc 30° . Tia Ax cắt BD tại M , cắt BC tại E . Vẽ BK là phân giác $\angle CBD$, BK cắt Ax tại N .

- a) Tính số đo $\angle ACM$
b) So sánh MN và CE .

Lời giải



- a) Học sinh chứng minh được: $\triangle ANB$ cân tại N (có hai góc bằng nhau $=30^\circ$)
 b) $\Rightarrow NA = NB$

Nối CN , chứng minh được $\triangle CAN = \triangle CBN (c.c.c)$

$$\Rightarrow \angle NCA = \angle NCB = 50^\circ$$

$\angle NMB$ là góc ngoài của $\triangle ABM$

$$\Rightarrow \angle NMB = \angle A_1 + \angle B_1 = 50^\circ$$

Từ đó, học sinh chứng minh được: $\triangle BNM = \triangle BNC (g.c.g)$

$$\Rightarrow BC = BM \Rightarrow \triangle CBM \text{ cân tại } B, \text{ mà lại có } \angle MBN = 20^\circ \text{ nên tính được } \angle BCM = 20^\circ$$

- b) Từ chứng minh trên, ta chứng minh được $\triangle MNC$ cân tại N

$$\Rightarrow MN = NC$$

Xét trong tam giác CNE tính được $\angle EN = 180^\circ - (100^\circ + 10^\circ) = 70^\circ$

Và tính được $\angle NE = 50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$ (góc ngoài của $\triangle CAN$)

$$\Rightarrow \angle EN > \angle NE \Rightarrow CN > CE \text{ hay } MN > CE$$

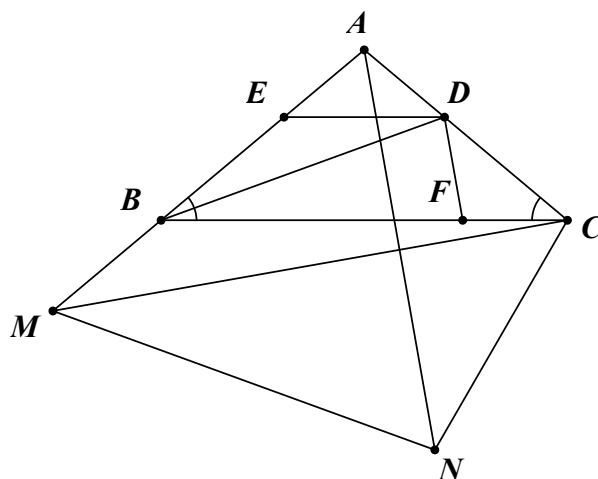
Câu 56. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017- 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle B = \angle C = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$.

- a) Chứng minh $BD + AD = BC$.

- b) Tính $\angle AMC$.

Lời giải



a) Từ D kẻ $DE \parallel BC$, trên BC lấy điểm F sao cho $BD = BF$ (1)

Chứng minh được $DE = BE$ (tam giác BED cân)

Do tam giác AED cân nên $AD = AE \Rightarrow BE = CD \Rightarrow DE = CD$

Tam giác BDF cân có $\angle DBF = 20^\circ$ nên $\angle BFD = 80^\circ \Rightarrow \angle FDC = 100^\circ$
 $\Rightarrow \angle FDC = \angle AED = 100^\circ$

Vậy $\triangle DFC$ có $\angle FDC = 40^\circ$

Chứng minh được $\triangle ADE = \triangle FCD$ (g.c.g)

$\Rightarrow AD = CF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD + AD = BC$.

b) Dựng tam giác đều AMN sao cho N và C ở cùng một phía so với AB

Xét $\triangle BAC$ và $\triangle NCA$ có

AC chung

$BC = AN (= AM)$

$\angle ACB = \angle CAN = 40^\circ$

Nên $\triangle BAC = \triangle NCA \Rightarrow AC = CN = AB$

Vậy MC là trung trực của AN nên $\angle AMC = \frac{1}{2} \angle AMN = 30^\circ$.

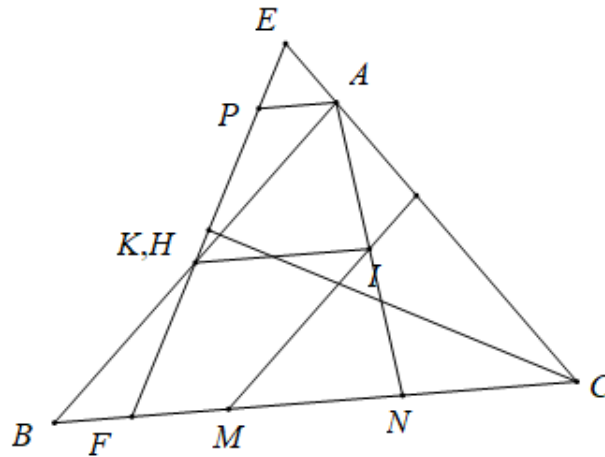
Câu 57. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC ($CA < CB$), trên BC lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại I .

a) Chứng minh : I là trung điểm của AN

b) Qua K là trung điểm của AB kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác $\angle ACB$ cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng BC tại F . Chứng minh $AE = BF$

Lời giải



a) Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại H . Nối MH

Ta có: $\triangle BHM = \triangle IMH$ vì: $\angle BHM = \angle IMH$ (so le trong);

$\angle BMH = \angle IHM$ (so le trong); cạnh HM chung $\Rightarrow BM = IH = MN$

$\triangle AHI = \triangle IMN$ vì: $IH = MN$ (cmt); $\angle AHI = \angle IMN (= \angle ABC)$; $\angle AIH = \angle INM$ (đồng vị)
 $\Rightarrow AI = IN$ (dpcm)

b) Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại P .

Xét $\triangle PKA$ và $\triangle FKB$ có:

$\angle PKA = \angle FKB$ (đối đỉnh); $\angle APK = \angle BFK$ (so le trong); $AK = KB$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle PKA = \triangle FKB \Rightarrow AP = BF$ (1)

Có $\angle EPA = \angle KFC$ (đồng vị); $\angle CEF = \angle KFC$ ($\triangle CFE$ cân)

$\Rightarrow \angle EPA = \angle CEF \Rightarrow \triangle APE$ cân $\Rightarrow AP = AE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE = BF$

Câu 58. (HSG 7 TP Thanh Thiện 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A ($AB > BC$). Gọi F là trung điểm của AC , qua F kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt đường thẳng BC tại M . Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$.

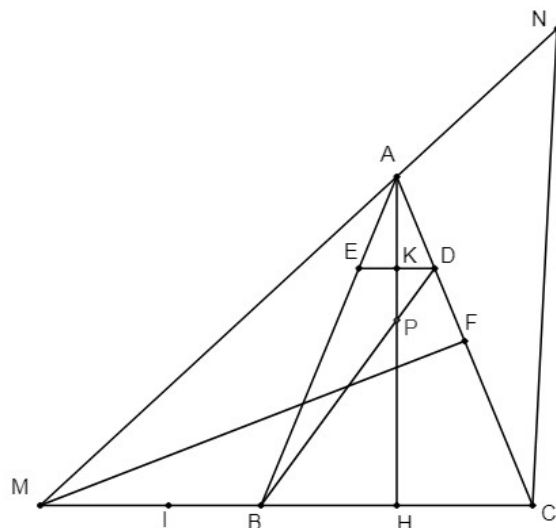
a) Chứng minh: $AM = CN$.

b) Chứng minh: $\angle AMC = \angle BAC$.

c) Lấy điểm D trên cạnh AC , điểm E trên cạnh AB sao cho $AD = AE$. Trên tia BM lấy

điểm I sao cho $BI = DE$. Chứng minh: $BD > \frac{BC + DE}{2}$.

Lời giải



a) Tam giác ABC cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB$, $AB = AC$

Tam giác AMC có MF là trung tuyến và đường cao nên $\triangle AMC$ là tam giác cân tại M
 $\Rightarrow \angle MAC = \angle MCA$

Suy ra $\angle ABC = \angle ACB = \angle MAC \Rightarrow 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle MAC \Rightarrow \angle ABM = \angle CAN$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle CAN$ có $AB = AC$ (cmt), $\angle ABM = \angle CAN$ (cmt), $AN = BM$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CAN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = CN$ (cạnh tương ứng).

Vậy $AM = CN$.

b) Tam giác ABC cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle BAC = 180^\circ - 2\angle ACB$

Tam giác AMC là tam giác cân tại $M \Rightarrow \angle MAC = \angle MCA \Rightarrow \angle AMC = 180^\circ - 2\angle ACB$

Do đó $\angle AMC = \angle BAC$

c) Kẻ đường cao AH cắt ED tại K , BD tại P .

Vì $\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao nên AH là trung tuyến $\Rightarrow BH = \frac{BC}{2}$

Vì $\triangle BHP$ vuông tại H nên $BH < BP \Rightarrow BP > \frac{BC}{2}$ (1).

Vì $AD = AE$ (gt) nên $\triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \angle AED = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2}$

mà $\angle ABC = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2}$

$\Rightarrow \angle AED = \angle ABC \Rightarrow ED \parallel BC$

mà $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp DE$ tại K nên $\triangle KPD$ vuông tại K nên $DK < DP$

Vì $\triangle ADE$ cân tại A có AK là đường cao nên AK là trung tuyến $\Rightarrow DK = \frac{ED}{2}$

$$\Rightarrow DP > \frac{DE}{2} \quad (2).$$

$$BP + DP > \frac{BC + DE}{2} \Rightarrow BD > \frac{BC + DE}{2}$$

Từ (1), (2) suy ra

$$BD > \frac{BC + DE}{2}$$

Vậy

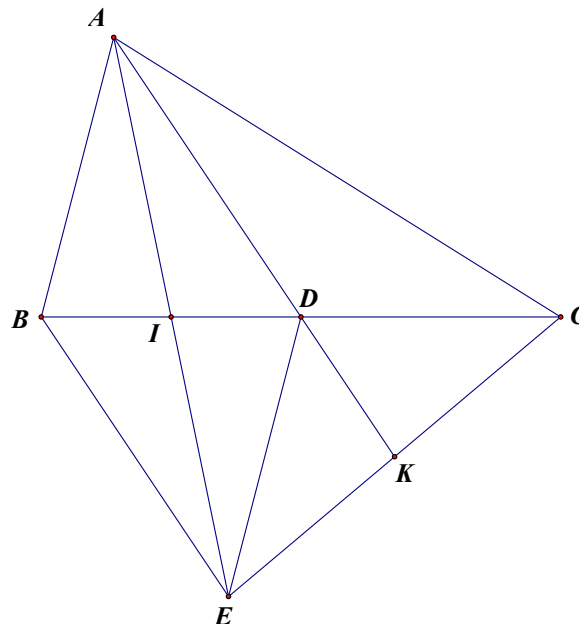
Câu 59. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023; huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AD , đường thẳng qua D và song song với AB cắt đường thẳng qua B song song với AD tại E , AE cắt BD tại I . Gọi K là trung điểm của đoạn EC .

a) Chứng minh rằng: $IA = IE$

b) Chứng minh: Ba điểm A, D, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EDB$ có:

$$\angle ABD = \angle EDB \quad (2 \text{ góc so le trong, } DE \parallel AB)$$

$$\angle ADB = \angle EBD \quad (2 \text{ góc so le trong, } AD \parallel BE)$$

BD chung

Do đó $\triangle ABD = \triangle EDB$ (g - c - g)

$$\Rightarrow AD = EB \quad (2 \text{ cạnh tương ứng})$$

Xét $\triangle AID$ và $\triangle EIB$ có:

$$AD = BE \quad (\text{cmt})$$

$$\angle ADI = \angle EBI$$

$$\angle DAI = \angle BEI \quad (AD \parallel BE)$$

Do đó $\triangle AID = \triangle EIB$ (g - c - g)

$\Rightarrow IA = IE$ (2 cạnh tương ứng), $IB = ID$ (2 cạnh tương ứng)

b) Có $\triangle AID = \triangle EIB$ (g - c - g)

$\Rightarrow IB = ID$ (2 cạnh tương ứng)

Ta có: AD là trung tuyến của $\triangle ABC \Rightarrow D$ là trung điểm $BC \Rightarrow DB = DC$

Có: $IB = ID = \frac{BD}{2} = \frac{DC}{2} \Rightarrow IB + ID = DC \Rightarrow IB + ID + ID = DC + ID = IC$

$\Rightarrow 3ID = IC \Rightarrow ID = \frac{1}{3}IC$

Xét $\triangle ACE$ có: I là trung điểm AE ($IA = IE, I \in AE$)

$\Rightarrow CI$ là đường trung tuyến của $\triangle ACE$

$ID = \frac{1}{3}IC, D \in IC$

mà

Suy ra D là trọng tâm $\triangle ACE$

Lại có AK là đường trung tuyến của $\triangle ACE$ (K là trung điểm EC).

Do đó: $D \in AK$ hay A, D, K thẳng hàng.

Câu 60. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Tia phân giác của góc B cắt AC tại điểm M . Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = BA$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng DM và BA .

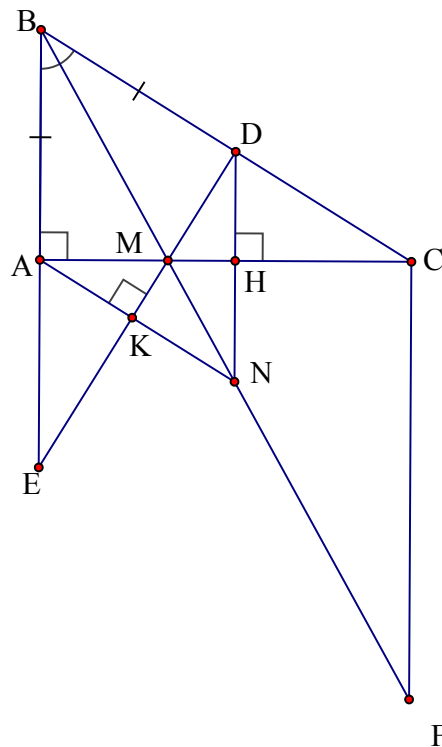
a) Chứng minh: $MA = MD$.

b) Kẻ $DH \perp MC$ ($H \in MC$) và $AK \perp ME$ ($K \in ME$), gọi N là giao điểm của hai tia DH và AK . Chứng minh $\triangle MHN = \triangle MKN$ và ba điểm B, M, N thẳng hàng.

c) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia BM tại F .

Chứng minh: $AB + AM < CF + CM$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DBM$ có: $AB = BD$ (gt)

$\angle ABM = \angle DBM$ (Vì BM là tia phân giác của góc B); BM cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBM$ (c-g-c) $\Rightarrow MA = MD$ (hai cạnh tương ứng)

b) Vì $MA = MD$ và $\angle AMK = \angle DMH$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle MAK = \triangle MDH$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow MK = MH$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó $\triangle MHN = \triangle MKN$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)

$$\triangle ABM = \triangle DBM \text{ (cmt)} \Rightarrow \angle AMB = \angle DMB = \frac{\angle AMD}{2}$$

Vì

$$\triangle MHN = \triangle MKN \Rightarrow \angle HMN = \angle KMN = \frac{\angle HMK}{2}$$

Mặt khác

Mà $\angle AMD = \angle HMK$ (hai góc đối đỉnh)

Suy ra: $\angle AMB = \angle HMN$

Do đó: $\angle BMN = \angle AMB + \angle AMN = \angle HMN + \angle AMN = 180^\circ$

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng

c) Vì $\triangle ABM = \triangle DBM$ (cmt) nên $\angle BDM = \angle BAM = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle MDC$ vuông tại D nên cạnh huyền MC lớn nhất

$\Rightarrow MC > MD$ mà $MD = MA$

$$\Rightarrow MC > MA \quad (1)$$

Mặt khác ta có AB và CF cùng vuông góc với $AC \Rightarrow AB \parallel CF$

$$\Rightarrow \angle ABM = \angle FCB \quad (\text{góc so le trong}) \text{ mà } \angle ABM = \angle CBM \quad (\text{Vì } BM \text{ là tia phân giác của góc } B)$$

$$\Rightarrow \angle CBM = \angle FCB$$

Suy ra tam giác BCF cân tại C nên $CF = CB$

Mà $CB > AB$ (Tam giác ABC vuông tại A nên cạnh huyền BC lớn nhất)

$$\text{Suy ra } CF > AB \quad (2)$$

Từ (1); (2) ta có: $CM + CF > MA + AB$

Câu 61. (HSG 7 trường Trà My 2018 - 2019; huyện Xuân Dương 2013 - 2014)

Cho $\triangle ABC$ vuông ở A có $\angle C = 30^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $\angle BCM = \frac{2}{3} \angle ACB$, trên

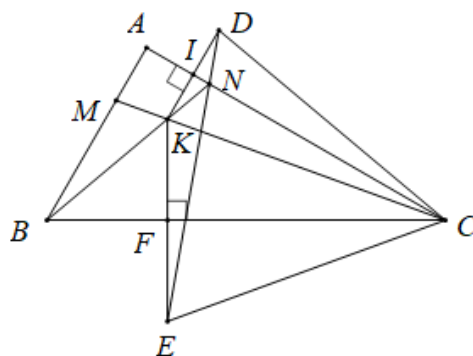
cạnh AC lấy điểm N sao cho $\angle BNC = \frac{2}{3} \angle ABC$. Gọi giao điểm của CM và BN là K .

1) Tính góc $\angle KNC$.

2) Gọi F và I theo thứ tự là hình chiếu của điểm K trên BC và AC . Trên tia đối của tia IK lấy điểm D sao cho $IK = ID$, trên tia KF lấy điểm E sao cho $KF = FE$ ($E \neq K$). Chứng minh $\triangle DCE$ là tam giác đều.

3) Chứng minh ba điểm D, N, E thẳng hàng.

Lời giải



$$\angle B = 60^\circ \quad (\text{do } \angle A = 90^\circ; \angle C = 30^\circ)$$

1)

$$\angle BNC = \frac{2}{3} \angle ABC = \frac{2}{3} \cdot 60^\circ = 40^\circ$$

$$\angle BCM = \frac{2}{3} \angle ACB = \frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$$

$$\angle BKC = 180^\circ - (\angle BNC + \angle BCM) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{CKN} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$2) \Delta KIC = \Delta DIC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CK = CD \text{ và } \hat{DCI} = \hat{KCI} \text{ (1)}$$

$$\Delta KFC = \Delta EFC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CK = CE \text{ và } \hat{KCF} = \hat{ECF} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD = CE \Rightarrow \Delta DCE$ cân

Có: $\hat{DCE} = 2\hat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta DCE$ đều

3) Xét tam giác vuông ANB có $\hat{ANB} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ \Rightarrow \hat{BNC} = 110^\circ$

$$\Delta CND = \Delta CNK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \hat{DNC} = \hat{KNC} = 110^\circ \Rightarrow \hat{CDN} = 60^\circ (\hat{NCD} = 10^\circ; \hat{DNC} = 110^\circ)$$

Có ΔCDE đều (cmt) $\Rightarrow \hat{CDE} = 60^\circ$

Do đó $\hat{CDN} = \hat{CDE} = 60^\circ$

Suy ra: Tia DN trùng với tia DE hay 3 điểm D, N, E thẳng hàng

Câu 62. (HSG 7 huyện Gia Viễn – Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$), D là trung điểm của BC , trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = DA$. Gọi H và K thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống đường thẳng AE , M là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC .

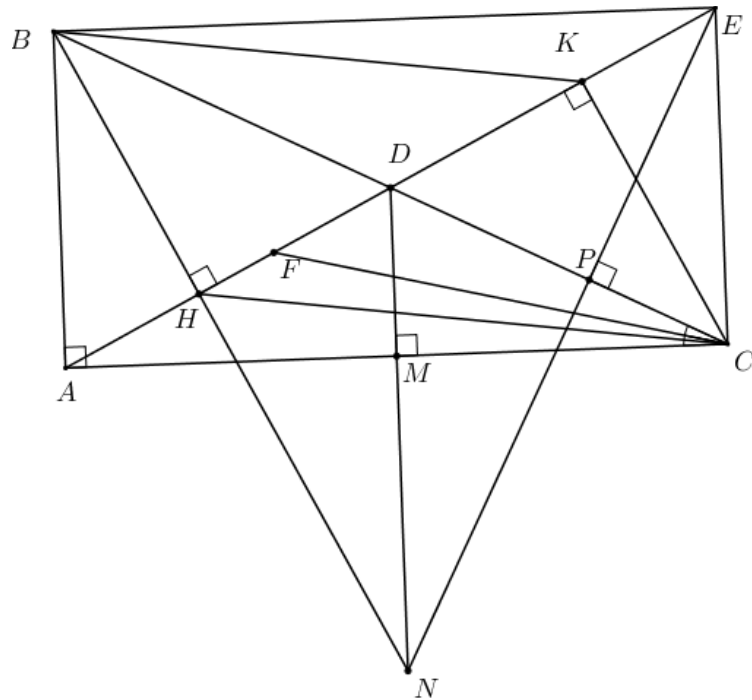
a) Chứng minh $BK = CH$.

b) Chứng minh $CD > KM$.

c) Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại P và cắt BH tại N . Chứng minh ba điểm D, M, N thẳng hàng.

d) Giả sử $\hat{ACB} = 36^\circ$, tia phân giác của $\hat{ACB}$ cắt AD tại F . Chứng minh ΔCEF cân.

Lời giải



a) Xét $\triangle HBD$ và $\triangle KCD$ có:

$BD = CD$ (Vì D là trung điểm của BC)

$\angle BDH = \angle CDK$ (Hai góc đối đỉnh)

$\angle BHD = \angle CKD = 90^\circ$

Suy ra $\triangle HBD = \triangle KCD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $HD = KD$ (Hai cạnh tương ứng)

Xét $\triangle DBK$ và $\triangle DCH$ có:

$BD = CD$ (Vì D là trung điểm của BC)

$\angle BDK = \angle CDH$ (Hai góc đối đỉnh)

$HD = KD$ (Chứng minh trên)

Suy ra $\triangle DBK = \triangle DCH$ (c – g – c)

$\Rightarrow BK = CH$ (Hai cạnh tương ứng)

b) Vì $\triangle ABC$ vuông tại A mà $BD = CD$

Suy ra $BD = CD = AD = \frac{1}{2}BC$ nên $AD = DC$ suy ra $\triangle ADC$ cân tại D .

Chứng minh: $\triangle ADC$ cân tại D , có DM là đường cao nên đồng thời là trung tuyến.

Suy ra M là trung điểm của AC .

Xét $\triangle ACK$ vuông tại K , có KM là trung tuyến nên $KM = \frac{1}{2}AC$ (1)

Mà $CD = \frac{1}{2}BC$ (2)

Lại có $\triangle ABC$ vuông tại A suy ra $BC > AC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) Suy ra $CD > KM$.

c) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle EDB$ có:

$BD = CD$ (Vì D là trung điểm của BC)

$\angle ADC = \angle EDB$ (Hai góc đối đỉnh)

$AD = DE$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle EDB$ (c - g - c) $\Rightarrow \angle DAC = \angle DEB$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle DAC$ và $\angle DEB$ là hai góc so le trong Suy ra $BE \parallel AC$

Xét $\triangle BEN$ có hai đường cao PB và EH cắt nhau tại D nên điểm D là trực tâm của $\triangle BEN$ suy ra $ND \perp BE$ (4)

Lại có $DM \perp AC$ (gt), mà $BE \parallel AC \Rightarrow NM \perp BE$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra ba điểm D, M, N thẳng hàng.

d) $\triangle ABC$ vuông tại A , $\angle ACB = 36^\circ$ nên $\angle ABC = 54^\circ$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ECD$ có:

$BD = CD$ (Vì D là trung điểm của BC)

$\angle ADB = \angle EDC$ (hai góc đối đỉnh)

$AD = DE$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ECD$ (c - g - c) $\Rightarrow \angle ABD = \angle ECD = 54^\circ$ (hai góc tương ứng)

Do đó $\angle ACE = \angle ACB + \angle BCE = 90^\circ$

Mà $\triangle ACD$ cân tại $D \Rightarrow \angle ACB = \angle CAE = 36^\circ$

Mặt khác, CF là phân giác $\angle ACB$ nên $\angle ACF = \angle BCF = 18^\circ$

$\angle CFE$ là góc ngoài của $\triangle ACE$ nên $\angle CFE = \angle ACF + \angle EAC = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$

Ta lại có: $BD = AD$ suy ra $\triangle ABD$ cân tại D do đó $\angle ABD = \angle BAD = 54^\circ$

Mà $\triangle ABD = \triangle ECD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \angle BAD = \angle CEF = 54^\circ$

Do vậy $\angle CEF = \angle CFE = 54^\circ$ hay $\triangle CEF$ cân tại C .

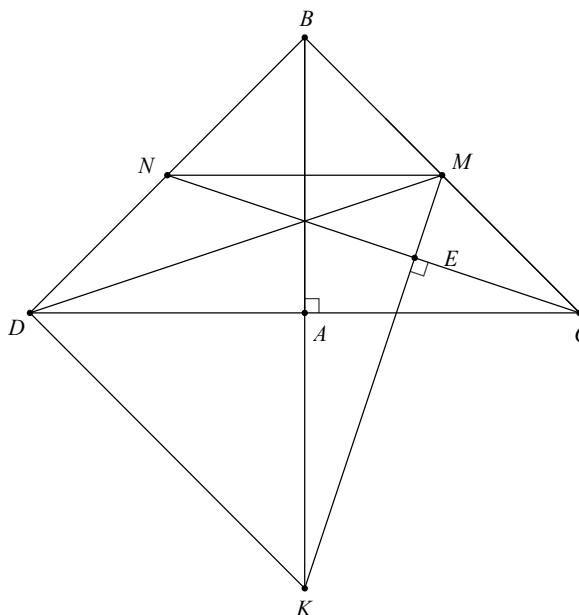
Câu 63. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD .

a) Tam giác BDC là tam giác gì? Vì sao? So sánh DM và CN .

- b) Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với CN cắt tia BA tại K . Chứng minh: $\triangle BMK = \triangle CMD$.
- c) Biết $AB = a$. Tính chu vi tam giác DMK .

Lời giải



- a) Chứng minh được $\triangle BAD = \triangle BAC$ (c - g - c)
 $\Rightarrow BD = BC$ và $\angle BDC = \angle BDA + \angle ABC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BDC$ vuông cân tại B .

Chứng minh được: $\triangle BDM = \triangle BCN \Rightarrow DM = CN$

- b) Vì $\triangle BDM = \triangle BCN \Rightarrow \angle BNC = \angle BMD$
 $\triangle BNC$ vuông tại B nên $\angle BNC + \angle BCN = 90^\circ$
 $\triangle CME$ vuông tại E nên $\angle MCE + \angle CME = 90^\circ$
 Từ đó suy ra: $\angle CME = \angle BMD \Rightarrow \angle BMK = \angle CMD$

Chứng minh: $\triangle BMK = \triangle CMD$ (g - c - g)

- c) $AB = a$ tính được $BC = a\sqrt{2}$ do áp dụng định lý Pytago với tam giác ABC .

$$BD = BC = a\sqrt{2}; BM = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Và cũng tính được

Vì $\triangle BMK = \triangle CMD \Rightarrow MD = MK$

Chu vi $\triangle DMK$ là: $2MD + DK$

$$DM = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Tính được do áp dụng định lý Pytago vào $\triangle BDM$.

Chứng minh được: $\triangle BDK = \triangle BCK \Rightarrow DK = BC = a\sqrt{2}$

$$2MD + DK = 2a \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + a\sqrt{2} = a\sqrt{10} + a\sqrt{2} = a(\sqrt{10} + \sqrt{2})$$

Chu vi $\triangle DMK$ là:

Câu 64. (HSG 7 Lý Nhân, Hà Nam 2021 - 2022)

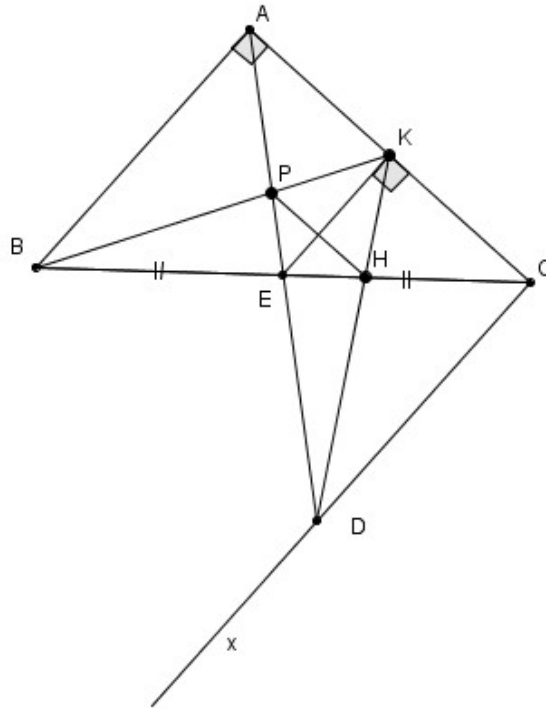
Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B kẻ tia Cx song song với AB . Gọi E là trung điểm BC , tia AE cắt Cx tại D .

a) Chứng minh E là trung điểm của AD .

b) Từ E hạ EK vuông góc với AC (K thuộc AC). Chứng minh $\angle DKC = \angle ABK$.

c) BK cắt AE ở P , DK cắt BC tại H . Chứng minh PH song song với AC .

Lời giải



a) Ta có $DC \parallel AB$ (gt) mà $AB \perp AC$ (gt) nên $DC \perp AC$

Mặt khác tam giác ABC vuông tại A , trung tuyến AE . Suy ra $AE = BE = EC$

Lại có tam giác ACD vuông tại C , và có $E \in AD, EA = EC$ (1)

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle DEC$ có $\angle AEB = \angle CED$ (đối đỉnh); $BE = EC$ (cmt); $\angle EBA = \angle ECD$ (so le trong)

Suy ra $\triangle AEB = \triangle DEC$ (g-c-g) $\Rightarrow AE = ED$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra E là trung điểm của AD .

b) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có $\angle A = \angle C = 90^\circ$; AC cạnh chung; $BC = DA (= 2EC)$

Do đó $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c-g-c) $\Rightarrow AB = CD$ (hai cạnh tương ứng)

Tam giác ABC vuông tại A , E là trung điểm BC . Suy ra $AE = EC = \frac{BC}{2}$

$\Rightarrow \triangle AEC$ cân tại E mà $EK \perp AC \Rightarrow EK$ cũng là trung tuyến AC hay $AK = KC$

Xét $\triangle AKB$ và $\triangle CKD$ có $AK = KC$ (cmt); $\angle A = \angle C = 90^\circ$; $AB = CD$ (cmt)

Suy ra $\triangle AKB = \triangle CKD$ (c-g-c) $\Rightarrow \angle BDK = \angle ABK$ (hai góc tương ứng)

c) Vì $\triangle AKB = \triangle CKD$ (cmt) nên $BK = KD$ (cạnh tương ứng); $\angle AKB = \angle CKD$ (góc tương ứng)

Mà $\angle AKE = \angle KCE = 90^\circ$ nên $\angle PKE = \angle HKE$

Mặt khác $\triangle AEC$ cân tại E có EK đường cao đồng thời là phân giác nên $\angle PEK = \angle HEK$

Xét $\triangle EPK$ và $\triangle EHK$ có $\angle PEK = \angle HEK$ (cmt); EK cạnh chung; $\angle PKE = \angle HKE$ (cmt)

Suy ra $\triangle EPK = \triangle EHK$ (g-c-g) $\Rightarrow PE = EH$ (hai cạnh tương ứng)

Suy ra $\triangle PEH$ cân tại $E \Rightarrow \angle EHP = \frac{180^\circ - \angle E}{2}$ (3)

Mặt khác $\triangle AEC$ cân tại $E \Rightarrow \angle ECA = \frac{180^\circ - \angle E}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle EHP = \angle ECA$ (đồng vị) nên PH song song với AC .

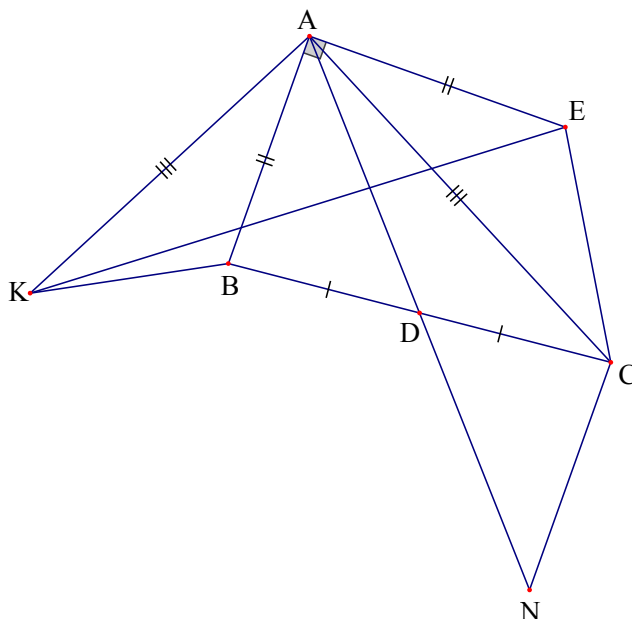
Câu 65. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023; huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), D là trung điểm BC . Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AB tại A và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AC , chứa điểm B vẽ đoạn AK vuông góc với AC tại A và $AK = AC$.

a) Chứng minh rằng: $EC = BK$.

b) Trên tia đối tia DA lấy điểm N sao cho $DN = DA$. Chứng minh $\triangle AKE = \triangle CAN$.

Lời giải



a) Vì $\angle KAB + \angle BAC = 90^\circ$; $\angle BAC + \angle CAE = 90^\circ$ nên $\angle KAB = \angle CAE$

Xét $\triangle KAB$ và $\triangle CAE$ có :

$$\left. \begin{array}{l} AK = AC \\ AB = AE \\ \angle KAB = \angle EAE \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle KAB = \triangle CAE (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow EC = BK \quad (\text{hai cạnh tương ứng})$$

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CND$ có:

$$\left. \begin{array}{l} AD = DN \\ BD = DC \\ \angle ADB = \angle CND \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADB = \triangle CND (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AB = CN = AE$$

Vì $\triangle ABD = \triangle CND (\text{cmt}) \Rightarrow \angle BAD = \angle CND$

Mà chúng ở vị trí so le trong nên $AB \parallel NC$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel NC \\ AB \perp AE \end{array} \right\} \Rightarrow NC \perp AE$$

Ta có:

$$\text{Lại có : } \angle EAK = 90^\circ + \angle EAE$$

$$\text{Mà : } AE \perp NC \Rightarrow \angle ACN = \angle EAE + 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EAE = \angle ACN$$

$$\left. \begin{array}{l} AK = AC \\ AE = CN \\ \angle EAK = \angle ACN \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AKE = \triangle CAN (\text{c.g.c})$$

Xét $\triangle AKE$ và $\triangle ACN$ có:

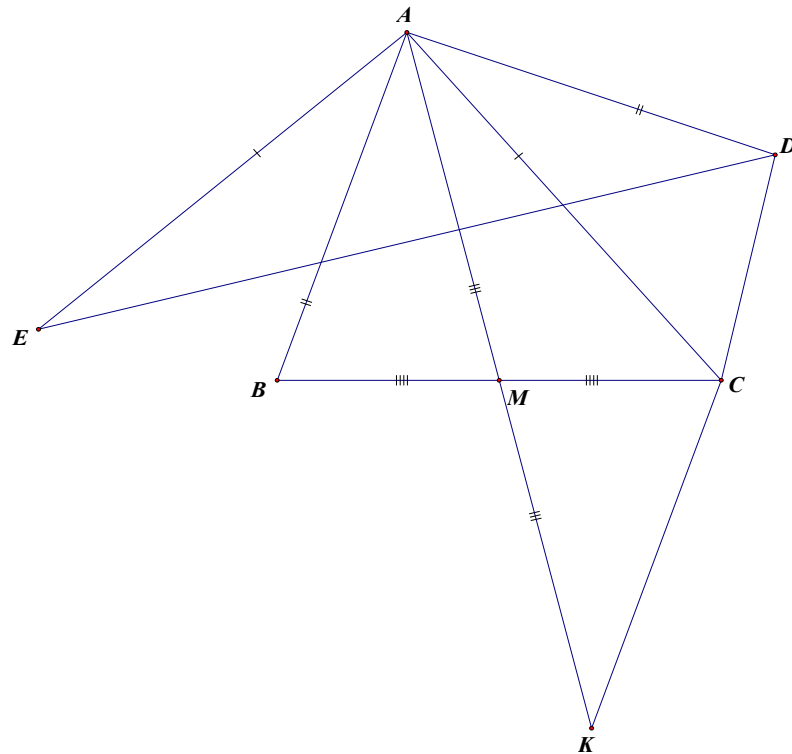
Câu 66. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC . Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB vẽ AD vuông góc với AB và $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa B bờ AC vẽ AE vuông góc với AC và $AE = AC$.

a) Chứng minh: $BE = CD$

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh: $AM \perp ED$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có:

$$AE = AC; AB = AD; \angle BAE = \angle DAC (=90^\circ - \angle BAC)$$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADC \Rightarrow BE = DC \text{ (cạnh tương ứng)}$$

b) Lấy điểm K sao cho M là trung điểm của AK .

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle KCM$ có:

$$AM = KM; BM = MC; \angle BMA = \angle KMC$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow AB = CK; \angle BAM = \angle KCM$$

Mà: $AD = AB \Rightarrow CK = AD$

Xét $\triangle EAD$ và $\triangle ACK$ có: $AE = AC; CK = AD; \angle EAD = \angle ACK (=180^\circ - \angle BAC)$

$$\Rightarrow \triangle EAD = \triangle ACK \Rightarrow \angle AED = \angle AKC$$

$$\Rightarrow \angle EAM + \angle AED = \angle EAM + \angle KAC = 90^\circ$$

Nên: $AM \perp ED$

Câu 67. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023; huyện Rạch Giá 2018 - 2019; huyện Hương Khê 2017 - 2018; huyện Đất Mũi 2016 - 2017)

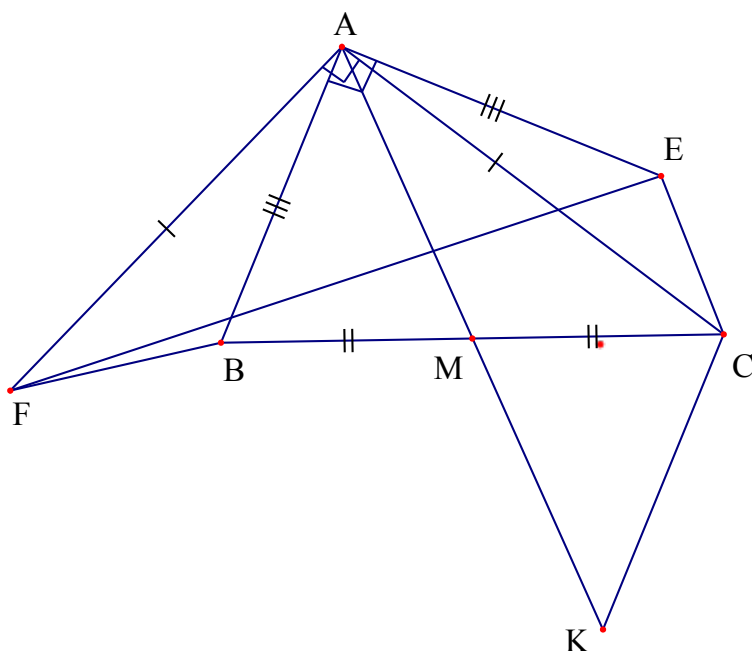
Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $FB = EC$.

b) $EF = 2AM$.

c) $AM \perp EF$.

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ABF = \triangle AEC$ (c - g - c) $\Rightarrow FB = EC$

b) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho $AK = 2AM$.

$$\triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow CK \parallel AB$$

Ta có:

$$\Rightarrow \angle ACK + \angle CAB = \angle EAF + \angle CAB = 180^\circ \Rightarrow \angle ACK = \angle EAF$$

Xét $\triangle EAF$ và $\triangle KCA$ có:

$$AE = AB = CK, AF = AC \text{ (gt)}, \angle ACK = \angle EAF$$

$$\Rightarrow \triangle EAF = \triangle KCA \text{ (c - g - c)} \Rightarrow EF = AK = 2AM$$

c) Từ $\triangle EAF = \triangle KCA \Rightarrow \angle EAK = \angle FEA$

$$\Rightarrow \angle FEA + \angle EAK = \angle EAK + \angle FEA = 90^\circ \Rightarrow AK \perp EF$$

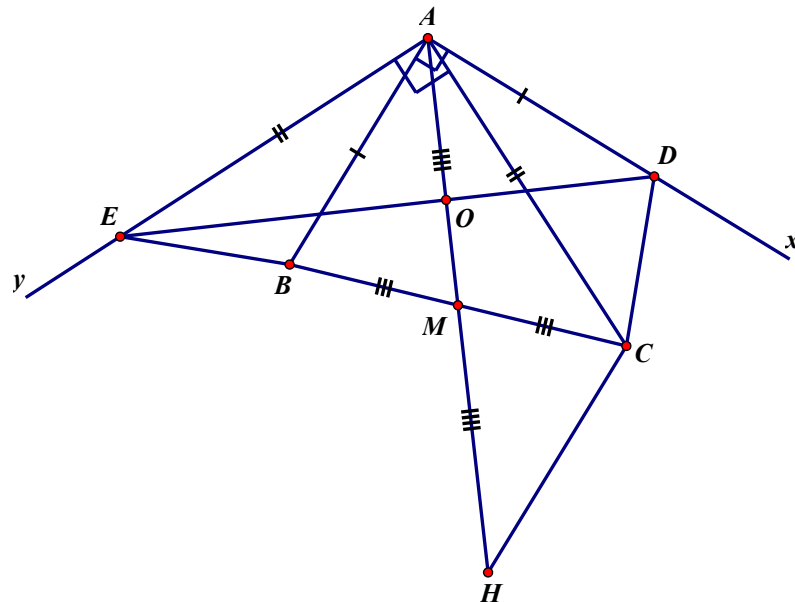
Câu 68. (HSG 7 Vũ Thư, Thái Bình 2021 – 2022)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ tia Ax vuông góc với AB (tia AC nằm giữa hai tia Ax và AB), trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Kẻ tia Ay vuông góc với AC (tia AB nằm giữa hai tia Ay và AC), trên tia Ay lấy điểm E sao cho $AE = AC$.

a) Chứng minh $BE = CD$.

b) Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm H thuộc tia đối của tia MA sao cho $MH = MA$. Chứng minh $\triangle ADE = \triangle CHE$.

Lời giải



a) Ta có: $\angle BAE + \angle BAC = \angle DAC = 90^\circ$ (vì $Ay \perp AC$),

$\angle CAD + \angle BAC = \angle BAE = 90^\circ$ (vì $Ax \perp AB$)

$\Rightarrow \angle BAE = \angle CAD$ (cùng phụ với $\angle BAC$).

Xét $\triangle BAE$ và $\triangle DAC$ có:

$AB = AD$,

$AE = AC$ (giả thiết),

$\angle BAE = \angle CAD$ (chứng minh trên)

Do đó $\triangle BAE = \triangle DAC$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$ (hai cạnh tương ứng)..

b) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle HMC$ có:

$BM = MC$ (vì M là trung điểm BC),

$AM = MH$ (giả thiết),

$\angle AMB = \angle HMC$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle AMB = \triangle HMC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CH$, $\angle ABM = \angle MCH$ (tương ứng).

Mà $\angle ABM$ và $\angle MCH$ ở vị trí so le trong so với AB và $CH \Rightarrow AB \parallel CH$

$\Rightarrow \angle ACH + \angle BAC = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía).

Lại có: $\angle BAC + \angle EAD = \angle BAC + \angle EAB + \angle BAD = \angle EAC + \angle BAD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle EAD = \angle ACH$.

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CHA$ có:

$AE = AC$ (giả thiết)

$AD = AB$ (chứng minh trên)

$$\widehat{EAD} = \widehat{ACH} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Do đó } \triangle ADE = \triangle CHA \text{ (c.g.c)}$$

Câu 69. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Hoàng Hóa 2018 - 2019)

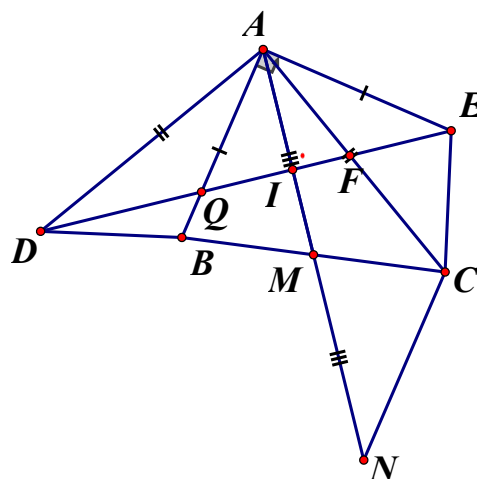
Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, $AB < AC$, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B , vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AC và $AD = AC$.

a) Chứng minh $BD = CE$

b) Trên tia đối của tia MA lấy N sao cho $MN = MA$. Chứng minh: $\widehat{ACN} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ và $\triangle ADE = \triangle CAN$

c) Chứng minh: $AP < AQ$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$$AD = AC(gt)$$

$$AE = AB(gt);$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAE} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AEC(c.g.c)$$

$$\Rightarrow BD = CE \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

b) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle NCM$ có:

$$AM = MN(gt);$$

$$BM = CM(gt);$$

$$\widehat{AMB} = \widehat{NMC} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle NCM(c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{NCM} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Do đó: $\widehat{ACN} = \widehat{ACB} + \widehat{BCN} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$

+ Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{BAE} - \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ACN}$$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ACN$ có:

$$CN = AE \text{ (cùng bằng } AB \text{)},$$

$$AC = AD(gt);$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{ACN}(cmt)$$

$$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CAN(cgc)$$

c) Theo tính chất góc ngoài, ta có: $\widehat{AQP} = \widehat{QAD} + \widehat{QDA}; \widehat{APQ} = \widehat{PAE} + \widehat{PEA}$

Mà $AB < AC$ nên $AE < AD \Rightarrow \widehat{ADE} < \widehat{AED}$

Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{QAD} = \widehat{PAE}$

Từ đó suy ra $\widehat{QAD} + \widehat{QDA} < \widehat{PAE} + \widehat{PEA}$

Hay $\widehat{AQP} < \widehat{APQ} \Rightarrow AP < AQ$

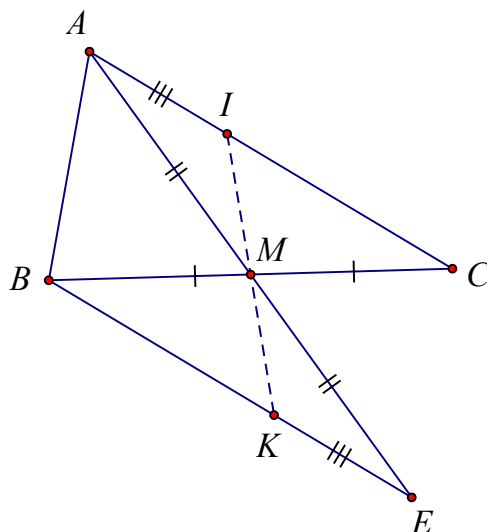
Câu 70. (HSG 7 huyện Sơn Động; huyện Kinh Môn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $MA = ME$

a) Chứng minh: $AC = EB$; $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên đoạn thẳng AC , K là một điểm trên đoạn thẳng EB mà $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh: $AC = EB$; $AC \parallel BE$.

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MEB$ có:

$$MC = MB \text{ (do } M \text{ là trung điểm của } BC)$$

$$\angle AMC = \angle EMB \text{ (đối đỉnh)}$$

$$MA = ME \text{ (GT)}$$

Do đó $\triangle MAC = \triangle MEB$ (c. g. c)

$$\Rightarrow AC = BE \text{ (các cạnh tương ứng) và } \angle MAC = \angle MEB \text{ (các góc tương ứng)}$$

Mà $\angle$ này ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BE$

$$\text{Vậy } AC = BE \text{ và } AC \parallel BE$$

b) Do $\triangle MAC = \triangle MEB$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \angle AMI = \angle EMK \text{ (hai góc tương ứng).}$$

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$$AI = EK \text{ (giả thiết), } \angle IAM = \angle KEM \text{ (theo ý a), } MA = ME \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK \text{ (c.g.c).}$$

$$\text{Mà } \angle AMK + \angle EMK = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù) nên } \angle AMK + \angle IMA = 180^\circ \Rightarrow \angle IMA = 180^\circ$$

Hay ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Câu 71. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

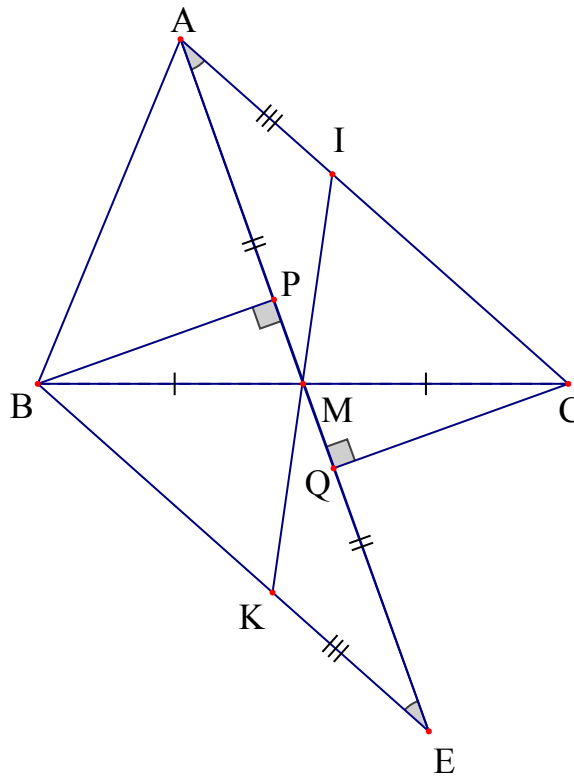
Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$

a) Chứng minh rằng: $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ B kẻ $BP \perp AM$, từ C kẻ $CQ \perp AM (P, Q \in AE)$. Chứng minh $AP + AQ = 2AM$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\angle AMC = \angle EMB \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c - g - c)} \Rightarrow AC = EB \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Vì } \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (cmt)} \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB \text{ (hai góc tương ứng)}$$

mà hai góc này ở vị trí so le trong

nên $AC \parallel BE$

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\angle MAI = \angle MEK \text{ (}\triangle AMC = \triangle EMB\text{)}$$

$$AI = EK \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \angle AMI = \angle EMK \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \angle AMI + \angle IME = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ \Rightarrow \text{Ba điểm } I, M, K \text{ thẳng hàng.}$$

c) Ta có $\triangle BPM = \triangle CQM$ (Vì $\angle BPM = \angle CQM = 90^\circ$; $BM = CM$; $\angle PBM = \angle QCM$)

$$\Rightarrow PM = QM \Rightarrow AP + AQ = AM - PM + AM + MQ = 2AM$$

Câu 72. (HSG 7 huyện Krông Ana; trường Bắc Sơn, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Thuận Thành, Bắc Ninh 2021 - 2022; trường Nguyễn Chí Chích 2017 - 2018)

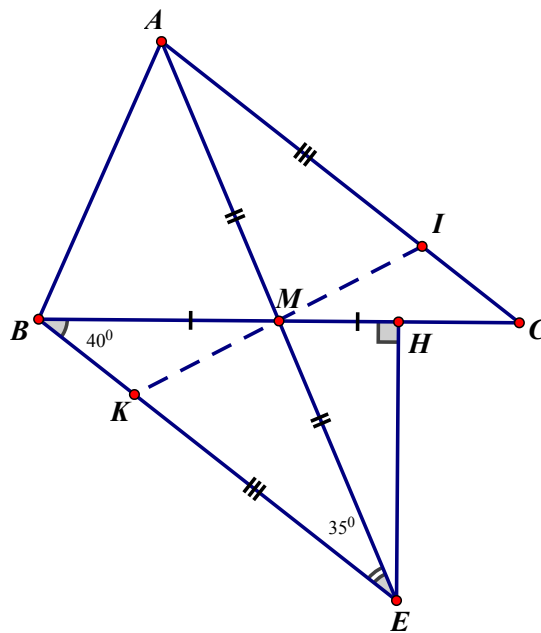
Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

a) Chứng minh rằng: $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\angle HBE = 50^\circ$, $\angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\angle AMC = \angle EMB \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c - g - c)} \Rightarrow AC = EB \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Vì } \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \angle MAC = \angle MEB \text{ (hai góc tương ứng)}$$

mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BE$

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$$AM = EM \text{ (gt); } \angle MAI = \angle MEK \text{ (} \triangle AMC = \triangle EMB \text{); } AI = EK \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \angle AMI = \angle EMK \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mà $\angle AMI + \angle IME = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ \Rightarrow$ Ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ$.

$$\Rightarrow \angle HBE = 90^\circ - \angle HEB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ \Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HME$.

$$\Rightarrow \angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$$

Câu 73. (HSG 7 trường Hùng Thư 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

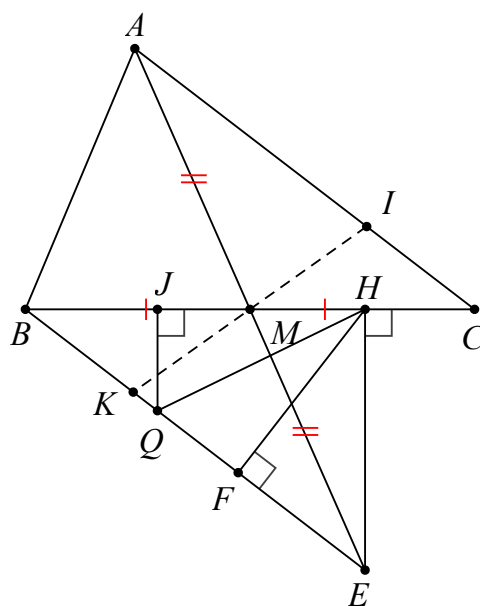
a) $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\angle HBE = 50^\circ$, $\angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$.

d) Từ H kẻ $HF \perp BE$ ($F \in BE$). Chứng minh rằng: $HF + BE > BH + HE$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = ME \text{ (gt); } \angle AMC = \angle EMB \text{ (đối đỉnh); } BM = MC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow AC = EB \text{ và } \angle MAC = \angle MEB$$

Mà 2 góc $\angle MAC$ và $\angle MEB$ ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BE$.

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$$AM = EM \text{ (gt); } \angle MAI = \angle MEK \text{ (do } \triangle AMC = \triangle EMB \text{); } AI = EK \text{ (gt)}$$

$$\text{Nên } \triangle AMI = \triangle EMK \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \angle AMI = \angle EMK \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \angle AMI + \angle EME = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle EME = \angle AMI + \angle EME = 180^\circ$$

Suy ra ba điểm I, M, K thẳng hàng.

$$\text{c) Trong tam giác vuông } BHE \text{ (} \angle H = 90^\circ \text{) có } \angle HBE = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HEB = 90^\circ - \angle HBE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$.

$$\text{Nên } \angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ \text{ (định lý góc ngoài của tam giác)}$$

$$\text{d) Tam giác } BHE \text{ vuông tại } H \text{ nên } BE > HE, EF < HE$$

Do đó trên BE tồn tại điểm Q nằm giữa B và F sao cho $QE = HE$.

$$\text{Ta có } \triangle QHE \text{ cân tại } E \text{ nên } \angle HQE = \angle QHE$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \angle BHQ + \angle QHE = 90^\circ \\ \angle HQE + \angle QHF = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle BHQ = \angle QHF$$

$$\text{Kẻ } QJ \perp BH$$

$$\text{Ta có } \triangle QJH = \triangle QFH \text{ (ch - gn)}$$

$$\Rightarrow HF = JH, BQ > BJ$$

$$\text{Do đó } FH + BE = FH + BQ + QE > JH + BJ + HE = HB + HE$$

$$\text{Vậy } FH + BE > HB + HE$$

Câu 74. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

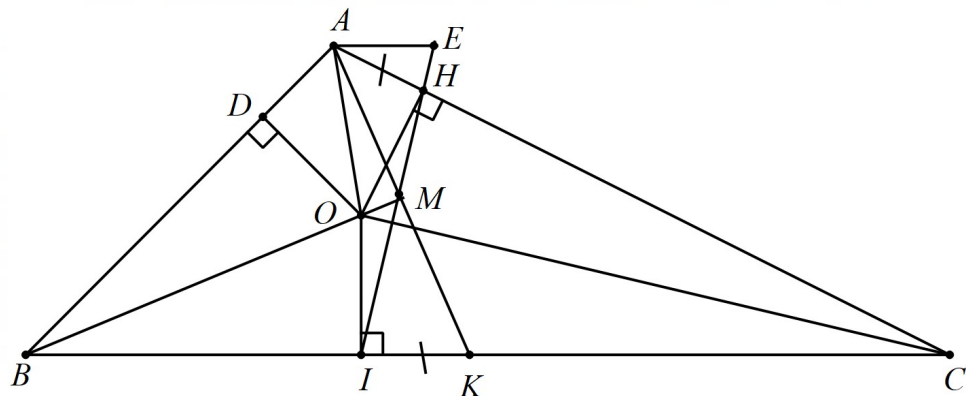
Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$ gọi O là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC . Kẻ OH vuông góc với AC tại H , OI vuông góc với BC tại I .

a) Chứng minh $\triangle CHI$ là tam giác cân

b) Trên đoạn AC lấy K sao cho $IK = AH$, gọi M là giao điểm của AK và HI . Chứng minh M là trung điểm của AK .

c) Chứng minh B, O, M thẳng hàng

Lời giải



a) Xét ΔCIO và ΔCHO

Có CO chung

$$\angle IO = \angle HO = 90^\circ$$

Nên $\Delta CIO = \Delta CHO \Rightarrow CI = CH \Rightarrow \Delta CHI$ cân tại C

b) Kẻ $AE \parallel BC$ ta có $\angle AEH = \angle HIC$; $\angle HIC = \angle AHE$; $\angle HIC = \angle HIC$

Nên $\square_{AEH} = \square_{AHE}$ suy ra Δ_{AEH} cân tại A

$$\Rightarrow AE = AH = IK$$

Xét $\Delta AEM, \Delta KMI$ có $\widehat{MAE} = \widehat{MIK}; AE = IK; \widehat{AMI} = \widehat{KMI}$

$$\Delta AEM = \Delta KIM \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = KM$$

Vậy M là trung điểm của AK

c) Kẻ $OD \perp AB$, xét $\triangle AOD$ & $\triangle AOH$ có OA chung,

$$\angle ADO = \angle AHO = 90^\circ; \angle OAD = \angle OAH \Rightarrow \triangle OAD = \triangle OAH \Rightarrow OD = OH$$

Ta chứng minh $\triangle BOD = \triangle BOI \Rightarrow BD = BI \Rightarrow BK = BI + IK = BD + AD = BA$

$$\Rightarrow \triangle BKA \text{ cân tại } B \Rightarrow BO \perp AK$$

Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow OM \perp AK$

$\Rightarrow O, M, B$ thẳng hàng

Câu 75. (HSG 7 TP Lào Cai 2022 - 2023)

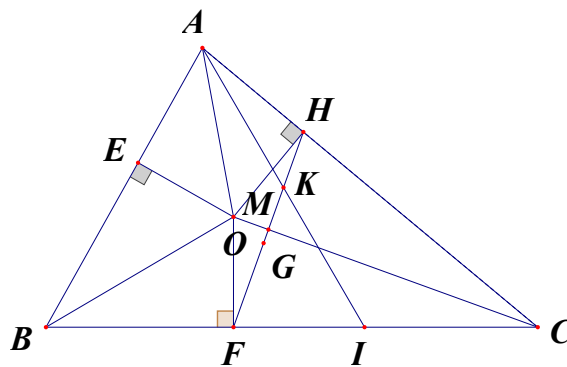
Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

a) Chứng minh ΔF_{CH} cân; $OA = OI$.

b) Gọi M là điểm trên đoạn thẳng FH sao cho $MI = FI$. Chứng minh $MI \parallel AC$.

c) Chứng minh K là trung điểm của AI và 3 điểm B, O, K thẳng hàng

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle FCH$ cân; $OA = OI$.

Xét $\triangle CHO$ và $\triangle CFO$ Có:

$$\angle HO = \angle FO = 90^\circ$$

CO là cạnh chung

$$\angle HCO = \angle FCO \text{ (vì } CO \text{ là phân giác } \angle FCH \text{)}$$

Suy ra: $\triangle CHO = \triangle CFO$ (c.h-g.n) $\Rightarrow CH = CF \Rightarrow \triangle FCH$ cân tại C

Xét $\triangle AHO$ và $\triangle IFO$ có:

$$\angle HO = \angle FO = 90^\circ$$

$$AH = FI \text{ (gt)}$$

$$OH = OF \text{ (Tính chất đồng quy của 3 đường phân giác)}$$

$$\triangle AHO = \triangle IFO \text{ (c.g.c) suy ra } OA = OI \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

b) Xét $\triangle FMI$ cân tại I ($MI = FI$ giả thiết) $\Rightarrow \angle MFI = \angle FMI$ (1)

Xét $\triangle FMC$ cân tại $C \Rightarrow \angle HFC = \angle FHC$ (2)

$$\text{Từ (1); (2)} \Rightarrow \angle MFI = \angle FMI = \angle FHC$$

$$\Rightarrow \angle MCH = \angle FIM \text{ mà 2 góc ở vị trí đồng vị nên } MI \parallel AC.$$

c) +) Qua I vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

Ta có $\triangle FCH$ cân tại $C \Rightarrow \angle HCF = \angle FCH$ (1)

Mà $\angle HCF = \angle FGI$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle FCH = \angle FGI$ hay $\angle FCG = \angle FGI$,

Vậy $\triangle FGI$ cân tại $I \Rightarrow FI = GI$, mặt khác:

$$FI = AH \text{ nên } GI = AH (= FI)$$

Ta lại có: $\angle IGK = \angle AHK$; $\angle HAK = \angle GIK$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IGK$ có:

$$\begin{aligned} \widehat{GK} &= \widehat{HK} (\text{cmt}) ; GI = AH (\text{cmt}) ; \widehat{HAK} = \widehat{GIK} (\text{cmt}) \\ \Rightarrow \Delta AHK &= \Delta IGK \text{ (g-c-g)} \\ \Rightarrow AK &= KI \text{ (hai cạnh tương ứng)} \end{aligned}$$

Hay K là trung điểm của AI

+) Vẽ $OE \perp AB$ tại E .

Tương tự câu a, ta có: $\Delta AEH, \Delta BEF$ thứ tự cân tại A, B .

Suy ra $BE = BF$ và $AE = AH$.

$$BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI$$

$\Rightarrow \Delta ABI$ cân tại B .

Mà BO là phân giác của $\widehat{B}$, BK là đường trung tuyến của ΔABI
nên B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 76. (HSG 7 huyện Quan Sơn; huyện Hoàng Hóa; trường Hồng Lĩnh, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Lê Hồng Phong; trường Nhơn Trí 2018 - 2019; trường Kim An; trường Phú Trường; trường Lý Thường Kiệt 2017- 2018; trường Giao Tân; trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)

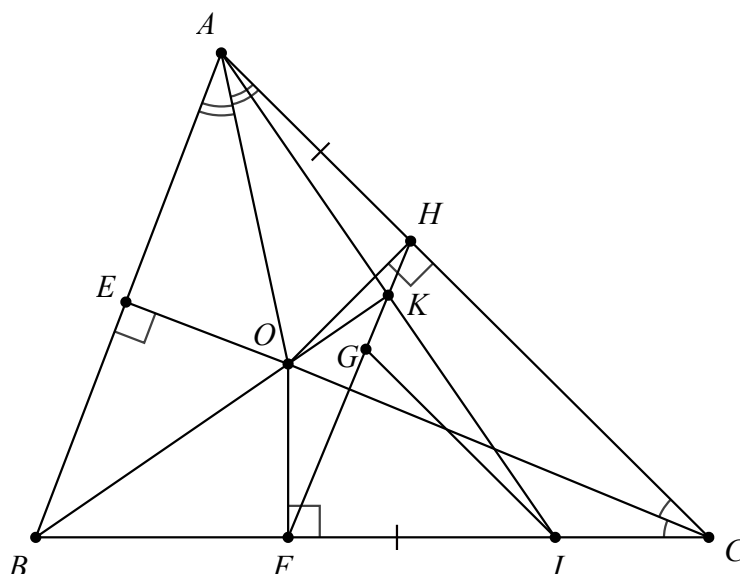
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

1) Chứng minh ΔFCH cân.

2) Chứng minh $AK = KI$.

3) Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



1) Xét ΔCHO và ΔCFO có:

OC là cạnh chung

$\widehat{OCH} = \widehat{OCF}$ (vì CO là tia phân giác của $\widehat{ACB}$)

Do đó $\triangle CHO = \triangle CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra: $CH = CF$.

Vậy $\triangle FCH$ cân tại C .

2) Vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

Suy ra $\widehat{FIG} = \widehat{FCH}$ và $\widehat{FGI} = \widehat{FHC}$ (hai góc so le trong)

Mà $\widehat{FCH} = \widehat{FHC}$ (vì $\triangle FCH$ cân tại C)

Nên $\widehat{FIG} = \widehat{FGI}$

Do đó $\triangle FIG$ cân tại I .

$\Rightarrow IG = IF$

Mà $FI = AH$ nên $AH = IG$

Ta có $\widehat{IGK} + \widehat{IGF} = 180^\circ$; $\widehat{AHK} + \widehat{FHC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Mà $\widehat{IGF} = \widehat{FHC}$ (cmt)

Nên $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$

$\triangle AHK$ có $\widehat{HAK} + \widehat{AKH} + \widehat{AHK} = 180^\circ$

$\triangle IKG$ có $\widehat{KIG} + \widehat{IKG} + \widehat{IGK} = 180^\circ$

Mà $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$ (cmt); $\widehat{AKH} = \widehat{IKG}$ (hai góc đối đỉnh)

Nên $\widehat{HAK} = \widehat{KIG}$

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IKG$ có:

$AH = IG$ (cmt)

$\widehat{HAK} = \widehat{KIG}$ (cmt)

$\widehat{AHK} = \widehat{IGK}$ (cmt)

Do đó $\triangle AHK = \triangle IKG$ (g – c – g).

Suy ra $AK = KI$ (hai cạnh tương ứng)

3) - Vẽ $OE \perp AB$ tại E .

Cách 1

Tương tự câu a ta có: $\triangle AEH$, $\triangle BEF$ thứ tự cân tại A , B . Suy ra: $BE = BF$ và $AE = AH$.
 $BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI$. Suy ra: $\triangle ABI$ cân tại B .

Mà BO là phân giác góc B , và BK là đường trung tuyến của $\triangle ABI$

Nên: B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Cách 2:

$\triangle ABC$ có 2 tia phân giác AO và CO cắt nhau tại O

Nên BO là tia phân giác thứ ba của $\triangle ABC$ (*)

$\triangle AOB = \triangle IOB$ (g.c.g) nên $AB = BI$

Chứng minh được: $\triangle ABK = \triangle IBK$ (c.c.c) $\Rightarrow \triangle ABK = \triangle IBK$

Từ đó suy ra BK là tia phân giác của $\triangle ABC$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra tia BK, BO trùng nhau

Hay B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 77. (HSG 7 Tp Bắc Giang 2022-2023)

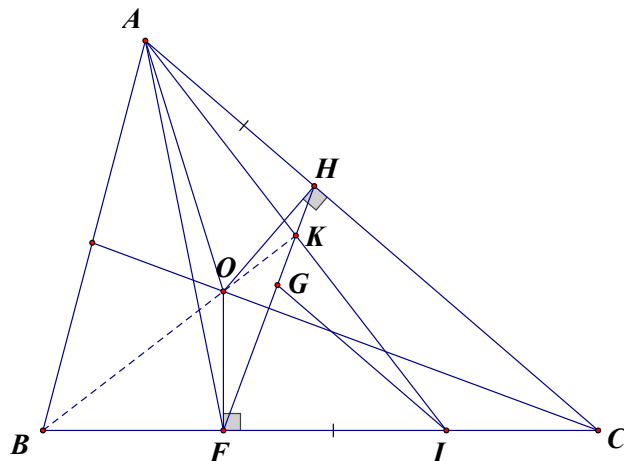
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn có $AB < AC$. Các tia phân giác của $\angle A$ và $\angle C$ cắt nhau tại O . Gọi F và H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ O xuống các cạnh BC và AC .

a) Chứng minh $\triangle HFC$ cân tại C .

b) Trên cạnh FC lấy điểm I sao cho $AH = FI$. Qua I kẻ đường thẳng song song AC cắt FH tại G . Gọi K là giao điểm của AI và FH . Chứng minh $\triangle AHK = \triangle IGK$.

c) Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $OH \perp AC$ tại H và $OF \perp BC$ tại F nên $\angle OHC = \angle OFC = 90^\circ$

Lại có CO là phân giác của $\angle ACB$ nên $\angle OCH = \angle OCF$

Chỉ ra $\triangle OHC = \triangle OFC$ (cạnh huyền-góc nhọn)

Suy ra $CH = CF \Rightarrow \triangle HCF$ cân tại C (đpcm)

b) Chỉ ra $\triangle IGF$ cân tại $I \Rightarrow IG = IF = AH$

Ta có $IG \parallel AC$ nên $\angle KIG = \angle KAH; \angle KGI = \angle KHA$ (hai góc so le trong)

$$\Delta AHK = \Delta IGK. \text{ (g-c-g)}$$

c) Kẻ OE vuông góc AB tại E . Chỉ ra $OE = OF$ và $\Delta OBE = \Delta OBF$ (cạnh huyền - góc vuông). Từ đó chứng minh được BO là phân giác của $\square ABC$ (1)

Từ $\Delta AHK = \Delta IGK$ suy ra $KA = KI$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh $\Delta ABK = \Delta IBK$ (c-c-c)

Chỉ ra BK là phân giác của $\square ABC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có B, O, K thẳng hàng.

Câu 78. (HSG 7 Thị xã Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2020 – 2021)

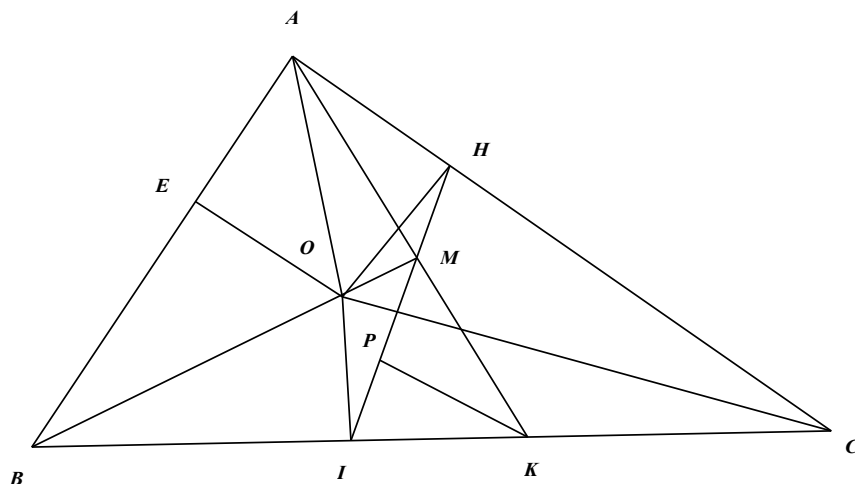
Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC < BC$, O là giao điểm ba tia phân giác các góc trong của tam giác. Kẻ OH vuông góc AC tại H , OI vuông góc BC tại I .

1) Chứng minh ΔCHI cân.

2) Trên đoạn IC lấy K sao cho $IK = AH$, gọi M là giao điểm của AK và HI . Chứng minh M là trung điểm của AK .

3) Chứng minh B, O, M thẳng hàng.

Lời giải



1) Xét ΔCHO và ΔCIO có: $\angle OHC = \angle OIC = 90^\circ$, OC chung, $\angle OCH = \angle OCI$ (gt)
 $\Rightarrow \Delta CHO = \Delta CIO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CH = CI$ (hai cạnh tương ứng)

Suy ra ΔCHI cân tại C .

2) Từ K kẻ đường thẳng song song với AC , cắt HI tại P

Suy ra $\angle KPI = \angle PHI$ (đồng vị)

Mà $\angle PHI = \angle IHP$ (vì ΔCHI cân tại C)

$\Rightarrow \angle KPI = \angle KIP \Rightarrow \Delta KPI$ cân tại K

$$\Rightarrow KI = KP \text{ mà } KI = AH \Rightarrow PK = AH$$

Từ (1) suy ra: $\angle AHM = \angle KPM$, $\angle MAH = \angle MKP$ (hai góc so le trong)

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle KPM$ có:

$$AH = PK \text{ (cmt)}, \angle AHM = \angle KPM \text{ (cmt)}, \angle MAH = \angle MKP \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle AHM = \triangle KPM$ (g-c-g), suy ra $AM = MK$.

3) Kẻ OE vuông góc với AB tại E

Tương tự ý 1 ta chứng minh được $BI = BE$, $AH = AE$

mà $AH = IK$ (gt) nên $IK = AE$

Do đó: $BI + IK = BE + AE$ suy ra $BK = BA \Rightarrow \triangle BAK$ cân tại B

mà M là trung điểm của AK

Do đó $\triangle BAK$ cân tại B có BM là đường trung tuyến

Suy ra BM là tia phân giác của $\angle ABK$

Mà BO là tia phân giác của $\angle ABK$

Do đó B, O, M thẳng hàng.

Câu 79. (HSG 7 TP Thái Bình, Thái Bình, Trường Trần Hân 2021 - 2022)

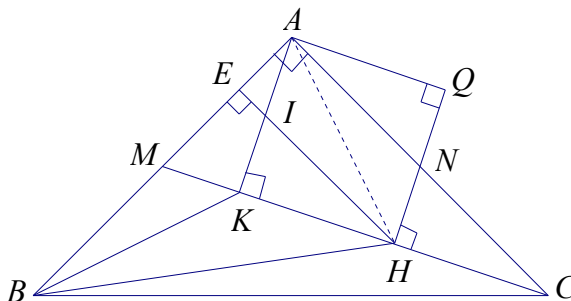
Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC . Kẻ NH vuông góc CM tại H , HE vuông góc AB tại E , AK vuông góc CM tại K , AQ vuông góc với HN tại Q .

a) Tính $\angle BKH$.

b) Chứng minh $\triangle ABH$ cân.

c) Chứng minh HM là phân giác của $\angle BHE$.

Lời giải



a) Ta có: $AK \parallel QH$ ($AK \perp KH, QH \perp KH$) (1)

Mà: $AQ \perp QH$ và $HK \perp AK$ (gt) $\Rightarrow AQ \parallel HK$ (Từ vuông góc đến song song) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AQ = KH; AK = QH$

Lại có: $AK = AQ$ (gt) $\Rightarrow AK = AQ = QH = HK$

$\Rightarrow \Delta AQH$ vuông cân tại Q nên $\angle AHQ = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle AHC = \angle AHQ + \angle QHC = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ (1)

Ta có $\Delta AKB = \Delta CHA$ (c-g-c) vì:

$AK = CH$ (cmt); $AB = AC$ (gt); $\angle BAK = \angle HCA$ (cùng phụ $\angle KAC$)

$\Rightarrow \angle AKB = \angle AHC$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle AHC = 135^\circ$ (chứng minh trên) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle AKB = 135^\circ$

Mặt khác $\angle AKB + \angle BKH + \angle AKH = 360^\circ \Rightarrow 135^\circ + \angle BKH + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \angle BKH = 135^\circ$

b) Xét ΔBKA và ΔBKH có:

BK chung, $\angle AKB = \angle BKH$ ($= 135^\circ$), $KA = KH$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BKA = \Delta BKH$ (c-g-c) $\Rightarrow BA = BH$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta BAH$ cân tại B

c) Ta có $\angle MAK = \angle MHE$ (cùng phụ với $\angle AMH$) hay $\angle BAK = \angle KHI$

Vì $\angle BKA = \angle BKH \Rightarrow \angle BAK = \angle BHK$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \angle BHK = \angle KHI$

Mà HM nằm giữa hai tia HE và HB nên HM là tia phân giác của $\angle BHE$.

Câu 80. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông cân có đáy là BC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

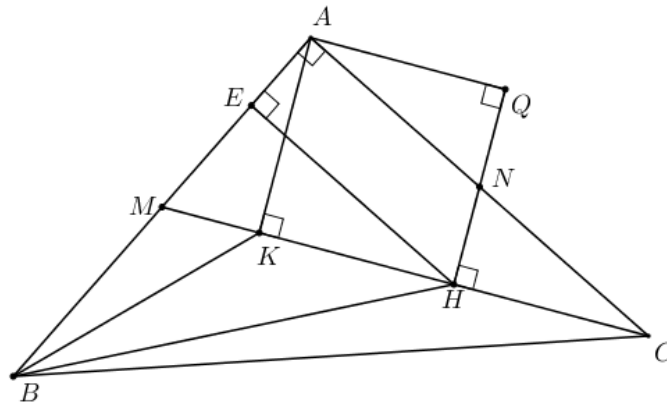
Kẻ NH vuông góc với CM tại H . Kẻ HE vuông góc với AB tại E . Kẻ AK vuông góc với CM tại K . Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q .

a) Chứng minh tam giác $\Delta AKM = \Delta CHN = \Delta AQN$

b) Chứng minh ΔABH cân.

c) Gọi F là điểm di động trên tia CA , P là điểm di động trên tia CB . Xác định vị trí các điểm F, P sao cho ΔHFP có chu vi bé nhất.

Lời giải



a) Xét hai tam giác vuông MKA và NHC có:

$$AM = CN \left(= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC \right)$$

$$\angle MAK = \angle NCH \text{ (cùng phụ với } \angle KAC \text{)}$$

Suy ra $\triangle MKA = \triangle NCH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$$\triangle MKA = \triangle NQA$$

Tương tự :

$$\triangle MKA = \triangle NCH = \triangle NQA$$

Suy ra

$$AK = AQ = HC$$

b) Từ câu a suy ra

Xét hai tam giác vuông AHC và AKB có:

$$\angle MAK = \angle NCH, AB = AC, AK = HC$$

Suy ra $\triangle AHC = \triangle BKA$ (*)

Mặt khác ta có AQHK là hình chữ nhật nên $AQ = KH$ suy ra $AK = KH$

Vậy: $\triangle AKH$ vuông cân suy ra $\angle AHK = 45^\circ$.

Khi đó: $\angle AHC = 135^\circ$ nên $\angle AKB = 135^\circ$ suy ra $\angle BKH = 135^\circ$

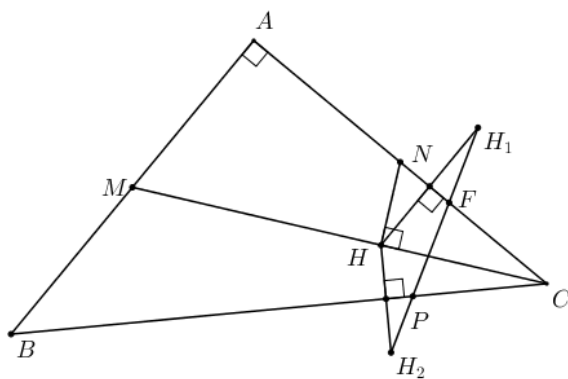
Xét hai tam giác vuông BKH và AKB có

cạnh BK chung ; $AK = KH$; $\angle AKB = \angle BKH = 135^\circ$

Suy ra $\triangle ABK = \triangle HBK$ Suy ra $AB = BH$

Vậy tam giác ABH cân tại B

c)



Gọi H_1 là điểm sao cho AC là đường trung trực của HH_1 ; H_2 là điểm sao cho AB là đường trung trực của HH_2 .

Ta có H_1, H_2 cố định, độ dài đoạn thẳng H_1H_2 không đổi.

Theo tính chất đường trung trực ta có: $HF = FH_1; HP = PH_2$

Nên $HF + HP + PF = PH_2 + FH_1 + PF \geq H_1H_2$

Vậy chu vi $d \geq H_1H_2$ do đó d nhỏ nhất bằng H_1H_2 khi H_1, F, P, H_2 thẳng hàng

Vậy chu vi ΔHFP nhỏ nhất khi F là giao điểm của H_1H_2 với AC , P là giao điểm của H_1H_2 với AB .

Câu 81. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

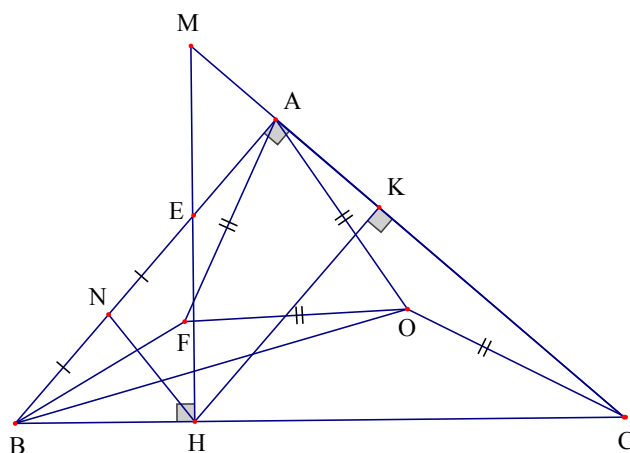
Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Từ điểm E trên cạnh AB vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng BC và AC thứ tự tại H và M . Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BE . Từ H vẽ đường thẳng song song với AB cắt đường thẳng AC tại K .

a) Chứng minh tam giác BHE cân.

b) Chứng minh K là trung điểm của đoạn thẳng MC .

c) Cho điểm O nằm trong tam giác ABC sao cho $OA = OC$ và $\angle AOC = 150^\circ$. Chứng minh $AB = OB$.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle BHE$ vuông tại H và $\angle EBH = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ vuông cân tại A).
Suy ra $\triangle BHE$ vuông cân tại H .

b) Ta có: $\begin{cases} AB \parallel HK \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp AC \Rightarrow \triangle HKM$ vuông tại K (1)

Mà $\angle AEM = \angle BEH = 45^\circ$ (đối đỉnh) và $\angle AEM = \angle KHM$ (đồng vị) nên $\angle KHM = 45^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MKH$ vuông cân tại $K \Rightarrow MK = KH$.

Ta lại có: $CK = KH$ (vì $\triangle KHC$ vuông cân tại K) nên suy ra $MK = CK$ hay K là trung điểm của đoạn thẳng MC .

c) Dựng $\triangle AFO$ đều trong tam giác ABC .

Xét $\triangle AOE$ và $\triangle ABF$, ta có:

$$AO = AF; \angle OAC = \angle FAB; AB = AC$$

Suy ra $\triangle AOE = \triangle ABF$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AFB = \angle AOC = 150^\circ$.

Khi đó: $\angle BFO = 360^\circ - \angle AFB - \angle AFO = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$.

Xét $\triangle AFB$ và $\triangle BFO$, ta có:

$$FO = AF; \angle AFB = \angle BFO; BF \text{ là cạnh chung}$$

Suy ra $\triangle AFB = \triangle BFO$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = OB$ (đpcm).

Câu 82. (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân có đáy BC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Kẻ NH vuông góc với CM tại H . Kẻ HE vuông góc với AB tại E . Kẻ AK vuông góc với CM tại K . Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q .

1) Chứng minh rằng $AK = HC = AQ$. Tính số đo góc BKA .

2) Chứng minh tam giác ABH cân và HM là tia phân giác của góc BHE .

3) Gọi I là điểm di động trên tia CA , J là điểm di động trên tia CB . Xác định vị trí các điểm I, J sao cho tam giác HJI có chu vi bé nhất.

Lời giải

Vì $\angle BKA$ và $\angle AKQ$ kề bù nên $\angle BKA = 180^\circ - \angle AKQ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

2) Vì $AK \parallel HN$ hay $AK \parallel HQ$ nên $\angle HOK = \angle AKQ = 45^\circ$ (Hai góc so le trong)

Xét $\triangle AKQ$ có: $\angle KAQ = 90^\circ$, $\angle AKQ = 45^\circ$

Suy ra $\triangle AKQ$ vuông cân tại A, suy ra $\angle QK = 45^\circ$

Xét $\triangle AKQ$ và $\triangle HKQ$ có: $\angle KAQ = \angle KHQ = 90^\circ$, KQ (cạnh chung), $\angle QK = \angle QKH = 45^\circ$

Suy ra $\triangle AKQ = \triangle HKQ$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow AK = HK$ và $\angle AKQ = \angle HKQ = 45^\circ$

Ta có: Vì $\angle BKH$ và $\angle HKQ$ kề bù nên $\angle BKH = 180^\circ - \angle HKQ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Xét $\triangle BKA$ và $\triangle BKH$ có: $AK = KH$, $\angle BKA = \angle BKH = 135^\circ$ (cmt), BK là cạnh chung

Suy ra: $\triangle BKA = \triangle BKH$ (c.g.c) $\Rightarrow BA = BH$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó tam giác ABH cân tại B.

Vì $\angle BKA = \angle BKH$ nên $\angle A_1 = \angle H_1$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle A_1 = \angle E_1$ (chứng minh trên);

Ta lại có $AC \parallel HE$ (vì cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \angle H_1 = \angle E_1$ (2 góc đồng vị)

Suy ra: $\angle H_1 = \angle E_1$ hay HM là tia phân giác của góc BHE .

3) Lấy điểm E' sao cho AC là đường trung trực của HE' , mà I thuộc AC nên $IE' = IH$.

Lấy điểm F sao cho BC là đường trung trực của HF , mà J thuộc BC nên $JF = JH$.

Chu vi tam giác HJI là $HI + IJ + HJ = E'I + IJ + JF \geq E'F$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các điểm E', I, J, F thẳng hàng hay I, J lần lượt là giao điểm của $E'F$ với AC, BC .

Vậy: Chu vi tam giác HJI khi I, J lần lượt là giao điểm của EF với AC, BC .

Câu 83. (HSG 7 Diễn Châu 2022 - 2023)

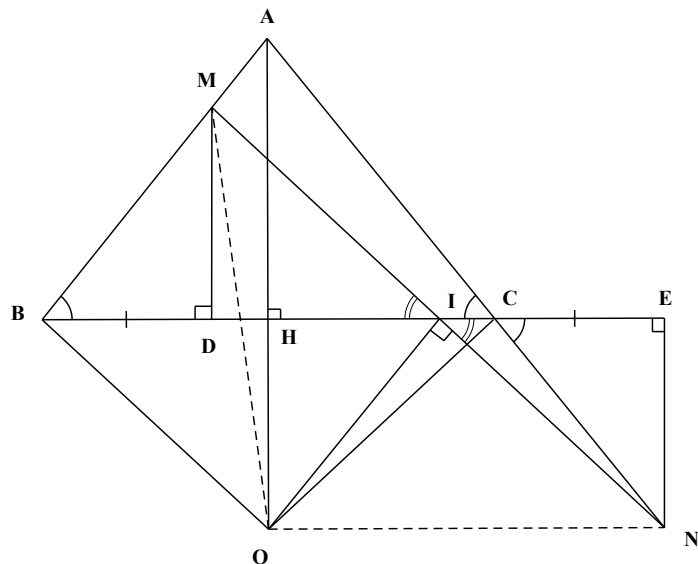
Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy D, trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng:

a) $BM = CN$.

b) $BC < MN$.

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại giao điểm của MN và BC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) Xét $\triangle MDB$ và $\triangle NEC$ có:

$$\angle MDB = \angle NEC (=90^\circ) \quad BD = CE \text{ (gt)} \quad \angle MBD = \angle NCE (= \angle ACB)$$

$$\Rightarrow \triangle MDB = \triangle NEC \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BM = CN \quad (\text{hai cạnh tương ứng}) (*)$$

b) Ta có $BC = BD + DC$; $DE = DC + CE$, mà $BD = CE$ (gt) $\Rightarrow BC = DE$

Gọi I là giao điểm của MN và BC ta có:

$$DE = DI + IE < MI + IN = MN \quad (\text{quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên})$$

$$\Rightarrow BC < MN \quad (3)$$

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

$\Rightarrow AH$ vừa là đường cao vừa là đường phân giác của tam giác cân ABC .

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I .

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OAC$ có: $AB = AC$ (gt), $\angle OAB = \angle OAC$ (cmt), AO là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OAC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle OBA = \angle OCA \quad (\text{cặp góc tương ứng}) \quad (**)$$

$$OC = OB \quad (\text{cặp cạnh tương ứng}) \quad (1)$$

Ta có $MD \perp BC$ (gt), $NE \perp BC$ (gt) suy ra $MD \parallel NE$

suy ra $\angle BMD = \angle ENI$ (so le trong)

Xét $\triangle MDI$ và $\triangle NEI$ có:

$$\angle BMD = \angle ENI \text{ (cmt)}, \quad MD = NE \text{ (} \triangle MDB = \triangle NEC \text{)}, \quad \angle MDI = \angle ENI \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = IN$ (cặp cạnh tương ứng) (2)

Xét $\triangle OIM$ và $\triangle OIN$ có:

$$IM = IN \text{ (cmt)}, \quad \angle MIO = \angle NIO = 90^\circ, \quad OI \text{ chung}$$

Suy ra $\triangle OIM = \triangle OIN$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = ON$ (cặp cạnh tương ứng) (3)

Từ (1), (*) và (3) $\Rightarrow \triangle OBM = \triangle OCN$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle BOM = \angle CON$ (cặp góc tương ứng) (***)

Từ (**) và (***) suy ra $\angle OCA = \angle OCN = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$

$\Rightarrow$ Điểm O cố định.

Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại giao điểm của MN và BC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Câu 84. (HSG 7 huyện Than Uyên 2022 - 2023; trường Bến Lức 2018 - 2019)

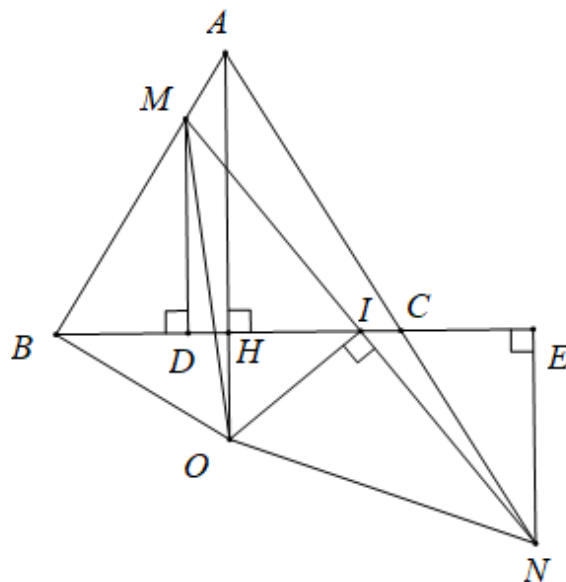
Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = EN$ (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow MB = NC$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Ta có: $\triangle MDI$ vuông tại D : $\angle BDI + \angle MID = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\triangle NEI$ vuông tại E : $\angle ENI + \angle NIE = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $\angle MID = \angle NIE$ (đối đỉnh) nên $\angle BDI = \angle ENI$

$$\Rightarrow \Delta MDI = \Delta NEI (g.c.g) \Rightarrow IM = IN \quad (\text{cặp cạnh tương ứng})$$

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

$$\Delta AHB = \Delta AHC \quad (\text{cạnh huyền – cạnh góc vuông})$$

$$\Rightarrow \angle HAB = \angle HAC \quad (\text{cặp góc tương ứng})$$

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I

$$\Delta OAB = \Delta OAC \quad (\text{c.g.c}) \Rightarrow \angle OBA = \angle OCA \quad (\text{cặp góc tương ứng}) \quad (1)$$

$$OC = OB \quad (\text{cặp cạnh tương ứng})$$

$$\Delta OIM = \Delta OIN \quad (\text{c.g.c}) \Rightarrow OM = ON \quad (\text{cặp cạnh tương ứng})$$

$$\Delta OBM = \Delta OCN \quad (\text{c.c.c}) \Rightarrow \angle OBM = \angle OCN \quad (\text{cặp góc tương ứng}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\angle OCA = \angle OCN = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$

Vậy điểm O cố định

Câu 85. (HSG 7 huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022)

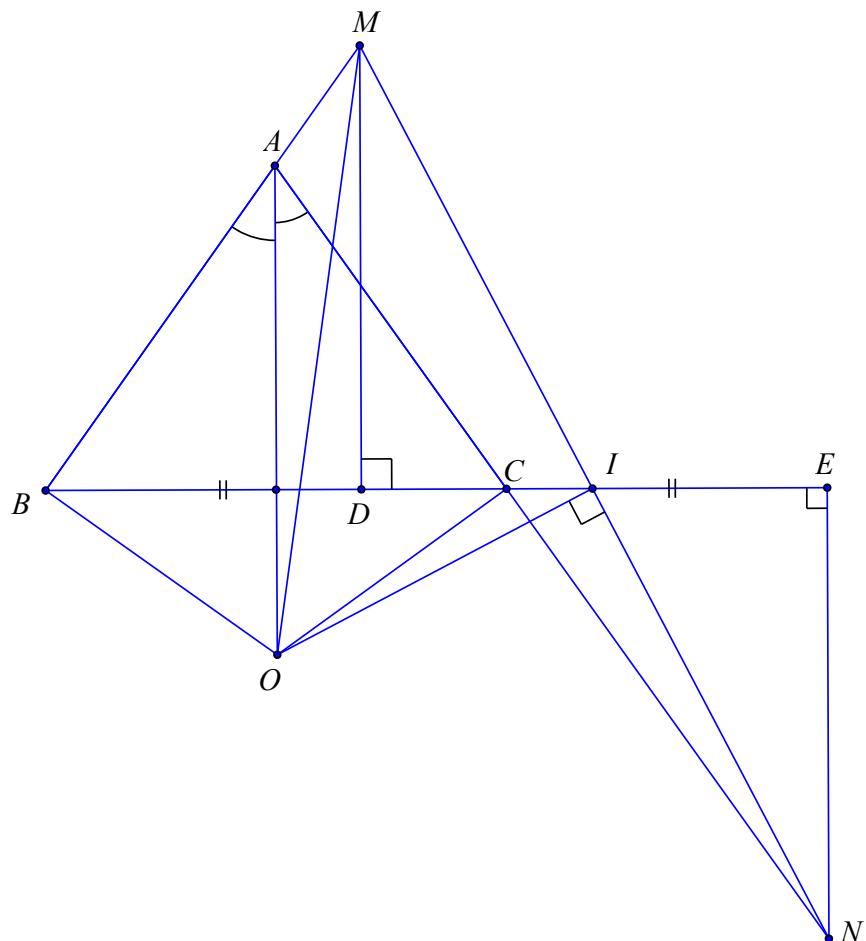
Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm $D (D \neq B, C)$. Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt BA tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt tia AC tại N , MN cắt BC tại I .

a) Chứng minh rằng: $DM = EN$

b) Chứng minh rằng: $IM = IN; BC < MN$

c) Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I . Chứng minh rằng: $\Delta BMO = \Delta CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Lời giải



a) Tam giác ABC cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB$

mà $\angle NCE = \angle ACB$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle ABC = \angle NCE$, $BD = CE$ (gt)

$\angle MDB = \angle EN = 90^\circ$

Do đó: $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = EN$ (hai cạnh tương ứng)

b) Chứng minh được: $\triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g)

$\Rightarrow MI = NI$ (hai cạnh tương ứng)

Vì $BD = CE$ (do $\triangle MDB = \triangle NEC$) nên $BC = DE$

Lại có $\triangle DMI$ vuông tại D nên $DI < MI$

$\triangle ENI$ vuông tại E nên $IE < IN$

Do đó $DI + IE < MI + IN \Rightarrow DE < MN$

$\Rightarrow BC < MN$

c) Chứng minh được $\triangle ABO = \triangle ACO$ (c.g.c)

$\Rightarrow OC = OB$ (hai cạnh tương ứng)

$$\widehat{ABO} = \widehat{ACO} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Xét hai tam giác MIO và tam giác NIO , có

$$MI = NI \text{ (chứng minh câu b)}$$

$$\widehat{MIO} = \widehat{NIO} = 90^\circ$$

IO là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle MIO = \triangle NIO \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow OM = ON \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Lại có: $BM = CN$ (vì $\triangle MDB = \triangle NEC$)

Do đó: $\triangle BMO = \triangle CNO$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{NCO} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mặt khác $\widehat{MBO} = \widehat{ACO}$

$$\Rightarrow \widehat{NCO} = \widehat{ACO} \text{ mà đây là hai góc kề bù nên } CO \perp AN$$

Vì tam giác ABC cho trước, O là giao điểm của phân giác góc A và đường vuông góc với AC tại C nên O cố định.

Câu 86. (HSG 7 Thanh Hóa - năm học 2022 - 2023)

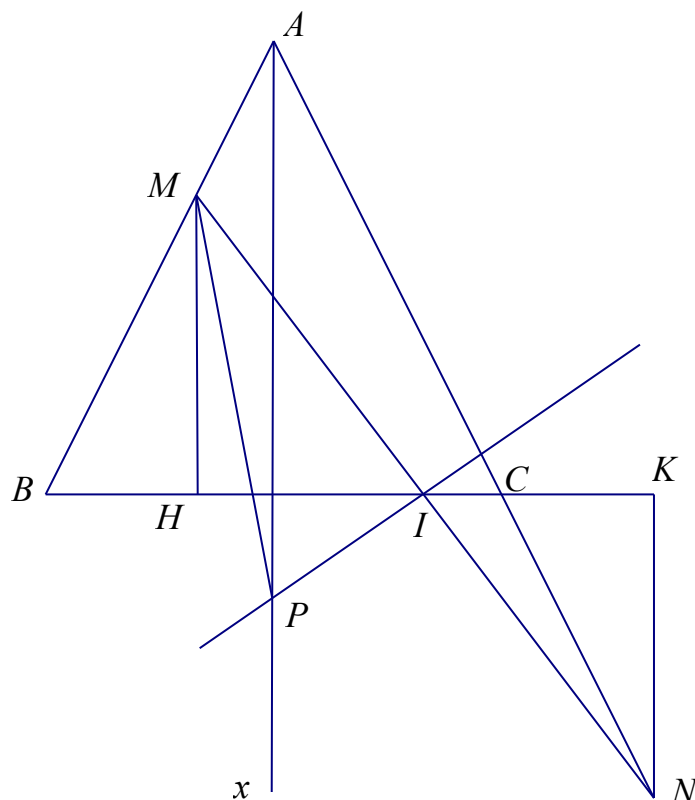
Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm M ; trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Kẻ MH và NK cùng vuông góc với BC ($H, K \in BC$). Gọi I là giao điểm của MN và BC .

a) Chứng minh $\triangle HBM = \triangle KCN$ và I là trung điểm của MN .

b) Đường trung trực của MN cắt tia phân giác Ax của góc BAC tại P . Chứng minh rằng: $\widehat{PMB} = \widehat{PNC}$.

c) Chứng minh rằng: Khi M di động trên AB và N di động trên tia đối của CA đồng thời thỏa mãn $BM = CN$ thì P là một điểm cố định.

Lời giải



a) Xét tam giác vuông: $\triangle HBM$ và $\triangle KCN$ có:

$$BM = CN \text{ (gt); } \angle HBM = \angle KCN \text{ (vì cùng bằng } \angle CB)$$

Suy ra: $\triangle HBM = \triangle KCN$ (cách huyền- góc nhọn) suy ra: $MH = NK$

Xét tam giác vuông: $\triangle HMI$ và $\triangle KNI$ có:

$$MH = NK \text{ (Chứng minh trên); } \angle HIM = \angle KIN \text{ (đối đỉnh)}$$

Suy ra: $\triangle HMI = \triangle KNI$ (Cạnh góc vuông- góc nhọn)

Suy ra $MI = NI$ hay I là trung điểm của MN

b) Theo CM trên I là trung điểm của MN nên PI là trung trực của MN suy ra: $MP = NP$

Vì $\triangle ABC$ cân tại A mà Ax là phân giác nên AP là trung trực.

Suy ra $BP = CP$. Suy ra: $\triangle BMP = \triangle CNP$ (c.c.c) Suy ra $\angle BMP = \angle CNP$ (đpcm)

c) Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABP = \triangle ACP$ (c.c.c)

Suy ra: $\angle ABP = \angle ACP$ hay $\angle MBP = \angle ACP$

Lại có: $\angle MBP = \angle NCP$ nên: $\angle NCP = \angle ACP = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ (Hai góc kề bù bằng nhau)

Vậy $\angle MBP = 90^\circ$ suy ra: BP vuông góc với AB hay P luôn là điểm cố định.

Câu 87. (HSG 7 trường TH&THCS Kỳ Đồng, Hưng Hà 2022 - 2023)

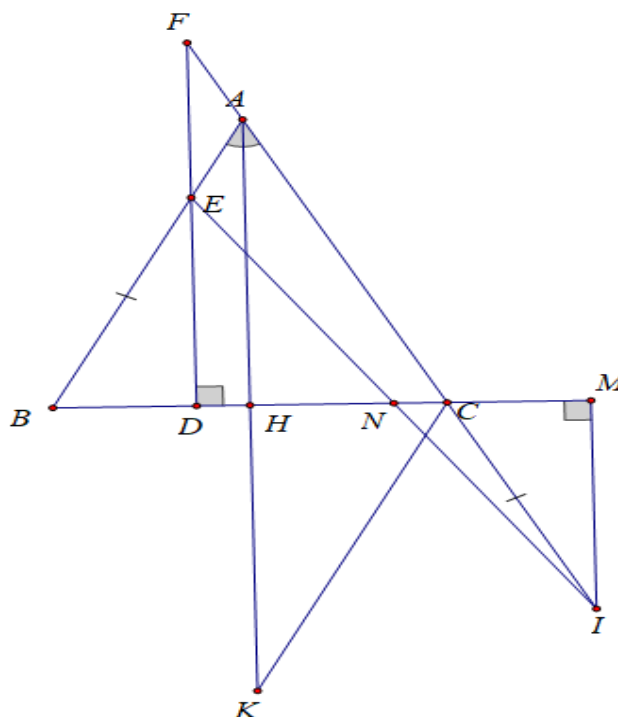
Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $DC = 2BD$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt cạnh AB tại E và cắt tia CA tại F . Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt tia phân giác AH của góc BAC ($H \in BC$) tại K .

a) Chứng minh $\triangle ABH = \triangle KCH$.

b) Chứng minh tam giác AEF là tam giác cân.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = BE$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của EI .

Lời giải



a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle KCH$ có:

$$\begin{cases} AB = KC \text{ (gt)} \\ \angle BAH = \angle KCH \text{ (gt)} \\ AH \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABH = \triangle KCH \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow BH = CH \text{ (cặp cạnh tương ứng)}$$

Vì $CK \parallel AB \Rightarrow \angle ABH = \angle KCH$ (so le trong)

$$\begin{cases} \angle ABH = \angle KCH \text{ (cmt)} \\ BH = CH \text{ (cmt)} \\ \angle AHB = \angle HKC \text{ (đđ)} \end{cases}$$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle KCH$ có:

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle KCH \text{ (g.c.g) (đpcm)}$$

b) Vì $\Delta ABH = \Delta ACH$ (cmt) $\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC$ (cặp góc tương ứng)

Mà $\angle AHB + \angle AHC = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AH \perp BC$$

Mà $ED \perp BC$ (gt) $\Rightarrow AH \parallel ED$ (quan hệ từ vuông góc đến song song)

$$\Rightarrow \angle BED = \angle BAH \text{ (đồng vị)} \quad (1)$$

Có $ED \parallel AH \Rightarrow FD \parallel AH \Rightarrow \angle AFE = \angle CAH$ (đồng vị) (2)

$$\text{Mà } \angle BED = \angle AEF \text{ (đối đỉnh)} \quad \angle BAH = \angle CAH \text{ (gt)} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \angle AFE = \angle AEF \Rightarrow \Delta AEF$ cân tại A .

c) Gọi N là giao điểm của EF và BC

Từ I kẻ $IM \perp BC$ tại M , có $AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow AH \parallel IM$

$$\Rightarrow \angle HAC = \angle CIM \text{ (so le trong)}$$

có $\angle HAC = \angle HBC = \angle BED$ (cmt)

$$\Rightarrow \angle BED = \angle CIM$$

Xét ΔBED vuông tại D và ΔCIM vuông tại M có
$$\begin{cases} BE = CI \text{ (gt)} \\ \angle BED = \angle CIM \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta BED = \Delta CIM \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow ED = IM \text{ (cặp cạnh tương ứng)}$$

Mặt khác $EH = IM$ (cùng vuông góc với BC)

$$\Rightarrow \angle DEN = \angle MIN \text{ (so le trong)}$$

Xét ΔDEN vuông tại D và ΔMIN vuông tại M có
$$\begin{cases} ED = MI \text{ (cmt)} \\ \angle DEN = \angle MIN \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta DEN = \Delta MIN \text{ (cạnh góc vuông - góc nhọn kề)}$$

$$\Rightarrow EN = IN \text{ (cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow N \text{ là trung điểm của } EI.$$

Câu 88. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường thẳng vuông góc với BE tại E cắt AC tại N .

1) Chứng minh $\Delta MBD = \Delta NCE$

$$\Rightarrow \triangle MBO = \triangle NCO \text{ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)} \Rightarrow OM = ON$$

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của MN

Do đó đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm O cố định khi D thay đổi trên đoạn BC

Câu 89. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

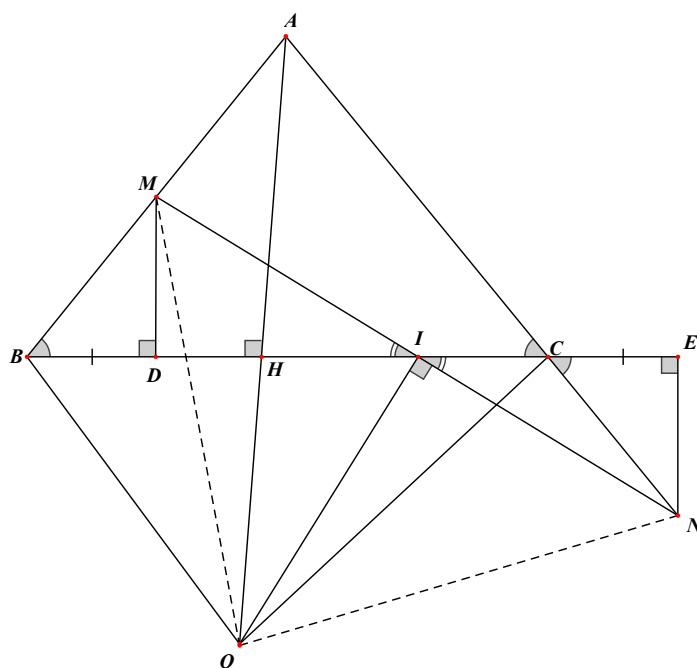
Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D (D không trùng với B và C), trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt cạnh AB và tia AC lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh: $\triangle MDB = \triangle NEC$.

b) Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh: I là trung điểm DE .

c) Chứng minh rằng: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Lời giải



a) Chứng minh: $\triangle MDB = \triangle NEC$

Ta có $\angle ABC = \angle ACB$ (gt) mà $\angle ACB = \angle ECN$ (dd)

Nên $\angle ABC = \angle ECN$ hay $\angle DBM = \angle ECN$

Xét $\triangle MDB$ và $\triangle NEC$ có:

$$\angle DBM = \angle ECN \text{ (cmt)}$$

$$BD = CE \text{ (gt)}$$

$$\angle D = \angle E = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle MDB = \triangle NEC$ (c-g-c) $\Rightarrow DM = EN$; $MB = NC$ (hai cạnh tương ứng)

b) Chứng minh: I là trung điểm DE .

Gọi I là giao điểm của BC và MN

Ta có $\triangle MDI$ vuông tại D nên $\angle BDI + \angle MID = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\triangle NEI$ vuông tại E nên $\angle ENI + \angle NIE = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $\angle MID = \angle NIE$ (đđ) nên $\angle BDI = \angle ENI$

Xét $\triangle MDI$ và $\triangle NEI$ có

$$\angle BDI = \angle ENI \text{ (cmt); } DM = EN \text{ (cm câu a); } \angle D = \angle E = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle MDI = \triangle NEI$ (c-g-c) $\Rightarrow IM = IN, ID = IE$ (cạnh tương ứng)

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN đồng thời I là trung điểm của DE .

c) Chứng minh rằng: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\angle H_1 = \angle H_2 = 90^\circ$$

$$HB = HC \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

Nên $\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle HAB = \angle HAC$ (góc tương ứng)

+ Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I .

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OAC$ có

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\angle OAB = \angle OAC \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

OA cạnh chung

Nên $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c-g-c)

$$\Rightarrow \angle OBA = \angle OCA \text{ (góc tương ứng) (1)}$$

$$\Rightarrow OB = OC \text{ (cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle OIM$ và $\triangle OIN$ có

$$IM = IN \text{ (I là trung điểm MN)}$$

$$\angle OIM = \angle OIN = 90^\circ$$

OI cạnh chung

Nên $\triangle OIM = \triangle OIN$ (c-g-c) $\Rightarrow OM = ON$ (cạnh tương ứng)

Xét $\triangle OMB$ và $\triangle OCN$ có

$$OM = ON \text{ (cmt)}$$

$$OB = OC \text{ (cmt)}$$

$$MB = NC \text{ (cm câu a)}$$

Nên $\triangle OMB = \triangle OCN$ (c-c-c)

$$\Rightarrow \angle BOM = \angle CON \text{ (góc tương ứng) (2)}$$

Từ (1); (2) suy ra $\angle BCA = \angle CN = 90^\circ$ do đó $OC \perp AC$

Vậy O là điểm cố định.

Câu 90. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , trên cạnh BC lấy điểm D (không trùng với B, C), trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$, các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E theo thứ tự cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại M và N .

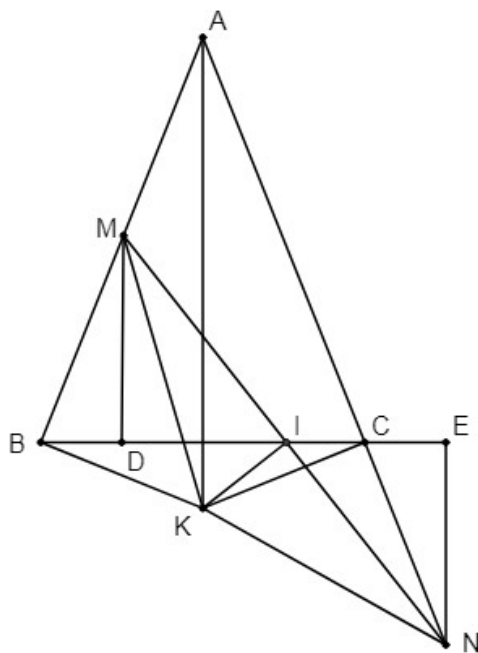
1) Chứng minh rằng $DM = EN$;

2) Đường thẳng BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng MN ;

3) So sánh chu vi của tam giác ABC và chu vi của tam giác AMN ;

4) Chứng minh: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Lời giải



1) Ta có $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB; AB = AC$

mà $\angle ACB = \angle ECN$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle ABC = \angle ECN$

Lại có $BD = CE$ (gt), suy ra $\triangle BDM = \triangle CEN$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = EN$.

2) Ta có $DM \perp BC, EN \perp BC \Rightarrow DM \parallel EN \Rightarrow \widehat{DMI} = \widehat{ENI}$ (so le trong)

Lại có $MD = EN$ (cmt), suy ra $\triangle DMI = \triangle ENI$ (g.c.g) $\Rightarrow MI = NI$.

Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

3) Vì $\triangle BDM = \triangle CEN$ (cmt) $\Rightarrow BM = CN$.

Chu vi tam giác ABC là $AB + AC + BC = 2AB + BC$ (1)

Chu vi tam giác AMN là

$$AM + MN + AN = AB - BM + MI + NI + AC + CN = 2AB + MI + NI$$

$$BM = CN, AB = AC$$

) (2)

Xét $\triangle DMI, \triangle ENI$ vuông tại D, E có $MI > DI, NI > IE \Rightarrow MI + NI > DI + IE$

$$\Rightarrow MI + NI > DE \Rightarrow MI + NI > DC + CE$$

$$\Rightarrow MI + NI > DC + BD \Rightarrow MI + NI > BC \text{ (do } BD = CE \text{)} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra chu vi của tam giác ABC nhỏ hơn chu vi của tam giác AMN .

4) Gọi giao điểm của đường thẳng vuông góc với MN tại I với đường phân giác góc A là K .

Ta có $IM = IN, KI \perp MN \Rightarrow KI$ là trung trực của đoạn thẳng $MN \Rightarrow KM = KN$

Lại có $\triangle ABC$ cân tại A , AK là phân giác nên AK là trung trực của $BC \Rightarrow KB = KC$

$$\triangle ABK = \triangle ACK \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ACK}$$

Ta có

$$\triangle ABK = \triangle NCK \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{NCK}$$

Suy ra $\widehat{ACK} = \widehat{NCK}$ mà $\widehat{ACK} + \widehat{NCK} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{NCK} = 90^\circ \Rightarrow KC \perp AN$

mà AK cố định nên K cố định.

Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm cố định K khi D thay đổi trên BC .

Câu 91. (HSG 7 Cửa Lò, Nghệ An 2021 - 2022)

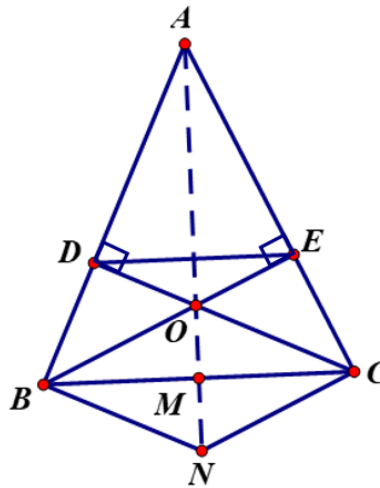
Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ $CD \perp AB$ tại D , $BE \perp AC$ tại E .

a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ACD$.

b) Chứng minh $DE \parallel BC$.

c) Qua B kẻ đường thẳng song song với DC , qua C kẻ đường thẳng song song với EB , hai đường thẳng này cắt nhau tại N . Gọi O là giao điểm của BE và CD , M là trung điểm của BC . Chứng minh bốn điểm A, O, M, N cùng thuộc một đường thẳng.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có:

$\angle BAC$ chung,

$AB = AC$ (vì tam giác ABC cân tại A),

$\angle AEB = \angle ADC = 90^\circ$ (vì $CD \perp AB$ tại D , $BE \perp AC$ tại E)

Do đó $\triangle ABE = \triangle ACD$ (ch-gn).

b) Vì $\triangle ABE = \triangle ACD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AE = AD$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \angle ADE = \frac{180^\circ - \angle DAE}{2} = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2}$.

Mà $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2}$.

Như vậy $\angle ADE = \angle ABC$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DE \parallel BC$.

c) + Xét $\triangle ADO$ và $\triangle AEO$ có:

$\angle ADO = \angle AEO = 90^\circ$,

AO chung

$AD = AE$ (chứng minh trên)

Do đó $\triangle ADO = \triangle AEO$ (ch-cgv)

$\Rightarrow \angle DAO = \angle EAO$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AO$ là phân giác của $\angle BAC$. (1)

+ Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$AB = AC$ (chứng minh trên),

AM chung,

$MB = MC$ (vì M là trung điểm BC)

Do đó $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c-c-c)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AM$ là phân giác của $\widehat{BAC}$. (2)

+ Vì $BN \parallel DC$ và $CD \perp AB$ (giả thiết) nên $BN \perp AB$ (từ vuông góc tới song song)

$\Rightarrow \widehat{ABN} = 90^\circ$. Chứng minh tương tự ta có $\widehat{ACN} = 90^\circ$.

Hai tam giác vuông $\triangle ABN$ và $\triangle ACN$ có AN chung, $AB = AC$

nên $\triangle ABN = \triangle ACN$ (ch-gn)

$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{CAN}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AN$ là phân giác của $\widehat{BAC}$. (3)

+ Từ (1), (2) và (3) suy ra A, M, O, N cùng nằm trên tia phân giác của $\widehat{BAC}$ hay bốn điểm A, O, M, N cùng thuộc một đường thẳng.

Câu 92. (HSG 7 huyện Cao Lộc, tỉnh Lạng Sơn 2021 - 2022)

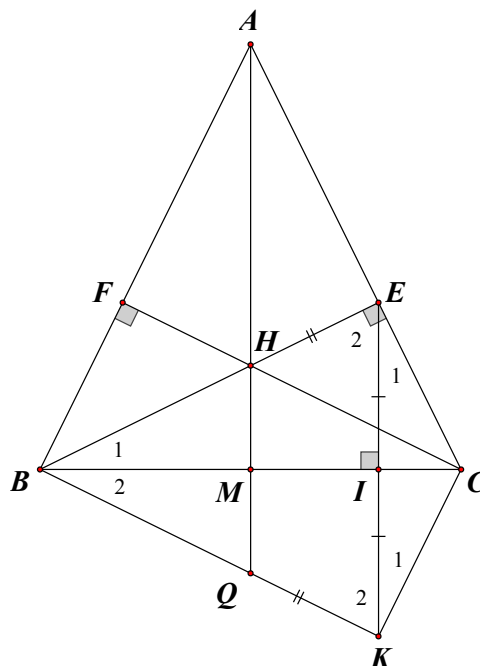
Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ đường cao BE ($E \in AC$). Qua E kẻ đoạn thẳng EK vuông góc với BC tại I sao cho I là trung điểm của EK .

a) Chứng minh BK vuông góc với KC .

b) Chứng minh $\widehat{KEE} = \widehat{EBC}$.

c) Kẻ đường cao CF ($F \in AB$) cắt BE tại H . Trên BK lấy điểm Q sao cho $QK = HE$. Chứng minh ba điểm A, H, Q thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $\triangle CEK$ có IC là đường cao đồng thời là đường trung tuyến

$$\Rightarrow \triangle CEK \text{ cân tại } C \Rightarrow \angle K_1 = \angle E_1$$

Tương tự $\triangle BEK$ có BI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến

$$\Rightarrow \triangle BEK \text{ cân tại } B \Rightarrow \angle K_2 = \angle E_2$$

$$\text{mà } \angle E_1 + \angle E_2 = 90^\circ \quad (\text{gt}) \Rightarrow \angle K_1 + \angle K_2 = 90^\circ \text{ hay } CK \perp BK$$

b) Có $\angle B_1 + \angle E_2 = 90^\circ$ ($\triangle BIE$ vuông tại I (gt))

$$\angle E_1 + \angle E_2 = 90^\circ \quad (\text{gt})$$

$$\Rightarrow \angle E_1 = \angle B_1$$

$$\text{mà } \angle E_1 = \angle K_1 \text{ (theo cmt)}$$

$$\Rightarrow \angle K_1 = \angle B_1 \text{ hay } \angle EKE = \angle EBC$$

c) Gọi HQ cắt BC tại M

$\triangle BEK$ cân tại B (ý a)

$$\Rightarrow BE = BK; \angle B_1 = \angle B_2$$

$$\Rightarrow BH + HE = BQ + QK$$

$$\text{mà } HE = QK \quad (\text{gt})$$

$$\Rightarrow BH = BQ$$

$$\Rightarrow \triangle BQH \text{ cân tại } B$$

$$\Rightarrow BM \text{ là phân giác, đường cao của } \triangle BQH$$

$$\Rightarrow BM \perp HQ \text{ hay } HQ \perp BC \quad (1)$$

$$\text{Lại có } H \text{ là trực tâm } \triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC \quad (2)$$

(1) và (2) $\Rightarrow A, H, Q$ thẳng hàng.

Câu 93. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)

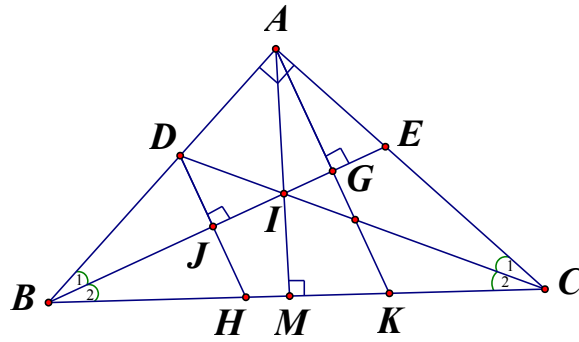
Cho tam giác ABC vuông cân tại A , tia phân giác của góc B và góc C cắt AC và AB lần lượt tại E và D .

a) Chứng minh rằng $BE = CD; AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BE và CD , AI cắt BC ở M . Chứng minh rằng tam giác MAB vuông cân.

c) Từ A và D vẽ các đường thẳng vuông góc với BE , các đường thẳng này cắt BC lần lượt ở K và H . Chứng minh $KH = KC$.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AC$ và $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$

BE, CD là các tia phân giác của $\angle ABC$ và $\angle ACB \Rightarrow \angle B_1 = \angle B_2 = \angle C_1 = \angle C_2 = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ$

Xét $\triangle BCE$ và $\triangle CBD$ có:

$$\left. \begin{array}{l} CE = BD \\ \angle ABC = \angle ACB \\ BC \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BCD = \triangle CBE \quad (\text{c.g.c})$$

$\Rightarrow BE = CD$ và $BD = CE$ (Hai cạnh tương ứng)

mà $AB = AC$

$$\Rightarrow AB - BD = AC - CE \Rightarrow AD = AE$$

b) Có tia phân giác của góc $\angle ABC$ và góc $\angle ACB$ cắt AC và AB lần lượt tại E và $D \Rightarrow BE$ và CD là hai đường phân giác của $\triangle ABC$ cắt nhau tại I

$\Rightarrow AI$ là đường phân giác thứ ba của tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow AI$ đồng thời là đường cao, đường trung tuyến của tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow AI \perp BC$ tại M và $MB = MC$

Có $\triangle MAB$ vuông tại M có $\angle ABM = 45^\circ \Rightarrow \angle BAM = 45^\circ$

$\Rightarrow$ tam giác MAB vuông cân tại M .

Từ (1), (2), (3) ta có $\Rightarrow KC = HK$

c) Gọi J và G lần lượt là giao điểm của DH và AK với BE

Xét $\triangle BDH$ có BJ là đường cao đồng thời là phân giác $\Rightarrow \triangle BDH$ cân tại B

$$\Rightarrow BD = BH$$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle BAK$ cân tại $B \Rightarrow BA = BK$

$$\Rightarrow BA - BD = BK - BH \text{ hay } AD = HK$$

Mà $AD = AE \Rightarrow AE = HK$ (1)

Có $\triangle BAK$ cân tại B mà $\angle ABK = 45^\circ \Rightarrow \angle BAK = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$

$$\Rightarrow \angle KAC = 90^\circ - \angle BAK = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$$

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle CKA$ có

$$\left. \begin{array}{l} \angle IAC = \angle KCA = 45^\circ \\ AC \text{ chung} \\ \angle KAC = \angle ICA = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AIC = \triangle CKA \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AI = KC \quad (2)$$

$$\text{Có } \angle IAG = \angle BAG - \angle BAI = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ$$

Câu 94. (HSG 7 Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022; huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

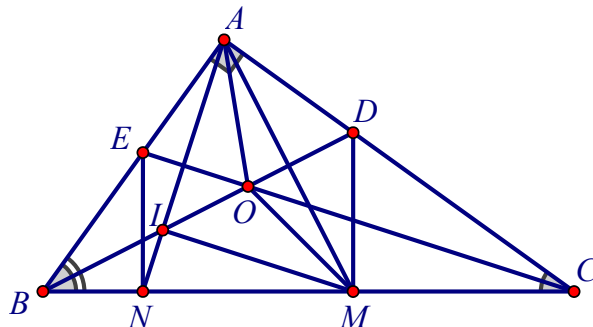
Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$. Các đường phân giác BD và CE ($D \in AC, E \in AB$) cắt nhau tại O .

a) Tính số đo góc BOC

b) Trên BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = BA, CN = CA$. Chứng minh EN song song với DM .

c) Gọi I là giao điểm của BD và AN . Chứng minh tam giác AIM vuông cân.

Lời giải



a) Vì BD, CE là đường phân giác các góc B và góc C của tam giác ABC nên $\angle OBC = \frac{\angle ABC}{2}; \angle OCB = \frac{\angle ACB}{2}$

Áp dụng định lý tổng ba góc cho $\triangle BOC$ ta có $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ$ hay

$$\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - \left(\frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} \right) = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 135^\circ$$

b) $\triangle ABM$ có $BA = BM$ cân tại B nên đường phân giác BD đồng thời là đường trung trực của AM

Xét $\triangle DAB$ và $\triangle DMB$ có

$$BA = BM \text{ (GT)}$$

$$\angle ABD = \angle MBD \text{ (do } BD \text{ là tia phân giác của góc } B \text{)}$$

BD cạnh chung

Suy ra $\angle DAB = \angle DMB$ (c.c.c) suy ra $\angle BAD = \angle BMD = 90^\circ$ (hai góc tương ứng)

Suy ra $DM \perp BC$ (1)

Chứng minh tương tự ta suy ra $EN \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EN \parallel DM$ (cùng vuông góc với BC)

c) Vì I nằm trên trung trực BD của đoạn thẳng AM nên $IA = IM \Rightarrow \triangle AIM$ cân tại I (3)

Do CE là trung trực của AN suy ra $EN = EA \Rightarrow \triangle EAN$ cân tại E nên $\angle EAN = \angle ENA$

Xét $\triangle BIA$ và $\triangle BIM$ có

$BA = BM$ (gt); BI cạnh chung; $IA = IM$ (do I nằm trên trung trực của AM)

Do đó $\triangle BIA = \triangle BIM$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle EAN = \angle IMN$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle ANE + \angle INM = 90^\circ$ do $EN \perp BC$

$\Rightarrow \angle INM + \angle IMN = 90^\circ \Rightarrow \angle MIN = 90^\circ$

Mà $\angle MIN + \angle MIA = 180^\circ$ (hai góc kề bù) suy ra $\angle MIA = 90^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle AIM$ vuông cân.

Câu 95. (HSG 7 Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

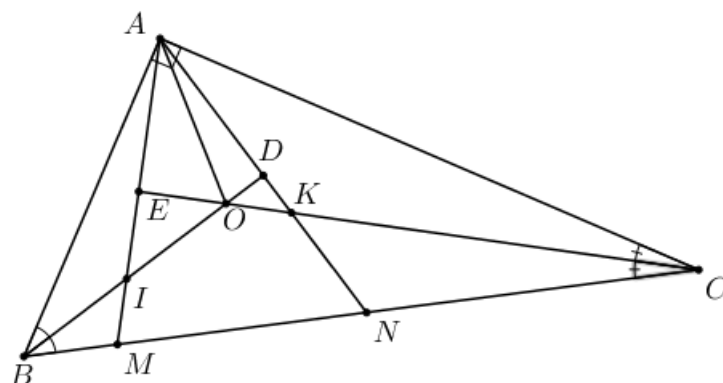
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB < AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $MC = CA, NB = BA$. Tia phân giác của góc B cắt AM tại I và cắt AN tại D , tia phân giác góc C cắt AN tại K và cắt AM tại E . Gọi O là giao điểm của BD và CE .

1) Tính góc $\angle BOC$.

2) Chứng minh: $BD \perp AN$ và $BD \parallel MK$.

3) Chứng minh: $AO = IK$.

Lời giải



$$B \Rightarrow \angle DBC = \angle DBA = \frac{1}{2} \angle ABC$$

1) Vì BD là tia phân giác của góc

$$C \Rightarrow \angle ECB = \angle ECA = \frac{1}{2} \angle ACB$$

+ Vì CE là tia phân giác của góc

$$\Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{ECB} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ABC})$$

$$+ \text{ Vì } \triangle ABC \text{ vuông tại } A \text{ nên } (\widehat{ABC} + \widehat{ABC}) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{ECB} = \frac{1}{2}.90^\circ = 45^\circ \quad \text{hay } \widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 45^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle OBC \text{ có } \widehat{BOC} + \widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ - (\widehat{OCB} + \widehat{OBC})$$

$$\text{Mà } \widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 45^\circ \text{ nên } \widehat{BOC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ. \text{ Vậy } \widehat{BOC} = 135^\circ$$

2) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle NBD$ có :

$$BA = BN; \widehat{DBA} = \widehat{DBN}; BD \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle NBD \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{NDB} \text{ (cặp góc tương ứng).}$$

$$\text{Mà } \widehat{ADB} + \widehat{NDB} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{NDB} = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AN \text{ tại } D$$

+ Xét $\triangle MCK$ và $\triangle ACK$ có:

$$MC = CA; \widehat{MCK} = \widehat{ACK}; CK \text{ chung.}$$

$$\Rightarrow \triangle MCK = \triangle ACK \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{KAC} \text{ (cặp góc tương ứng).}$$

$$+ \text{ Vì } NB = BA \Rightarrow \triangle BNA \text{ cân tại } B \Rightarrow \widehat{BNA} = \widehat{BAN}$$

$$\Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{BNA} = \widehat{KAC} + \widehat{BAN} = \widehat{BAC} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{KMN} + \widehat{KNM} = 90^\circ$$

$$+ \text{ Xét } \triangle KMN \text{ có } \widehat{MKN} + \widehat{KMN} + \widehat{KNM} = 180^\circ$$

$$\text{mà } \widehat{KMN} + \widehat{KNM} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{MKN} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MK \perp AN \text{ tại } K$$

$$\text{Mà } BD \perp AN \Rightarrow BD \parallel MK$$

$$3) \text{ Vì } \triangle MCK = \triangle ACK \Rightarrow KA = KM \text{ mà } MK \perp AN \Rightarrow \triangle KMA \text{ vuông cân tại } K$$

$$\text{Suy ra } \widehat{KAM} = 45^\circ \text{ hay } \widehat{DAI} = 45^\circ$$

$$+ \text{ Chứng minh được } \triangle DAI \text{ vuông cân tại } D \Rightarrow DA = DI$$

$$+ \text{ Chứng minh được } \triangle DOK \text{ vuông cân tại } D \Rightarrow DO = DK$$

$$\text{Xét } \triangle DAO \text{ và } \triangle DIK \text{ có: } DA = DI; \widehat{ADO} = \widehat{IDK} = 90^\circ; DO = DK$$

$$\Rightarrow \triangle DAO = \triangle DIK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AO = IK \text{ (đpcm).}$$

Câu 96. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

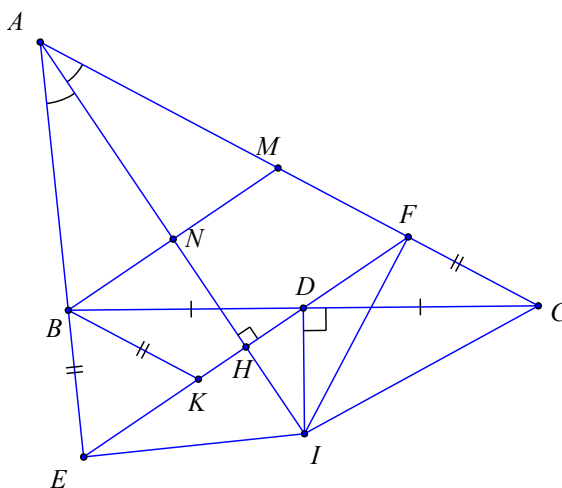
Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Từ trung điểm D của BC vẽ đường vuông góc với tia phân giác của góc A tại H . Đường thẳng này cắt các tia AB tại E và AC tại F . Vẽ tia BM song song với EF ($M \in AC$).

a) Chứng minh $\triangle ABM$ cân.

b) Chứng minh: $MF = BE = CF$.

c) Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AH tại I . Chứng minh: $IF \perp AC$.

Lời giải



a) Gọi giao điểm của AH và BM là N .

Có $AH \perp EF$ và $BM \parallel EF \Rightarrow AH \perp BM$ hay $AN \perp BM$

$\triangle ABM$ có AN vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên $\triangle ABM$ cân tại A

b) Chứng minh $\triangle AEF$ cân tại $A \Rightarrow MF = BE$ (1)

Vẽ $BK \parallel AC$ ($K \in EF$). Chứng minh $\triangle BKD = \triangle CFD \Rightarrow BK = CF$

Chứng minh $\triangle EBK$ cân tại $B \Rightarrow BE = BK$. Do đó $BE = CF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MF = BE = CF$ (đpcm)

c) Nối IB, IC . Chứng minh được $IB = IC$

Chứng minh được: $\triangle AEI = \triangle AFI \Rightarrow IE = IF$ và $\angle AEI = \angle AFI$ (3)

Chứng minh được: $\triangle BEI = \triangle CFI \Rightarrow \angle BEI = \angle CFI$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \angle AFI = \angle CFI$, mà 2 góc này kề bù nên $\angle AFI = \angle CFI = 90^\circ \Rightarrow IF \perp AC$

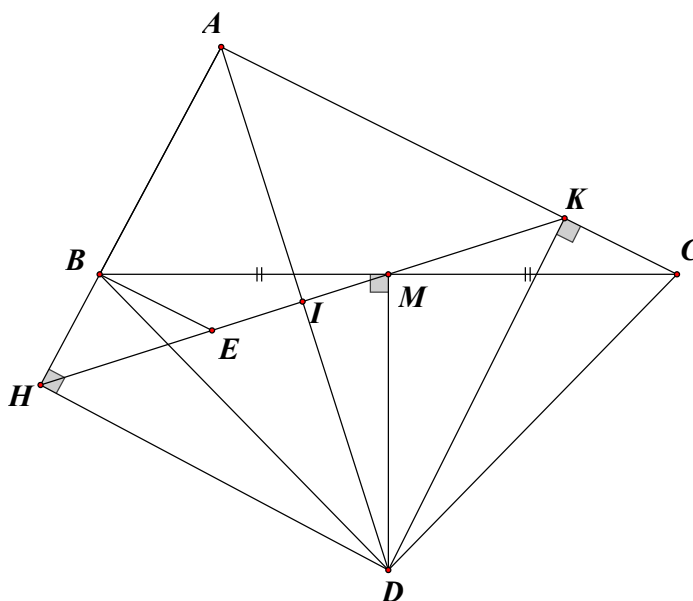
Câu 97. (HSG 7 huyện Thanh Miện, tỉnh Hải Dương năm học 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, M là trung điểm của BC . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC , đường thẳng này cắt tia phân giác của góc BAC tại D . Vẽ DH và DK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng AC tại H và K .

a) Chứng minh $BD = CD$ và $BH = CK$.

b) Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Lời giải



a) + Xét $\triangle BMD$ và $\triangle CMD$ có:

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC); $\angle BMD = \angle CMD = 90^\circ$ ($MD \perp BC$); MD là Cạnh chung

Do đó $\triangle BMD = \triangle CMD$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng)

+ Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AKD$ có:

$\angle HAD = \angle KAD$ (AD là tia phân giác $\angle BAC$)

$\angle AHD = \angle AKD = 90^\circ$ ($HD \perp AB; DK \perp AC$)

AD Cạnh chung

Do đó $\triangle AHD = \triangle AKD$ (ch - gn) $\Rightarrow HD = KD$ (hai cạnh tương ứng)

+ Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKD$ có:

$BD = CD$ (cmt); $\angle BHD = \angle CKD = 90^\circ$ ($HD \perp AB; DK \perp AC$); $HD = KD$ (cmt)

Do đó $\triangle BHD = \triangle CKD$ (ch- cv) $\Rightarrow HB = CK$ (hai cạnh tương ứng)

b) Kẻ $BE \parallel AC$ cắt HK tại $E \Rightarrow H, K, E$ thẳng hàng (4)

Vì $BE \parallel AC \Rightarrow \angle MBE = \angle MCK$ (hai góc so le trong)

Vì $\triangle AHD = \triangle AKD$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow AH = AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle AHK$ cân tại A (định nghĩa tam giác cân)

Mặt khác $BE \parallel AC \Rightarrow \angle BEH = \angle AKH$ (hai góc đồng vị)

$\Rightarrow \angle BEH = \angle AKH = \angle AHK \Rightarrow \triangle BEH$ cân tại $B \Rightarrow BE = BH$

Mà $HB = CK$ (theo câu a)

$$\Rightarrow BE = CK$$

Nối E với M ; nối K với M

+ Xét $\triangle BME$ và $\triangle CMK$ có:

$$BE = CK \text{ (cmt); } \angle MBE = \angle MCK \text{ (cmt); } BM = CM \text{ (} M \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

Do đó $\triangle BME = \triangle CMK$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BME = \angle CMK$ (hai góc tương ứng)

$$\text{Mà } \angle BME + \angle EMC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CMK + \angle EMC = 180^\circ \Rightarrow \angle KME = 180^\circ \Rightarrow E, M, K \text{ thẳng hàng} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra H, M, K thẳng hàng.

Câu 98. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023; huyện Hưng Hà năm 2021 - 2022)

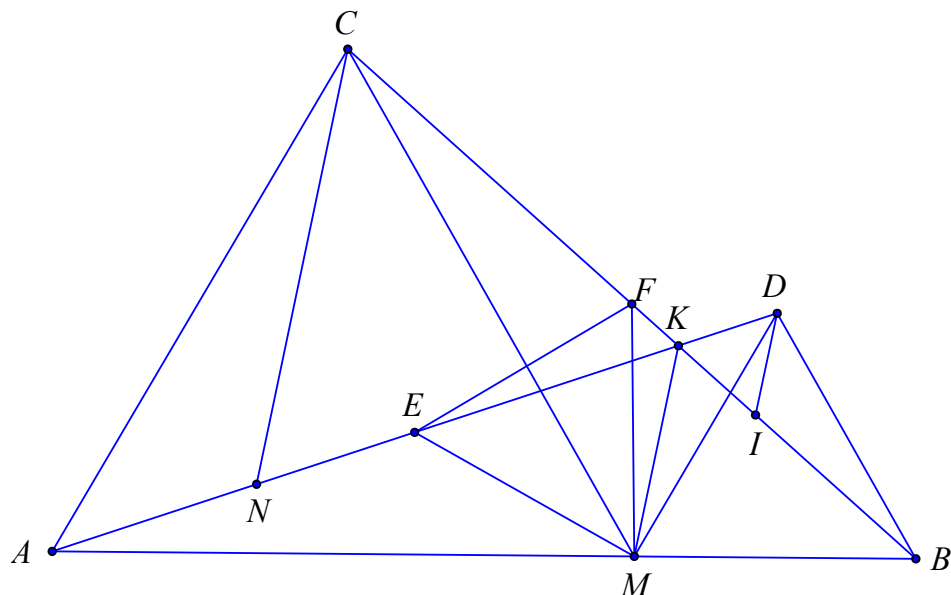
Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB ($MA > MB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ các tam giác đều $\triangle AMC, \triangle BMD$. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AD, BC . Gọi K là giao điểm AD và BC . Chứng minh rằng:

a) $AD = BC$

b) $\triangle AEM = \triangle CFM$, từ đó suy ra $\triangle MEF$ là tam giác đều.

c) $\frac{AK + BK - CK - DK}{KM} = 2$

Lời giải



+ Ta có: $\triangle AMC, \triangle BMD$ là các tam giác đều (GT)

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = CM = AC \\ BM = DM = BD \\ \angle AMC = \angle ACM = \angle CAM = \angle BDM = \angle DBM = \angle BMD = 60^\circ \end{cases}$$

+ Ta có: $\angle AMC = \angle BMD = 60^\circ$

$$\Rightarrow \angle AMC + \angle CMD = \angle BMD + \angle CMD \Rightarrow \angle AMD = \angle BMC$$

+ Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$ có:

$$AM = CM; \angle AMD = \angle BMC; DM = BM$$

$$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle CMB (c.g.c)$$

$$\Rightarrow AD = BC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) + Ta có: $\triangle AMD = \triangle CMB$ (cmt) $\Rightarrow \angle MAD = \angle MCB$

$$AD = BC \text{ (cmt)}; AE = \frac{AD}{2} \text{ (gt)}; CF = \frac{BC}{2} \text{ (gt)}$$

+ Ta có:

$$\Rightarrow AE = CF$$

+ Xét $\triangle AEM$ và $\triangle CFM$ có:

$$AE = CF \text{ (cmt)}; \angle MAD = \angle MCB \text{ (cmt)}; AM = CM \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AEM = \triangle CFM (c.g.c)$$

Suy ra $ME = MF$ (hai cạnh tương ứng)

$$\angle AME = \angle CMF \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \angle AME + \angle CME = \angle CMF + \angle CME$$

$$\Rightarrow \angle AMC = \angle EMF = 60^\circ$$

+ Xét $\triangle MEF$ có: $\angle EMF = 60^\circ$ (cmt); $ME = MF$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle MFE$ là tam giác đều.

c) Trên đoạn thẳng AK lấy điểm N sao cho $KN = KC$; trên đoạn thẳng BK lấy điểm I sao cho $KI = KD$

$$\text{Có } \angle KCE = \angle KAB + \angle ABK = \angle MCB + \angle MBC = 60^\circ$$

$$\text{Suy ra } \angle KEN = \angle KDI = 60^\circ$$

Do đó $\triangle CKN$ và $\triangle DKI$ là các tam giác đều

$$\Rightarrow KC = KN; KD = DI \text{ và } \angle NCK = \angle IDK = 60^\circ$$

+ Chứng minh được $\angle ACN = \angle MCK$ và $\angle KDM = \angle BDI$

+ Chứng minh $\triangle ACN = \triangle MCK$ (c.g.c) và $\triangle BDI = \triangle MKD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AN = KM = BI \text{ (các cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow AK = KM + KC \text{ và } BK = KM + KD$$

$$\Rightarrow AK + BK = 2KM + CK + DK$$

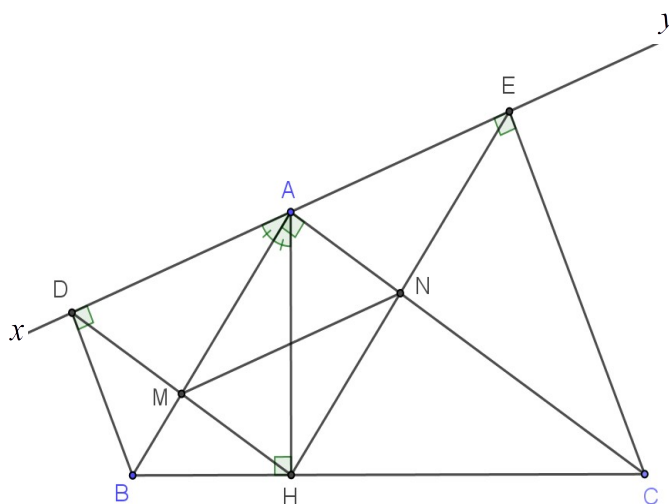
$$\Rightarrow \frac{AK + BK - CK - DK}{KM} = 2$$

Câu 99. (HSG 7 trường Trần Thái Tông, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Quảng Trạch, Quảng Bình 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường cao AH . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm H , vẽ tia Ax sao cho $\angle BAx = \angle BAH$. Gọi Ay là tia đối của tia Ax . Vẽ BD và CE vuông góc với đường thẳng xy ($D, E \in xy$). AB cắt DH tại M , AC cắt EH tại N .

- a) Chứng minh rằng: Tia AC là phân giác của $\angle HAE$.
 b) Chứng minh rằng: $BD + CE = BC$.
 c) Chứng minh rằng: $MN = AH$.

Lời giải



a) Tia AC là phân giác của $\angle HAE$.

+) Ta có $\angle DAB = \angle ACE$ (Cùng phụ $\angle EAC$). (1)

$\angle BAH = \angle ACH$ (Cùng phụ $\angle HAC$). (2)

Mà $\angle DAB = \angle BAH$ (Do giả thiết cho $\angle BAx = \angle BAH$) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle ACE = \angle ACH$.

+) Xét $\triangle AEC$ và $\triangle AHC$ có

$\angle AEC = \angle AHC = 90^\circ$, Cạnh huyền AC chung, $\angle ACE = \angle ACH$.

Suy ra $\triangle AEC = \triangle AHC$ (Cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow \angle EAC = \angle HAC$ (hai góc tương ứng)

Suy ra AC là phân giác của $\angle HAE$.

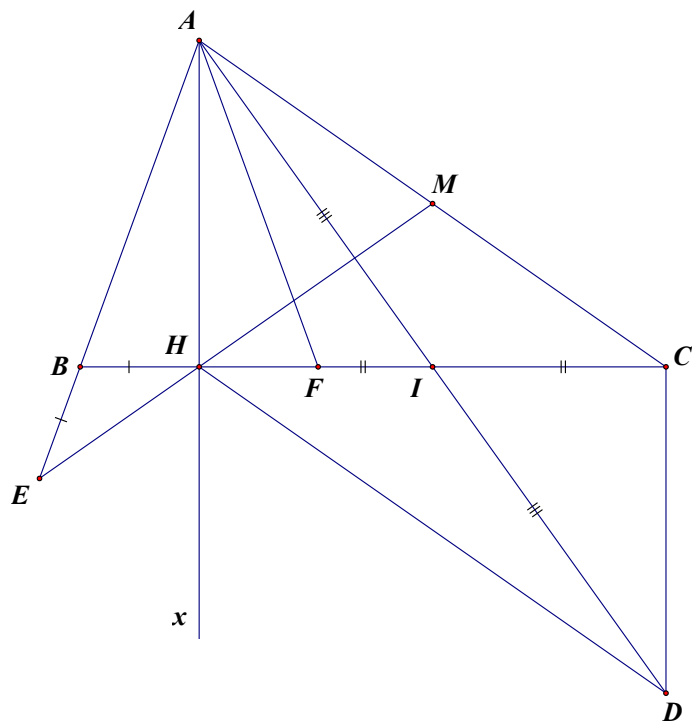
b) Chứng minh $BD + CE = BC$.

- +) $\triangle ADB = \triangle AHB$ (cạnh huyền- góc nhọn) nên $BD = BH$.
- +) $\triangle AEC = \triangle AHC$ (Cạnh huyền – góc nhọn) nên $CE = HC$ (hai cạnh tương ứng)
- +) Do đó $BD + CE = BH + HC = BC$.
- c) Chứng minh $MN = AH$.
- +) $\triangle ADB = \triangle AHB$ (cạnh huyền- góc nhọn) nên $AD = AH; BD = BH$
- Suy ra AB là đường trung trực của DH hay $AB \perp DH$ tại M .
- +) $\triangle AEC = \triangle AHC$ (Cạnh huyền – góc nhọn) nên $CE = HC; AE = AH$
- Suy ra AC là đường trung trực của EH hay $AC \perp EH$ tại N .
- Suy ra $AM \parallel NH$
- +) $\triangle ANH = \triangle HMA$ (Cạnh huyền – góc nhọn) nên $AN = MH$
- Suy ra $AN = DM$
- Do đó $\triangle AMN = \triangle MAD$ (c - g - c) nên $MN = AD$ suy ra $MN = AH$.

Câu 100. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2022 - 2023)

- Cho tam giác ABC có $\angle B < 90^\circ, \angle B = 2\angle C$. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia đối tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$.
- a) Chứng minh $\angle BEH = \angle ACB$
- b) Lấy I là trung điểm đoạn HC . Trên tia đối tia IA lấy điểm D sao cho $IA = ID$. Chứng minh $\triangle ACD = \triangle DHA$ và tia đối tia HA là phân giác của $\angle EHD$.
- c) Chứng minh tia EH đi qua trung điểm M của đoạn thẳng AC .
- d) Chu vi tam giác ABH lớn hơn độ dài đoạn thẳng AC .

Lời giải



a) Xét $\triangle BEH$ có: $BE = EH(gt) \Rightarrow \triangle BEH$ cân tại B (định nghĩa) $\Rightarrow \angle BEH = \angle BHE$ (tính chất)

+ Lại có $\angle ABC$ là góc ngoài tại B của $\triangle BEH$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle BEH + \angle BHE$ (tính chất góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow \angle ABC = 2\angle BEH$

Mà $\angle ABC = 2\angle C(gt)$

$\Rightarrow \angle BEH = \angle C$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle FAC = \angle HDH \\ AC = HD \\ \angle ACI = \angle DHI \end{cases}$$

b) Chứng minh được $\triangle AIC = \triangle DIH$ (c.g.c)

+ Chứng minh được $\triangle ACD = \triangle DHA$ (c.g.c)

+ Ta có: $\angle ACI = \angle DHI(cmt)$

Mà $\angle ACI = \angle C = \angle BHE(cmt)$

$\Rightarrow \angle BHE = \angle HDH$

Lại có $\angle BHA = \angle AHC = 90^\circ (AH \perp BC)$

Lại có

$$\Rightarrow \angle BHE + \angle BHA = \angle HDH + \angle AHC \Rightarrow \angle AHE = \angle AHD \quad (1)$$

+ Kẻ Hx là tia đối của tia HA

$$\angle EHz + \angle EHA = 180^\circ (kb) \quad (2)$$

Ta có:

$$\angle HHD + \angle AHD = 180^\circ (kb) \quad (3)$$

$$(1)(2)(3) \Rightarrow \angle Hx = \angle Hx \Rightarrow Hx \text{ là tia phân giác của } \angle EHD$$

Vậy tia đối tia HA là tia phân giác của $\angle EHD$.

c) Giả sử tia EH cắt AC tại điểm M

$$+ \text{Ta có: } \angle BHE = \angle MHC \text{ (đối đỉnh); } \angle BHE = \angle E = \angle ACB \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \angle MHC = \angle ACB \Rightarrow \triangle MHC \text{ cân tại } M \text{ (dnhb)} \Rightarrow MH = MC \text{ (định nghĩa)}$$

$$+ \text{Ta có } \triangle AHC \text{ vuông tại } H, \text{ nên: } \angle ACB + \angle HAC = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \angle MHC + \angle MHA = 90^\circ; \angle MHC = \angle MCH$$

$$\Rightarrow \angle MAH = \angle MHA \Rightarrow \triangle MAH \text{ cân tại } M \text{ (dnhb)} \Rightarrow MH = MA \text{ (định nghĩa)}$$

$$\text{Mà } MH = MC \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow MA = MC$$

Mà M nằm giữa A và C

$\Rightarrow M$ là trung điểm của đoạn thẳng AC

Vậy tia EH đi qua trung điểm M của đoạn thẳng AC

d) Chu vi tam giác AHB là:

$$\begin{aligned} AB + AH + BH &= AB + AH + BE \quad (\text{do } BH = BE) \\ &= AE + AH \quad (\text{do } B \in AE) \end{aligned}$$

+ Lấy F thuộc đoạn HC sao cho H là trung điểm BF .

+ Xét $\triangle ABF$, có AH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến

$$\text{nên } \triangle ABF \text{ cân tại } A \Rightarrow \angle ABF = \angle AFB$$

$$\text{Mà } \angle AFB = \angle FAC + \angle ACB \text{ (tính chất góc ngoài tam giác)}$$

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle FAC + \angle ACB \Rightarrow 2 \cdot \angle ACB = \angle FAC + \angle ACB$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle FAC \Rightarrow \triangle FAC \text{ cân tại } F \Rightarrow FA = FC$$

$$\text{Mà } FA = AB \text{ (} \triangle ABF \text{ cân tại } A \text{)}$$

$$\Rightarrow AB = FC$$

$$\text{Mà } HF = BH = BE$$

$$\Rightarrow AB + BE = FC + HF \Rightarrow AE = HC$$

Chu vi tam giác AHB là $AH + HC$

Xét $\triangle AHC$ có: $AH + HC > AC$ (Bất đẳng thức tam giác)

Vậy chu vi tam giác AHB lớn hơn độ dài đoạn thẳng AC .

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>