

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 10 – SỐ THẬP PHÂN

CHỦ ĐỀ 2: SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. KHÁI NIỆM

a) Khái niệm:

Khi viết phân số $\frac{a}{b}$ dưới dạng số thập phân ta thực hiện phép chia a cho b , nếu phép chia a cho b không bao giờ chấm dứt

$$\text{Ví dụ: } \frac{2}{3} = 0,6666...; \frac{-17}{11} = -1,5454...; \dots$$

Tuy phép chia không chấm dứt nhưng phần thập phân của kết quả phép chia có một *nhóm chữ số lặp đi lặp lại vô hạn lần*. Ta nói số thập phân thu được là *số thập phân vô hạn tuần hoàn* và nhóm chữ số lặp đi lặp lại trong phần thập phân là *chu kì* của nó.

b) Cách viết:

Để viết số thập phân vô hạn tuần hoàn, người ta đặt chu kì trong dấu ngoặc. Chẳng hạn:

$$\frac{2}{3} = 0,6666... = 0,(6);$$

$$\frac{-17}{11} = -1,5454... = -1,(54); \dots$$

$$\frac{7}{33} = 0,2121... = 0,(21);$$

$$\frac{7}{22} = 0,31818... = 0,3(18)$$

Chú ý: Số thập phân vô hạn tuần hoàn chia thành hai dạng

- Số thập phân vô hạn tuần hoàn *đơn* nếu chu kì bắt đầu ngay sau dấu phẩy.

$$\text{VD: } 0,(6); 0,(21); -1,(54)$$

- Số thập phân vô hạn tuần hoàn *tạp* nếu chu kì không bắt đầu ngay sau dấu phẩy, phần thập phân đứng trước chu kì gọi là *phần bất thường*,

$$\text{VD: } 0,3(18) \text{ có chu kì là 18 và phần bất thường là 3.}$$

2. NHẬN BIẾT MỘT PHÂN SỐ VIẾT ĐƯỢC DƯỚI DẠNG SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN ĐƠN HAY TẠP.

- Nếu một phân số tối giản mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết thành số thập phân vô hạn *tuần hoàn*. Đặc biệt

+) Nếu mẫu không có ước nguyên tố 2 và 5 thì viết được thành số thập phân *vô hạn tuần hoàn đơn*.

+) Nếu mẫu có một trong các ước nguyên tố 2 và 5 thì viết được thành số thập phân *vô hạn tuần hoàn* *tập*.

+) Ví dụ: khi chia 7 cho 33 được số thập phân vô hạn, Ta có: $\frac{7}{33} = 0,212121... = 0,(21)$

Số $\frac{7}{33}$ cũng có thể viết dưới dạng $0,(2121)$ hoặc $0,2(12)$. So với cách viết $0,(21)$ có chu kì 21 thì cách viết thứ hai có chu kì lớn hơn, cách viết thứ ba có chữ số thập phân liền trước chu kì và chữ số cuối cùng của chu kì bằng nhau, ta không chọn những cách viết này.

+) Số thập phân vô hạn tuần hoàn gọi là *đơn* nếu chu kì bắt đầu ngay sau dấu phẩy, ví dụ $0,(21)$; gọi là *tập* nếu chu kì không bắt đầu ngay sau dấu phẩy, phần thập phân đứng trước chu kì gọi là *phần bất thường*, ví dụ $0,3(18)$ có chu kì là 18 và phần bất thường là 3.

3. VIẾT SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN DƯỚI DẠNG PHÂN SỐ:

- Quy tắc viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số:

+ Muốn viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số, ta lấy chu kì làm tử, còn mẫu là một số gồm các chữ số 9, số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kì. Ví dụ:

$$0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad 0,(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

+ Muốn viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn tập dưới dạng phân số, ta lấy số gồm phần bất thường và chu kì trừ đi phần bất thường làm tử, còn mẫu là một số gồm các chữ số 9 kèm theo các chữ số 0, số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kì, số chữ số 0 bằng số chữ số của phần bất thường. Chẳng hạn:

$$5,1(6) = 5 \frac{16 - 1}{90} = 5 \frac{1}{6};$$

$$0,3(18) = \frac{318 - 3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$$

$$\overline{0,(a_1 a_2 \dots a_n)} = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_n}$$

- Tổng quát:

$$\overline{0, b_1 b_2 \dots b_k (a_1 a_2 \dots a_n)} = \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_k a_1 a_2 \dots a_n} - \overline{b_1 b_2 \dots b_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_n \underbrace{00 \dots 0}_k}$$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Viết phân số dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn

I. Phương pháp giải:

Để viết một tỉ số hoặc một phân số $\frac{a}{b}$ dưới dạng số thập phân ta làm phép chia $a : b$

II. Bài toán:

Bài 1:

Các phân số sau viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn? Tại sao? Hãy viết các phân số dưới dạng đó.

$$\frac{10}{15}; \frac{5}{11}; \frac{2}{13}; \frac{13}{22}; \frac{5}{24}.$$

Lời giải:

a) Xét phân số $\frac{10}{15} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow$ mẫu của phân số có ước nguyên tố là 3 nên $\frac{10}{15}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Vậy: $\frac{10}{15} = 0,666... = 0,(6)$

b) Xét phân số $\frac{5}{11}$

$\Rightarrow$ mẫu của phân số có ước nguyên tố là 11 nên $\frac{5}{11}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Vậy: $\frac{5}{11} = 0,454545... = 0,(45)$

c) Xét phân số $\frac{2}{13}$

$\Rightarrow$ mẫu của phân số có ước nguyên tố là 13 nên $\frac{2}{13}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Vậy: $\frac{2}{13} = 0,153846153846... = 0,(153846)$

d) Xét phân số $\frac{13}{22} = \frac{13}{2 \cdot 11}$

$\Rightarrow$ mẫu của phân số có ước nguyên tố là 11 nên $\frac{13}{22}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Vậy: $\frac{13}{22} = 0,590909... = 0,5(90)$

e) Xét phân số $\frac{5}{24} = \frac{5}{2^3 \cdot 3}$

$\Rightarrow$ mẫu của phân số có ước nguyên tố là 3 nên $\frac{5}{24}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Vậy: $\frac{5}{24} = 0,208333... = 0,208(3)$

Bài 2:

a) Khi viết phân số $\frac{5}{7}$ dưới dạng số thập phân, hỏi chữ số thứ 2021 sau dấu phẩy là chữ số nào?

b) Tìm chữ số thập phân thứ 100 sau dấu phẩy của phân số $\frac{17}{900}$ (viết dưới dạng số thập phân).

c) Tìm chữ số thập phân thứ 2^{10} sau dấu phẩy của phân số $\frac{24}{27}$ (viết dưới dạng số thập phân).

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{5}{7} = 0,714258\ 714258... = 0,(714258)$

Số thập phân $0,(714258)$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì gồm 6 chữ số.

Mà: $2021 = 6 \cdot 336 + 5$, như vậy 2021 chia cho 6 dư 5 nên chữ số thập phân thứ 2021 sau dấu phẩy của $0,(714258)$ là chữ số 5.

b) Ta có: $\frac{17}{900} = 0,018888... = 0,01(8)$

Số thập phân $0,01(8)$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp mà phần bất thường có hai chữ số và chu kì có 1 chữ số là 8.

Ta lại có: $100 > 2$ nên chữ số thập phân thứ 100 sau dấu phẩy của số $0,01(8)$ là chữ số 8.

c) Ta có: $\frac{24}{27} = 1,(4117647058823529)$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn mà chu kì gồm 16 chữ số.

Mà: $2^{10} = 1024 = 64 \cdot 16$, suy ra 2^{10} chia 16 dư 0 nên chữ số thập phân thứ 2^{10} sau dấu phẩy là chữ số 9.

Dạng 2: Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số

I. Phương pháp giải:

- Muốn viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số với

+ Tử: là chu kì

+ Mẫu: là một số gồm các chữ số 9, số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kì.

$$0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad 0,(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

$$\overline{0,(a_1 a_2 \dots a_n)} = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\overline{99 \dots 9}}_n$$

Tổng quát:

- Muốn viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số với

+ Tử: phần bất thường và chu kì trừ đi phần bất thường.

+ Mẫu: một số gồm các chữ số 9 kèm theo các chữ số 0, số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kì, số chữ số 0 bằng số chữ số của phần bất thường.

$$5,1(6) = 5 \frac{16 - 1}{90} = 5 \frac{1}{6};$$

$$0,3(18) = \frac{318 - 3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$$

- Tổng quát:

$$\overline{0, b_1 b_2 \dots b_k (a_1 a_2 \dots a_n)} = \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_k a_1 a_2 \dots a_n} - \overline{b_1 b_2 \dots b_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_n \underbrace{00 \dots 0}_k}$$

II. Bài toán:

Bài 3:

Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

$$0,(27); \quad 0,(703); \quad 0,(571428); \quad 2,01(6); \quad 0,1(63); \quad 2,41(3); \quad 0,88(63)$$

Lời giải:

$$a) \quad 0,(27) = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

$$b) \quad 0,(703) = \frac{703}{999} = \frac{19}{27}$$

$$c) \quad 0,(571428) = \frac{571428}{999999} = \frac{4}{7}$$

$$d) \quad 2,01(6) = 2 \frac{16-1}{900} = 2 \frac{15}{900} = 2 \frac{1}{60}$$

$$e) \quad 0,1(63) = \frac{163-1}{990} = \frac{9}{55}$$

$$f) \quad 2,41(3) = 2 \frac{413-41}{900} = 2 \frac{31}{75}$$

$$g) \quad 0,88(63) = \frac{8863-88}{9900} = \frac{39}{44}$$

Bài 4:

Các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau có bằng nhau không ?

$$\overline{0,(a_1 a_2)}; \quad \overline{0,(a_1 a_2 a_1 a_2)}; \quad \overline{0,a_1(a_2 a_1)}$$

Lời giải:

Ta có: $\overline{0,(a_1 a_2)} = \frac{\overline{a_1 a_2}}{99}$

$$\overline{0,(a_1 a_2 a_1 a_2)} = \frac{\overline{a_1 a_2 a_1 a_2}}{9999} = \frac{101 \cdot \overline{a_1 a_2}}{101 \cdot 99} = \frac{\overline{a_1 a_2}}{99}$$

$$\overline{0,a_1(a_2 a_1)} = \frac{\overline{a_1 a_2 a_1} - a_1}{990} = \frac{\overline{a_1 a_2} \cdot 0}{990} = \frac{\overline{a_1 a_2} \cdot 10}{99 \cdot 10} = \frac{\overline{a_1 a_2}}{99}$$

Vậy $\overline{0,(a_1 a_2)} = \overline{0,(a_1 a_2 a_1 a_2)} = \overline{0,a_1(a_2 a_1)}$

Nhận xét: Như vậy từ phân số $\frac{\overline{a_1 a_2}}{99}$ ta có thể viết được các dạng nhiều số thập phân vô hạn tuần hoàn khác nhau như $\overline{0,(a_1 a_2)}$; $\overline{0,(a_1 a_2 a_1 a_2)}$; $\overline{0,a_1(a_2 a_1)}$; ... nhưng cách viết $\overline{0,(a_1 a_2)}$ thuận tiện hơn, do đó người ta chọn cách viết này.

Dạng 3: Tính giá trị biểu thức số

I. Phương pháp giải:

Để thực hiện các phép tính về số thập phân vô hạn tuần hoàn trước hết ta viết chúng dưới dạng phân số tối giản rồi thực hiện các phép toán trên phân số.

II. Bài toán:

Bài 5: Tính:

a) $0,1(6) + 1,(3)$

b) $1,(3) + 0,1(2) \cdot 2\frac{8}{11}$

c) $10,(3) + 0,(4) - 8,(6)$

d) $[12,(1) - 2,3(6)] : 4,(21)$

Lời giải:

a) $0,1(6) + 1,(3) = \frac{16 - 1}{90} + 1\frac{3}{9}$

$$= \frac{15}{90} + \frac{12}{9} = \frac{1}{6} + \frac{8}{6}$$

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

b) $1,(3) + 0,1(2) \cdot 2\frac{8}{11} = 1\frac{3}{9} + \frac{12 - 1}{90} \cdot \frac{30}{11}$

$$= \frac{12}{9} + \frac{11}{90} \cdot \frac{30}{11}$$

$$= \frac{12}{9} + \frac{3}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

c) $10,(3) + 0,(4) - 8,(6) = 10\frac{3}{9} + \frac{4}{9} - 8\frac{6}{9}$

$$= \frac{93}{9} + \frac{4}{9} - \frac{78}{9}$$

$$= \frac{19}{9}$$

d) $[12,(1) - 2,3(6)] : 4,(21) = \left[12\frac{1}{9} - 2\frac{33}{90} \right] : 4\frac{21}{99}$

$$= 9\frac{67}{90} : 4\frac{21}{99}$$

$$= \frac{877}{90} \cdot \frac{99}{417} = \frac{9647}{4170}$$

Bài 6:

Tìm x, biết:

$$a) [0,(37)+0,(62)] \cdot x = 10$$

$$b) 0,(12):1,(6) = x:0,(4)$$

$$c) \frac{0,(3)+0,(384615)+\frac{3}{13}x}{0,0(3)+13} = \frac{50}{85}$$

Lời giải:

$$a) [0,(37)+0,(62)] \cdot x = 10$$

$$\Rightarrow \left(\frac{37}{99} + \frac{62}{99} \right) x = 10$$

$$\Rightarrow \frac{99}{99} x = 10$$

$$\Rightarrow x = 10$$

Vậy $x = 10$.

$$b) 0,(12):1,(6) = x:0,(4)$$

$$\Rightarrow \frac{12}{99} : 1\frac{6}{9} = x : \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow x : \frac{4}{9} = \frac{12}{99} \cdot \frac{9}{15}$$

$$\Rightarrow x : \frac{4}{9} = \frac{4}{55}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{55} \cdot \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{16}{495}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{16}{495}$$

$$c) \frac{0,(3)+0,(384615)+\frac{3}{13}x}{0,0(3)+13} = \frac{50}{85}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{9} + \frac{384615}{999999} + \frac{3}{13}x}{\frac{3}{90} + 13} = \frac{50}{85}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{3} + \frac{5}{13} + \frac{3}{13}x}{\frac{391}{30}} = \frac{10}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{28}{39} + \frac{3}{13}x = \frac{10}{17} \cdot \frac{391}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{28}{39} + \frac{3}{13}x = \frac{10}{17} \cdot \frac{391}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{13}x = \frac{23}{3} - \frac{28}{39}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{13}x = \frac{271}{39}$$

$$\Rightarrow x = \frac{271}{39} : \frac{3}{13}$$

$$\Rightarrow x = \frac{271}{39} \cdot \frac{13}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{271}{9} = 30\frac{1}{9}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{271}{9}.$$

Bài 7:

Thay các chữ cái bởi các chữ số thích hợp: $\overline{0,x(y)} - \overline{0,y(x)} = 8.0,0(1)$, biết rằng $x + y = 9$

Lời giải:

Ta có: $\overline{0,x(y)} - \overline{0,y(x)} = 8.0,0$

$$\Rightarrow \frac{\overline{xy} - x}{90} - \frac{\overline{yx} - y}{90} = \frac{8}{90}$$

$$\Rightarrow \overline{xy} - x - \overline{yx} + y = 8$$

$$\Rightarrow 10x + y - x - 10y - x + y = 8$$

$$\Rightarrow 10x + y - x - 10y - x + y = 8$$

$$\Rightarrow 8x - 8y = 8$$

$$\Rightarrow x - y = 1$$

$$\text{Mà } x + y = 9$$

$$\text{Do đó: } x = 5, y = 4.$$

$$\text{Vậy } 0,5(4) - 0,4(5) = 8.0,0(1)$$

Bài 8:

Cho $A = \frac{1}{1,00...01}$ (số chia có 99 chữ số 0 sau dấu phẩy). Tính A với 300 chữ số thập phân.

Lời giải:

Ta có:
$$A = \frac{1}{1,00\dots01} = \frac{1}{1, \underbrace{0\dots0}_{99 \text{ chữ số}} 1} = \frac{1 \underbrace{0\dots0}_{99 \text{ chữ số}}}{1 \underbrace{0\dots0}_{99 \text{ chữ số}} 1}.$$

Nhân cả tử và mẫu với $\underbrace{99\dots9}_{100 \text{ chữ số}}$, ta được:
$$A = \frac{\underbrace{99\dots9}_{100} \underbrace{0\dots0}_{100}}{\underbrace{99\dots9}_{100} \underbrace{0\dots0}_{100} 99\dots9}.$$

Theo quy tắc viết số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn thành phân số thì số 0, $\frac{(\underbrace{9\dots9}_{100} \underbrace{0\dots0}_{100})}{100}$ viết thành phân số trên.

Vậy
$$A = 0, \underbrace{9\dots9}_{100} \underbrace{0\dots0}_{100} \underbrace{9\dots9}_{100}.$$

Bài 9:

Cho số $x = 0,12345\dots998999$ trong đó ở bên phải dấu phẩy ta viết các số từ 1 đến 999 liên tiếp nhau. Chữ số thứ 2003 ở bên phải dấu phẩy là chữ số mấy? Vì sao?

Lời giải:

Xét dãy 2003 chữ số đầu tiên sau dấu phẩy của x . Gọi chữ số thứ 2003 là a .

Chia dãy số trên thành ba nhóm:

$$\underbrace{123456789}_{\text{nhóm I}} \underbrace{1011\dots1011}_{\text{nhóm II}} \underbrace{99100101\dots101}_{\text{nhóm III}} x$$

Nhóm I có 9 chữ số, nhóm II có 180 chữ số, nhóm III có:

$$2003 - 9 - 180 = 1814 \text{ (chữ số).}$$

Ta thấy 1814 chia 3 được 604 dư 2.

Số thứ 604 kể từ 100 là: $100 + 604 - 1 = 703$.

Hai chữ số tiếp theo số 703 là chữ số 7 và chữ số 0 (thuộc số 704).

Vậy $a = 0$.

Chữ số thứ 2003 ở bên phải dấu phẩy là chữ số 0

Bài 10:

Thay các dấu * bởi các chữ số thích hợp:

$ \begin{array}{r} *** \\ - \quad ** \\ \hline *** \\ - \quad ** \\ \hline ** \\ - \quad ** \\ \hline ** \\ - \quad ** \\ \hline ** \\ - \quad ** \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} ** \\ \hline **** \\ \hline \end{array} $
--	---

Lời giải:

Xét phép trừ thứ hai, ta có: $*** - ** = *$

$\Rightarrow$ số bị trừ có dạng 10^*

$\Rightarrow$ số bị trừ $*** = 100$ (vì chữ số đơn vị của số bị trừ là chữ số 0 thêm vào để tìm các chữ số thập phân của thương).

Đặt số chia, thương và tích riêng thứ nhất theo thứ tự là $\overline{ab}; \overline{c, deg}; \overline{mn}$

Ta thấy $10 : \overline{ab} = 0, \overline{deg}$ nên $10000 = \overline{ab} \cdot \overline{deg}$. (Với $d \neq 0$ (vì nếu $d = 0$ thì $\overline{ab} \cdot \overline{eg} < 10000$), $g \neq 0$ (vì nếu $d = 0$ thì thương đã dừng lại ở e))

$\Rightarrow \overline{deg}$ là ước của 10000 và có ba chữ số.

$\Rightarrow$ Suy ra $\overline{deg}$ bằng $5^3 = 125$ hoặc $5^4 = 625$. Tương ứng $\overline{ab}$ bằng 80 hoặc 16

+ Trường hợp $\overline{ab} = 80$ thì $\overline{mn} = 80$, trái với $80 + 10 = ***$ (số bị chia), loại

+ Trường hợp $\overline{ab} = 16$ thì $c = 6, \overline{mn} = 96$, số bị chia là $96 + 10 = 106$

Vậy ta có $106 : 16 = 6,625$

$ \begin{array}{r} 106 \\ - \quad 96 \\ \hline 100 \\ - \quad 96 \\ \hline 40 \\ - \quad 32 \\ \hline 80 \\ - \quad 80 \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 16 \\ \hline 6,625 \end{array} $
--	---

Dạng 4: Kiểm tra một biểu thức phân số viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn (đơn hay tạp).

I. Phương pháp giải:

Đối với các phân số đó, nếu mẫu không có ước nguyên tố 2 và 5 thì viết được thành số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn, nếu mẫu có một trong các ước nguyên tố 2 và 5 thì viết được thành số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.

II. Bài toán

Bài 11:

Chứng tỏ rằng: các phân số sau viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

$$\frac{22n+5}{143n} ; \frac{21n+4}{7n} ; \frac{79!+79}{5609n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Lời giải:

a)

Ta có: $\begin{cases} 22n = 11 \cdot 2n : 11 \\ 5 \cancel{ : 11} \end{cases} \Rightarrow 22n+5 \cancel{ : 11}$, mà $143n = 11 \cdot 13n : 11$, do đó $\frac{22n+5}{143n}$ rút gọn đến khi tối giản thì mẫu số vẫn chứa thừa số là 11.

$\Rightarrow \frac{22n+5}{143n} \quad (n \in \mathbb{N})$ khi viết thành số thập phân thì ở dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn

b)

Ta có: $\begin{cases} 21n : 7 \\ 4 \cancel{ : 7} \end{cases} \Rightarrow 21n+4 \cancel{ : 7}$, mà $7n : 7$, do đó $\frac{21n+4}{7n}$ rút gọn đến khi tối giản thì mẫu số vẫn chứa thừa số là 7.

$\Rightarrow \frac{21n+4}{7n} \quad (n \in \mathbb{N})$ khi viết thành số thập phân thì ở dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

c)

$$\text{Ta có: } \frac{79!+79}{5609n} = \frac{1.2.3...79+79}{71.79.n} = \frac{1.2.3...78+1}{71.n}$$

Ta có: $\begin{cases} 1.2.3...78 : 71 \\ 1 \cancel{ : 71} \end{cases} \Rightarrow 1.2.3...78+1 \cancel{ : 71}$, mà $71n : 71$, do đó $\frac{21n+4}{7n}$ rút gọn đến khi tối giản thì mẫu số vẫn chứa thừa số là số nguyên tố 71.

$\Rightarrow \frac{79!+79}{5609n} \quad (n \in \mathbb{N})$ khi viết thành số thập phân thì ở dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Bài 12:

Với mọi số tự nhiên $n \neq 0$, khi viết các phân số sau dưới dạng số thập phân, ta được số thập phân hữu hạn hay vô hạn? Nếu là số thập phân vô hạn thì số đó là số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn hay tạp?

$$a) \frac{3n^2 + 3n}{12n};$$

$$b) \frac{6n+1}{12n}$$

Lời giải:

$$a) \text{ Ta có: } \frac{3n^2 + 3n}{12n} = \frac{3n(n+1)}{12n} = \frac{n+1}{4}$$

Vì mẫu của phân số là $4 = 2^2$ nên $\frac{3n^2 + 3n}{12n}$ đổi ra số thập phân hữu hạn.

$$b) \text{ Xét phân số: } \frac{6n+1}{12n}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 6n : 3 \\ 1 \not: 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6n+1 \not: 3$$

$$\text{mà } 12n = 3 \cdot 4n : 3$$

$$\Rightarrow \text{phân số } \frac{6n+1}{12n} \text{ rút gọn đến khi phân số tối giản, mẫu vẫn có ước là } 3$$

$$\Rightarrow \text{phân số } \frac{6n+1}{12n} \text{ đổi thành số thập phân vô hạn tuần hoàn.}$$

Mặt khác:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 6n : 2 \\ 1 \not: 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6n+1 \not: 2$$

$$\text{mà } 12n = 2 \cdot 6n : 2$$

$$\Rightarrow \text{phân số } \frac{6n+1}{12n} \text{ rút gọn đến khi phân số tối giản, mẫu vẫn có ước là } 2$$

$$\Rightarrow \text{phân số } \frac{6n+1}{12n} \text{ đổi thành số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.}$$

Bài 13:

Khi viết các phân số sau dưới dạng số thập phân, ta được số thập phân hữu hạn, hay vô hạn tuần hoàn đơn, hay vô hạn tuần hoàn tạp:

$$a) \frac{35n+3}{70} (n \in \mathbb{N});$$

$$b) \frac{10987654321}{(n+1)(n+2)(n+3)} (n \in \mathbb{N}) ?$$

Lời giải:

a) Ta có: $\begin{cases} 35n : 7 \\ 3 \nmid 7 \end{cases}$

$\Rightarrow 35n + 3 \nmid 7$, mà $70 : 7$,

do đó $\frac{35n+3}{70}$ rút gọn đến khi tối giản thì mẫu số vẫn chứa thừa số là 7.

$\Rightarrow \frac{35n+3}{70} (n \in \mathbb{N})$ viết thành số thập phân thì ở dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Mặt khác: $\begin{cases} 35n : 5 \\ 3 \nmid 5 \end{cases}$

$\Rightarrow 35n + 3 \nmid 5$, mà $70 : 5$,

do đó phân số $\frac{35n+3}{70}$ rút gọn đến khi tối giản thì mẫu số vẫn chứa thừa số là 5.

Vậy $\frac{35n+3}{70} (n \in \mathbb{N})$ viết thành số thập phân thì ở dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.

b) Xét phân số $\frac{10987654321}{(n+1)(n+2)(n+3)} (n \in \mathbb{N})$

Tổng các chữ số của tử số là: $1+0+9+8+7+6+5+4+3+2+1=46$

$\Rightarrow$ tử số $10987654321 \nmid 3$

Mà mẫu số $(n+1)(n+2)(n+3)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp

$\Rightarrow (n+1)(n+2)(n+3) \vdots 3$

Do đó phân số $\frac{10987654321}{(n+1)(n+2)(n+3)} (n \in \mathbb{N})$ rút gọn đến khi tối giản thì mẫu số vẫn chứa thừa số là 3

$\Rightarrow \frac{35n+3}{70} (n \in \mathbb{N})$ khi viết thành số thập phân thì ở dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Mặt khác: $10987654321 \nmid 2$; $(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 2$

$\Rightarrow$ phân số $\frac{10987654321}{(n+1)(n+2)(n+3)} (n \in \mathbb{N})$ rút gọn đến khi tối giản thì mẫu số vẫn chứa thừa số là 2

Vậy $\frac{10987654321}{(n+1)(n+2)(n+3)} (n \in \mathbb{N})$ khi viết thành số thập phân thì ở dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.

Bài 14:

Cho phân số: $C = \frac{m^3 + 3m^2 + 2m + 5}{m(m+1)(m+2)+6} (m \in \mathbb{N})$

a) Chứng tỏ C là phân số tối giản.

b) Phân số C được viết dưới dạng số thập phân hữu hạn hay số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Lời giải:

a) Xét phân số: $C = \frac{m^3 + 3m^2 + 2m + 5}{m(m+1)(m+2) + 6} \quad (m \in \mathbb{N})$

Gọi ƯCLN của tử số và mẫu của phân số C là $d \quad (d \in \mathbb{N}, d \geq 1)$.

Ta có: $\begin{cases} m^3 + 3m^2 + 2m + 5 : d \\ m(m+1)(m+2) + 6 : d \end{cases}$

$$\Rightarrow m(m+1)(m+2) + 6 - (m^3 + 3m^2 + 2m + 5) : d$$

$$\Rightarrow m^3 + 3m^2 + 2m + 6 - (m^3 + 3m^2 + 2m + 5) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

$\Rightarrow$ ƯCLN của tử số và mẫu của phân số C là 1

Vậy C là phân số tối giản.

b) Vì $m; (m+1); (m+2)$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên trong ba số $m; (m+1); (m+2)$ có một số chia hết cho 2, và một số chia hết cho 3.

$$\Rightarrow m(m+1)(m+2) : 6$$

Mà $6 : 6$

$$\Rightarrow m(m+1)(m+2) + 6 : 6$$

$$\Rightarrow m(m+1)(m+2) + 6 : 3$$

$\Rightarrow$ Phân số $C = \frac{m^3 + 3m^2 + 2m + 5}{m(m+1)(m+2) + 6}$ tối giản khi phân tích mẫu có chứa thừa số là 3 nên C khi viết thành số thập phân thì ở dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Dạng 5: Chứng minh

I. Phương pháp giải:

Sử dụng các phép biến đổi của số thập phân vô hạn tuần hoàn và tính chất chia hết,... để chứng minh một số bài toán.

II. Bài toán:

Bài 15:

Cho A là số lẻ không tận cùng bằng 5. Chứng minh rằng tồn tại một bội của A gồm toàn chữ số 9.

Lời giải:

Xét phân số $\frac{1}{A}$, mẫu A không chứa thừa số nguyên tố 2 và 5 nên $\frac{1}{A}$ viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn.

$$\frac{1}{A} = \overline{a_1 a_2 \dots a_n} \overline{99 \dots 9}_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{99\dots9}_n \cdot 9 = A \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\Rightarrow \underbrace{99\dots9}_n : 9 = A$$

Vậy tồn tại một bội của A gồm toàn chữ số 9.

Bài 16:

Cho A là số lẻ không tận cùng bằng 5. Chứng minh rằng tồn tại một bội của A gồm toàn chữ số 1.

Lời giải:

Xét phân số $\frac{1}{A}$, mẫu A không chứa thừa số nguyên tố 2 và 5 nên $\frac{1}{A}$ viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn.

$$\frac{1}{A} = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\underbrace{99\dots9}_n}$$

Ta có:

$$\Rightarrow \underbrace{99\dots9}_n \cdot 9 = A \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\Rightarrow \underbrace{99\dots9}_n : 9 = A$$

$$\Rightarrow 9 \cdot \underbrace{11\dots1}_n = A \quad (1)$$

Mà ước chung của A và 9 chỉ có thể là 1; 3; 9.

+ Nếu $\text{ƯC}(A, 9) = 1$ thì từ (1) suy ra $\underbrace{11\dots1}_n = A$.

+ Nếu $\text{ƯC}(A, 9) = 3$ thì đặt $A = 3B$, ta có $\text{ƯC}(B, 3) = 1$.

$$\text{Từ (1) suy ra} \quad 9 \cdot \underbrace{11\dots1}_n : 3B \Rightarrow 3 \cdot \underbrace{11\dots1}_n : B$$

$$\Rightarrow \underbrace{11\dots1}_n : B$$

$$\Rightarrow \underbrace{11\dots1}_{3n} : 3B = A$$

+ Nếu $\text{ƯC}(A, 9) = 9$ thì đặt $A = 9B$.

$$\text{Từ (1) suy ra} \quad 9 \cdot \underbrace{11\dots1}_n : 9B \Rightarrow \underbrace{11\dots1}_n : B$$

$$\Rightarrow \underbrace{11\dots1}_{9n} : 9B = A$$

Vậy tồn tại một bội của A gồm toàn chữ số 1.

Bài 17:

Tìm phân số dương tối giản nhỏ hơn 1 biết rằng khi chia tử cho tử cho mẫu ta được một số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn chu kì có 3 chữ số và phân số này bằng lập phương của một phân số khác.

Lời giải:

Gọi $\overline{abc}$ chu kì của số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn ($0 < \overline{abc} < 999$)

$\Rightarrow$ Phân số cần tìm phải có dạng: $\frac{\overline{abc}}{999}$

Ta có: $\frac{\overline{abc}}{999} = \frac{\overline{abc}}{3^3 \cdot 37} = \frac{\overline{abc} \cdot 37^2}{3^3 \cdot 37^3} = \frac{\overline{abc} \cdot 37^2}{(3 \cdot 37)^3}$

Đặt $\frac{\overline{abc} \cdot 37^2}{(3 \cdot 37)^3} = \frac{x^3 \cdot 37^3}{(3 \cdot 37)^3} \quad (x \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow \overline{abc} \cdot 37^2 = x^3 \cdot 37^3$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = x^3 \cdot 37, \text{ mà } \overline{abc} < 999$$

$$\Rightarrow x^2 < 27 \text{ hay } x < 3$$

$$\Rightarrow x \in \{1; 2\}$$

Với $x=1$ thì $\overline{abc} = \overline{037}$, ta được phân số: $\frac{037}{999} = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

Với $x=2$ thì $\overline{abc} \cdot 37^2 = 2^3 \cdot 37^3 = 296$, ta được phân số: $\frac{296}{999} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{1}{27}; \frac{8}{27}$

Bài 18:

Viết tiếp vào mỗi chỗ chấm hai phân số theo quy luật:

a) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{8}; \frac{1}{10}; \frac{1}{16}; \dots$

b) $\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11}; \frac{1}{12}; \dots$

Lời giải:

a) Ta thấy các phân số: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{8}; \frac{1}{10}; \frac{1}{16}$ viết được dưới dạng phân số thập phân hữu hạn có tử bằng 1 và mẫu tăng dần.

Vậy hai phân số điền tiếp vào chỗ chấm là: $\frac{1}{20}; \frac{1}{25}$, ta được dãy số: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{8}; \frac{1}{10}; \frac{1}{16}; \frac{1}{20}; \frac{1}{25}$.

b) Ta thấy các phân số: $\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11}; \frac{1}{12}$ viết được dưới dạng phân số thập phân vô hạn tuần hoàn có tử bằng 1 và mẫu tăng dần.

Vậy hai phân số điền tiếp vào chỗ chấm là: $\frac{1}{13}; \frac{1}{14}$, ta được dãy số: $\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11}; \frac{1}{12}; \frac{1}{13}; \frac{1}{14}$.

❗ HẾT ❗

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>