



Chương

Bài 2.

TỔNG HIỆU HAI VECTƠ

A

Lý thuyết

1. Tổng của hai vectơ



Định nghĩa

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

▫ Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$.

▫ Vectơ $\vec{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a}; \vec{b}$.

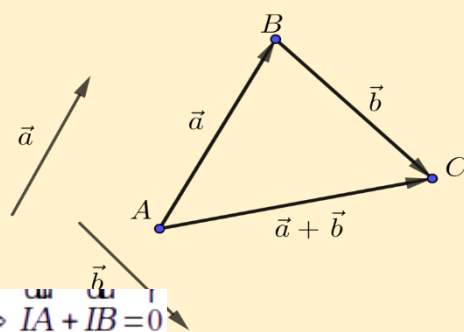
▫ Kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

► Vậy $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

► **Điểm đặc biệt.**

» Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

» Điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$



2. Hiệu của hai vectơ



Định nghĩa

» Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$, là vectơ cùng phương nhưng ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

Tính chất

Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

(1) Tính chất giao hoán $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

(2) Tính chất kết hợp $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(3) Tính chất của vectơ - không $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$



Các quy tắc:

► **Quy tắc ba điểm:**

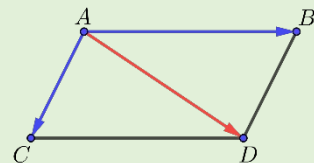
» Với 3 điểm A, B, C : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

► **Quy tắc hiệu vectơ:**

» Với 3 điểm O, A, B : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

► **Quy tắc hình bình hành:**

» Tứ giác A, B, C, D là hình bình hành: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.





Các dạng bài tập

Dạng 1. Liên quan tổng vectơ



Phương

(1) Định nghĩa tổng hai vectơ:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

▫ Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$.

▫ Vectơ $\vec{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a}, \vec{b}$.

⇒ Vậy $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

(2) Điểm đặc biệt:

▫ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

▫ Điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

(3) Tính chất: Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

▫ Tính chất giao hoán $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

▫ Tính chất kết hợp $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

► Quy tắc ba điểm:

» Với 3 điểm A, B, C : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

► Quy tắc hình bình hành:

» Tứ giác A, B, C, D là hình bình hành: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.



Ví dụ 1.1.

Cho hình bình hành $ABCD$, xác định các vectơ

$$(1) \vec{t} = \vec{CB} + \vec{CD}$$

$$(2) \vec{e} = \vec{AC} + \vec{DA}$$

Lời giải

$$(1) \vec{t} = \vec{CB} + \vec{CD}$$

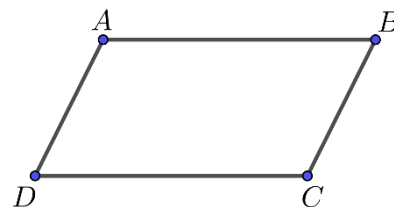
Áp dụng quy tắc hình bình hành:

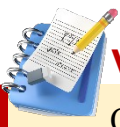
$$\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$$

$$(2) \vec{e} = \vec{AC} + \vec{DA}$$

Áp dụng tính chất giao hoán:

$$\vec{AC} + \vec{DA} = \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{DC}$$





Ví dụ 1.2.

Cho tam giác ABC , xác định các vector

$$(1) \vec{g} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC}$$

$$(2) \vec{q} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

Lời giải

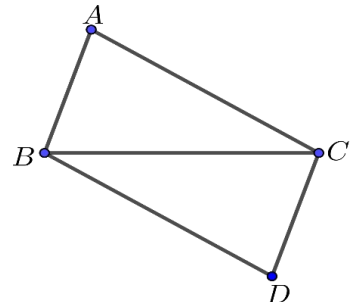
$$(1) \vec{g} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC}$$

$$\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC} = \left(\vec{AB} + \vec{BC} \right) + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

$$(2) \vec{q} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

Gọi D là điểm sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Khi đó $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.



Ví dụ 1.3.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O , xác định các vector.

$$(1) \vec{m} = \vec{AB} + \vec{OD}$$

$$(2) \vec{n} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{OD}$$

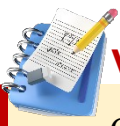
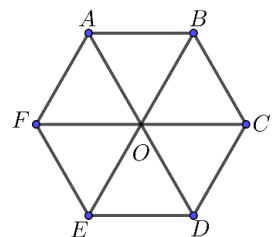
Lời giải

$$(1) \vec{m} = \vec{AB} + \vec{OD}$$

$$\vec{AB} + \vec{OD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$(2) \vec{n} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{OD}$$

$$\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{OD} = \vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AD}$$



Ví dụ 1.4.

Cho n điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, xác định vector

$$\vec{h} = \vec{A_{n-1}A_n} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \vec{A_2A_3} + \vec{A_1A_2}$$

Lời giải

$$\vec{h} = \vec{A_{n-1}A_n} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \vec{A_2A_3} + \vec{A_1A_2}$$

$$= \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-3}A_{n-2}} + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-1}A_n}$$

$$\begin{cases} \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} = \vec{A_1A_3} \\ \vec{A_2A_3} + \vec{A_3A_4} = \vec{A_2A_4} \\ \vec{A_3A_4} + \vec{A_4A_5} = \vec{A_3A_5} \\ \vdots \\ \vec{A_1A_{n-1}} + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n} \end{cases}$$

Thấy rằng:



Do đó
$$\overbrace{A_{n-1}A_n} + \overbrace{A_{n-2}A_{n-1}} + \overbrace{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overbrace{A_2A_3} + \overbrace{A_1A_2} = \overbrace{A_1A_n}.$$



Dạng 2. Hiệu hai vectơ - vectơ đối



Phương

(1) Định nghĩa tổng hai vectơ:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

▫ Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$.

▫ Vectơ $\vec{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a}$; $\vec{b}$.

⇒ Vậy $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

(2) Định nghĩa hiệu hai vectơ:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

▫ Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

▫ Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$, là vectơ cùng phương nhưng ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

(3) Điểm đặc biệt:

▫ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

▫ Điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

(4) Tính chất: Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

▫ Tính chất giao hoán $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

▫ Tính chất kết hợp $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

► Quy tắc ba điểm:

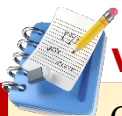
» Với 3 điểm A, B, C : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

► Quy tắc hiệu vectơ:

» Với 3 điểm O, A, B : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

► Quy tắc hình bình hành:

» Tứ giác A, B, C, D là hình bình hành: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.



Ví dụ 2.1.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A .

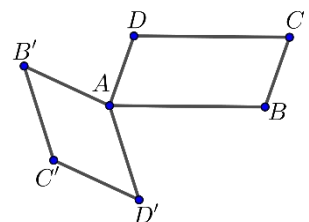
Chứng minh rằng $\vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = \vec{0}$

Lời giải

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$$\vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = (\vec{AB} - \vec{AB'}) + (\vec{AC'} - \vec{AC}) + (\vec{AD} - \vec{AD'})$$

$$= (\vec{AB} + \vec{AD}) - \vec{AC} - (\vec{AB'} + \vec{AD'}) + \vec{AC} = \vec{0}$$





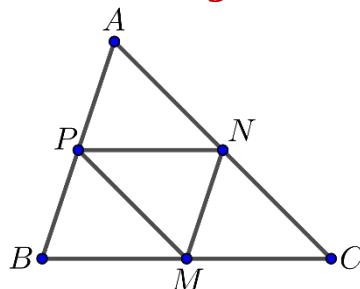
Ví dụ 2.2.

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

(1) $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$

(2) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$ với O là điểm bất kì

Lời giải



(1) $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$

Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành

Nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec{AP} + \vec{AN} = \vec{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$$\Rightarrow \vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{AM} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{CM} + \vec{BM}$$

Mà $\vec{CM} + \vec{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC .

Vậy $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$.

(2) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$ với O là điểm bất kì

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = (\vec{OP} + \vec{PA}) + (\vec{OM} + \vec{MB}) + (\vec{ON} + \vec{NC})$$

$$= (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) - (\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP})$$

$$= (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) + \vec{PA} + \vec{MB} + \vec{NC}$$

$$\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0} \text{ suy ra } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}.$$



Dạng 3. Chứng minh đẳng thức vectơ



Phương

► **Tính chất:** Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

▫ Tính chất giao hoán $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

▫ Tính chất kết hợp $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

► **Quy tắc ba điểm:**

» Với 3 điểm A, B, C : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

► **Quy tắc hiệu vectơ:**

» Với 3 điểm O, A, B : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

► **Quy tắc hình bình hành:**

» Tứ giác A, B, C, D là hình bình hành: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

► **Quy tắc trung điểm - trọng tâm:**

» Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

Khi đó $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

» Điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Khi đó $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

Các phương pháp biến đổi:

- » Biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức (xuất phát từ vế phức tạp biến đổi đưa về vế đơn giản).
- » Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về tương đương với một đẳng thức luôn đúng.
- » Xuất phát từ một đẳng thức luôn đúng để biến đổi về đẳng thức cần chứng minh



Ví dụ 3.1.

Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C và D . Hãy chứng minh đẳng thức

👉 **Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB} \\ \Leftrightarrow & \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AA} = \vec{0} \text{ (Đúng).} \end{aligned}$$



Ví dụ 3.2.

Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng:

$$(1) \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED} \quad (2) \vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} = \vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB}$$

👉 **Lời giải**

$$(1) \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$$

Biến đổi vế trái ta có



$$\begin{aligned} \overrightarrow{VT} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) \\ &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{VP}. \end{aligned}$$

$$(2) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$$

Đẳng thức tương đương với

$$(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = 0 \text{ (đúng).}$$



Ví dụ 3.3.

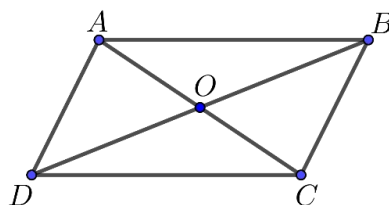
Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:

$$(1) \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = 0$$

$$(2) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$$

$$(3) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

Lời giải



$$(1) \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$$

Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 0$$

$$(2) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = 0$

Tương tự: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$.

$$(3) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

Cách 1:

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

Cách 2:

Đẳng thức tương đương với

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{ (đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành).}$$



Ví dụ 3.4.

Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm của AM .

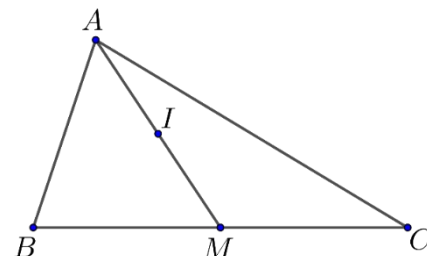
(1) Chứng minh rằng: $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

(2) Với O là điểm bất kì, chứng minh rằng: $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI}$.

Lời giải

(1) Chứng minh rằng: $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

♦ Ta có: $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}$
 $= 2\vec{IA} + 2\vec{IM}$ ($\vec{IB} + \vec{IC} = 2\vec{IM}$ do M là trung điểm BC)
 $= 2(\vec{IA} + \vec{IM})$
 $= \vec{0}$ ($\vec{IA} + \vec{IM} = \vec{0}$ do I là trung điểm của AM)
 (đpcm).



(2) Với O là điểm bất kì, chứng minh rằng: $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI}$.

♦ Ta có: $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 2\vec{IO} + 2\vec{OA} + \vec{IO} + \vec{OB} + \vec{IO} + \vec{OC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 4\vec{IO} + 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = -4\vec{IO} \Leftrightarrow 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI}$ (đpcm).



Ví dụ 3.4.

Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O .

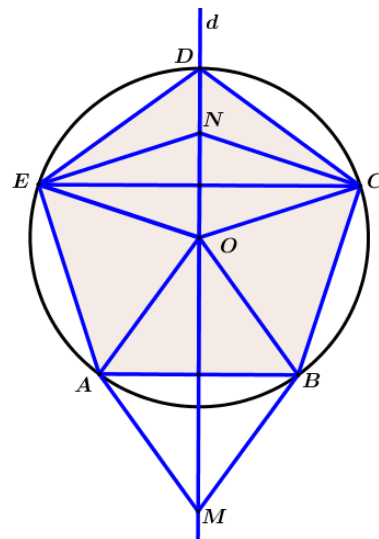
(1) Chứng minh rằng: hai vector $\vec{OA} + \vec{OB}$ và $\vec{OC} + \vec{OE}$ đều cùng phương với $\vec{OD}$.

(2) Chứng minh hai vector $\vec{AB}$ và $\vec{EC}$ cùng phương.

Lời giải

(1) Chứng minh rằng: hai vector $\vec{OA} + \vec{OB}$ và $\vec{OC} + \vec{OE}$ đều cùng phương với $\vec{OD}$.

♦ Gọi d là đường thẳng chứa OD
 ♦ Thì d là một trục đối xứng của ngũ giác đều.
 ♦ Ta có:
 $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OM}$, trong đó M là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và $M \in d$.
 ♦ Tương tự $\vec{OC} + \vec{OE} = \vec{ON}$, trong đó N là đỉnh của hình thoi $OENC$ và $N \in d$.
 ♦ Do đó hai vector $\vec{OA} + \vec{OB}$ và $\vec{OC} + \vec{OE}$ đều có giá là đường thẳng d
 ♦ Nên hai vector $\vec{OA} + \vec{OB}$ và $\vec{OC} + \vec{OE}$ cùng phương với nhau và cùng phương với vector $\vec{OD}$.





(2) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

♦ Ta có: $OAMB$ và $OENC$ là các hình thoi nên ta có: $\begin{cases} EC \perp d \\ AB \perp d \end{cases} \Rightarrow AB \parallel EC$.

♦ Do đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

(3) Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

♦ Theo câu (1) ta có:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}$$

♦ Nên $\vec{r}$ có giá là đường thẳng d .

♦ Mặt khác: $\vec{r} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OE}$ thì $\vec{r}$ có giá là đường thẳng OE .

♦ Vì $\vec{r}$ có 2 giá khác nhau nên $\vec{r} = \vec{0}$.

⇒ Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ (đpcm).



Dạng 4. Độ dài vectơ



Phương

Áp dụng: tính chất, quy tắc (ba điểm, hình bình hành, hiệu vectơ, trung điểm - trọng tâm)

Để tính $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}|$ ta thực hiện theo hai bước sau:

- » **Bước 1:** Biến đổi và rút gọn biểu thức vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{v}$, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,... sao cho $\vec{v}$ đơn giản nhất.



Ví dụ 3.1.

Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C và D . Hãy chứng minh đẳng thức $|\vec{AB} + \vec{CD}| = |\vec{AD} + \vec{CB}|$

- (1) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.
 (2) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$ thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.

Lời giải

Giả sử: $\vec{a} = \vec{AB}$ và $\vec{b} = \vec{BC}$ thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

- (1) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

• Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì 3 điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và B nằm giữa A, C .

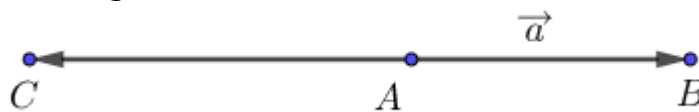


• Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

⇒ Vậy $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

- (2) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$ thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.

• Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$ thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và A nằm giữa B, C .



• Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = BC - AB = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.

⇒ Vậy $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.



(3) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

Từ chứng minh ở câu (1) và (2):

$\Rightarrow$ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ hoặc $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

$\Rightarrow$ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì A, B, C không thẳng hàng.

♦ Xét $\triangle ABC$ có hệ thức $AC < AB + BC$. Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

♦ Như vậy, trong mọi trường hợp ta có: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.



Ví dụ 3.2.

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3(\text{cm})$, $AC = 4(\text{cm})$. Gọi I là trung điểm BC . Xác định và tính độ dài các vectơ:

(1) $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}$

(2) $\vec{v} = 2\vec{IA} - \vec{CA}$

Lời giải

(1) $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}$

♦ Gọi K là trung điểm AC

Khi đó $2\vec{BK} = \vec{BA} + \vec{BC}$ với B là điểm bất kỳ.

♦ Nên $|\vec{u}| = |\vec{BA} + \vec{BC}| = |2\vec{BK}| = 2|\vec{BK}|$.

♦ Xét $\triangle BAK$: $BK = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$.

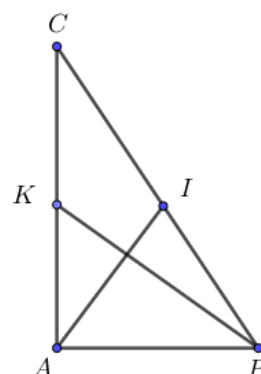
$\Rightarrow$ Vậy $|\vec{u}| = 2|\vec{BK}| = 2\sqrt{13}$.

(2) $\vec{v} = 2\vec{IA} - \vec{CA}$

♦ Theo giả thiết: I là trung điểm BC khi đó $2\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AC}$ với A là điểm bất kỳ.

$$\vec{v} = 2\vec{IA} - \vec{CA} = -(\vec{AB} + \vec{AC}) - \vec{CA} = -\vec{AB} - \vec{AC} - \vec{CA} = -\vec{AB}$$

♦ Khi đó: $|\vec{v}| = |-\vec{AB}| = |\vec{AB}| = 3$.



Ví dụ 3.3.

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$. Tính theo a :

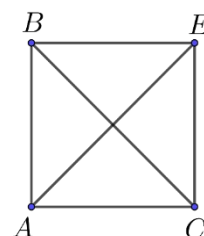
(1) $|\vec{AB} - \vec{AC}|$

(2) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

(3) $|\vec{AB} + 2\vec{AC}|$

Lời giải

♦ Ta có $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$





$$(1) \quad |\vec{AB} - \vec{AC}|$$

$$|\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{CB}| = CB = a\sqrt{2}$$

$$(2) \quad |\vec{AB} + \vec{AC}|$$

$$|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AE}| = AE = BC = a\sqrt{2}, \text{ với } ABEC \text{ là hình vuông.}$$

$$(3) \quad |\vec{AB} + 2\vec{AC}|$$

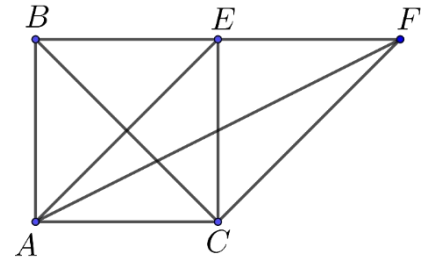
$$|\vec{AB} + 2\vec{AC}| = |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AC}| = |\vec{AE} + \vec{AC}| = |\vec{AF}| = AF,$$

với $AEFC$ là hình bình hành.

• Do $DABF$ vuông tại B và $\vec{BF} = \vec{BE} + \vec{EF} = \vec{BE} + \vec{AC} = 2a$

$$\text{Nên ta có } AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{• Vậy } |\vec{AB} + 2\vec{AC}| = a\sqrt{5}$$



Ví dụ 3.3.

Cho hình chữ nhật ABCD có $AB=3$, $BC=4$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính

$$(1) \quad |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$$

$$(2) \quad |\vec{AM} + \vec{AN}|$$

Lời giải

$$(1) \quad |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$$

$$\text{• Ta có: } \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{AC}$$

$$\Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = |\vec{AC} + \vec{AC}| = |\vec{AC}| + |\vec{AC}| = 2AC$$

• Xét $DABC$ vuông tại A :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

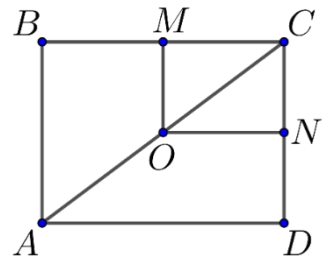
$$\Rightarrow \text{Vậy } |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = 2AC = 10$$

$$(2) \quad |\vec{AM} + \vec{AN}|$$

$$\text{• Ta có: } \vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{AD} + \vec{DN}$$

$$= (\vec{AB} + \vec{AD}) + (\vec{BM} + \vec{DN}) = \vec{AC} + (\vec{ON} + \vec{OM}) = \vec{AC} + \vec{OC}$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } |\vec{AM} + \vec{AN}| = |\vec{AC} + \vec{OC}| = AC + \frac{AC}{2} = \frac{15}{2} \quad (\vec{AC}, \vec{OC} \text{ là hai vec tơ cùng hướng})$$





Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho 4 điểm A, B, C, D phân biệt. Chọn phương án **đúng**?

A. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

B. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$

D. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CA}$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA}$

» Câu 2. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$

👉 **Lời giải**

Chọn B

Áp dụng quy tắc 3 điểm ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

» Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$

👉 **Lời giải**

Chọn C

Theo quy tắc hình bình hành $ABCD$ ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

» Câu 4. Đẳng thức nào dưới đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP}$

B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$

C. $\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PM}$

D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Theo quy tắc trừ ba điểm, ta có $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$

» Câu 5. Cho $\triangle ABC$ gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Hỏi $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng véc tơ nào?

A. $\overrightarrow{AM}$

B. $\overrightarrow{MN}$

C. $\overrightarrow{PB}$

D. $\overrightarrow{AP}$

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP}$

» Câu 6. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MN}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$

D. $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ nên đáp án đúng là đáp án **C**.

» Câu 7. Cho đoạn thẳng AB có I là trung điểm, M là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$



Lời giải

Chọn B

Đoạn thẳng AB có I là trung điểm nên $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. Vậy **B** sai.

» Câu 8. Chọn khẳng định **sai**

- A.** Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\vec{IA} + \vec{BI} = \vec{0}$.
B. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\vec{AI} + \vec{IB} = \vec{AB}$.
C. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\vec{AI} + \vec{BI} = \vec{0}$.
D. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A

$$\vec{IA} + \vec{BI} = \vec{BI} + \vec{IA} = \vec{BA} \neq \vec{0}.$$

» Câu 9. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Mệnh đề nào sau đây **Sai**?

- A.** $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$. **B.** $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. **C.** $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{CB}$. **D.** $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn C

Mệnh đề $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{CB}$ sai phải sửa là $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$.

» Câu 10. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây là đúng

- A.** $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AM}$. **B.** $\vec{BG} = \vec{GA} + \vec{GC}$. **C.** $\vec{BM} = \vec{CM}$. **D.** $\vec{GA} + \vec{GM} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GC} = -\vec{GB} = \vec{BG}$$

» Câu 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BC}$. **B.** $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CD}$. **C.** $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$. **D.** $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.

» Câu 12. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A.** $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{0}$. **B.** $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$. **C.** $\vec{AO} + \vec{DO} = \vec{0}$. **D.** $\vec{OA} + \vec{CO} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có O là tâm hình bình hành $ABCD$ nên O là trung điểm của AC và BD . Do đó:

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}.$$

» Câu 13. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\vec{AB} - \vec{CA} = \vec{CB}$. **B.** $\vec{AA} + \vec{BB} = \vec{CC}$. **C.** $\vec{CA} + \vec{BA} = \vec{CB}$. **D.** $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$.

Lời giải

Chọn B

Hiển nhiên $\vec{AA} + \vec{BB} = \vec{CC} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ luôn đúng.

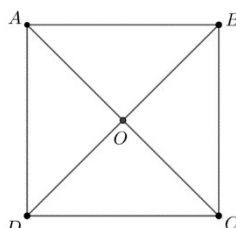


» Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{OA} + \vec{CO} = \vec{0}$. B. $\vec{OD} + \vec{OB} = \vec{0}$. C. $\vec{OA} = \vec{OC}$. D. $\vec{OD} + \vec{BO} = \vec{0}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B



Vì O là tâm của hình vuông $ABCD$ nên O là trung điểm của AC và BD nên theo quy tắc trung điểm ta có: $\vec{OD} + \vec{OB} = \vec{0}$

» Câu 15. Cho 3 điểm M, N, P bất kì. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{MN} - \vec{MP} = \vec{PN}$. B. $\vec{NM} + \vec{MP} = \vec{NP}$. C. $\vec{PN} - \vec{PM} = \vec{NM}$. D. $\vec{PM} = \vec{PN} + \vec{NM}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta có $\vec{PN} - \vec{PM} = \vec{MN}$ do đó khẳng định C sai.

» Câu 16. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Vector tổng $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA}$ bằng

- A. $\vec{0}$. B. $\vec{AC}$. C. $\vec{BD}$. D. $\vec{BA}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA} = (\vec{CD} + \vec{DA}) + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{CA} + \vec{AC} = \vec{0}$

» Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm I tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{IC} + \vec{ID}$. B. $\vec{IA} + \vec{ID} = \vec{IC} + \vec{IB}$.
C. $\vec{IB} + \vec{AI} = \vec{CI} + \vec{ID}$. D. $\vec{IA} + \vec{IC} = \vec{IB} + \vec{ID}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

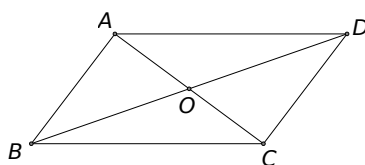
$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{IC} + \vec{ID} \Leftrightarrow \vec{IA} - \vec{IC} = \vec{ID} - \vec{IB} \Leftrightarrow \vec{CA} = \vec{BD}$$

$$\vec{IA} + \vec{ID} = \vec{IC} + \vec{IB} \Leftrightarrow \vec{IA} - \vec{IC} = \vec{IB} - \vec{ID} \Leftrightarrow \vec{CA} = \vec{DB}$$

$$\vec{IB} + \vec{AI} = \vec{CI} + \vec{ID} \Leftrightarrow \vec{AI} + \vec{IB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$$

$$\vec{IA} + \vec{IC} = \vec{IB} + \vec{ID} \Leftrightarrow \vec{IA} - \vec{IB} = \vec{ID} - \vec{IC} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{CD}$$

» Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O .



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{OB} - \vec{OD} = \vec{BD}$. B. $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$.
C. $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{CD}$. D. $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{BD}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C



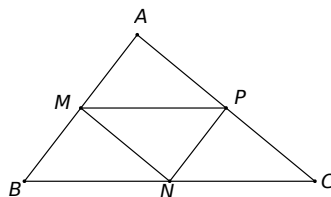
- ▢ Áp dụng quy tắc trừ $\vec{OB} - \vec{OD} = \vec{DB}$; $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$
- ▢ $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{CB} = \vec{AD}$ vô lý
- ▢ $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA} = \vec{CD}$ luôn luôn đúng

» Câu 19. Cho M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC . Hỏi vectơ $\vec{MB} + \vec{AP}$ bằng vectơ nào?

- A. $\vec{AC}$. B. $\vec{PB}$. C. $\vec{MP}$. D. $\vec{AN}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D



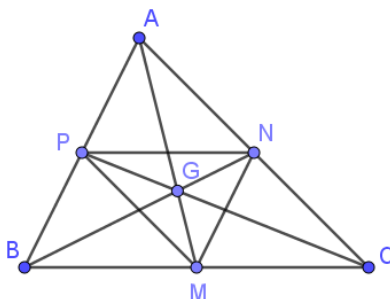
Ta có $\vec{AM} = \vec{MB} \rightarrow \vec{MB} + \vec{AP} = \vec{AM} + \vec{AP} = \vec{AN}$.

» Câu 20. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0}$. B. $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$
- C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GN} + \vec{GM} + \vec{GP}$. D. $\vec{AP} + \vec{AN} + \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D



Ta có:

$$\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = (\vec{BM} + \vec{MP}) + \vec{AP} = \vec{BP} + \vec{AP} = \vec{0}$$

$$\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG}) + (\vec{GM} + \vec{GN} + \vec{GP}) = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GN} + \vec{GM} + \vec{GP} = \vec{0}$$

$$(\vec{AP} + \vec{AN}) + \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{AM} + \vec{MC} + \vec{AC} = 2\vec{AC} \neq \vec{0}$$

» Câu 21. Rút gọn véc tơ $\vec{u} = \vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{NP} + \vec{QR}$.

- A. $\vec{u} = \vec{MR}$. B. $\vec{u} = \vec{MN}$. C. $\vec{u} = \vec{PR}$. D. $\vec{u} = \vec{MP}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có:



$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{NP} + \vec{QR} = (\vec{MN} + \vec{NP}) + (\vec{PQ} + \vec{QR}) \\ &= \vec{MP} + \vec{PR} = \vec{MR}\end{aligned}$$

» Câu 22. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A. $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$. B. $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{GC}$. C. $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{CG}$. D. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$.
Vậy A, D đúng.

Lại có: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} = -\vec{GC} \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} = \vec{CG}$. Vậy C đúng, B sai.

» Câu 23. Trong mặt phẳng, cho năm điểm phân biệt A, B, C, D, E . Vector $\vec{u} = \vec{BD} + \vec{EA} + \vec{CE} - \vec{CD}$ bằng vector nào sau đây?

- A. $\vec{AB}$. B. $\vec{AE}$. C. $\vec{BA}$. D. $\vec{BD}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

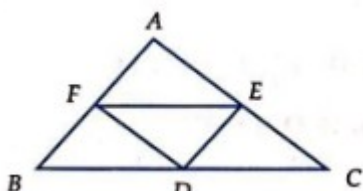
Ta có $\vec{u} = \vec{BD} + \vec{EA} + \vec{CE} - \vec{CD} = \vec{BD} + \vec{CA} - \vec{CD} = \vec{BD} + \vec{DA} = \vec{BA}$.

» Câu 24. Cho D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}$ B. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AF} + \vec{CE} + \vec{DB}$
C. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$ D. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{AC}$

👉 **Lời giải**

Chọn C



$$\begin{aligned}\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} &= \vec{AE} + \vec{ED} + \vec{BF} + \vec{FE} + \vec{CD} + \vec{DF} \\ &= \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} + (\vec{ED} + \vec{DF} + \vec{FE}) = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}\end{aligned}$$

» Câu 25. Cho tam giác đều ABC , cạnh $3a$. Mệnh đề nào sau đây đúng:

- A. $|\vec{AC}| = 3a$. B. $|\vec{AC}| = \vec{BC}$. C. $\vec{AB} = \vec{AC}$. D. $\vec{AC} = 3a$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

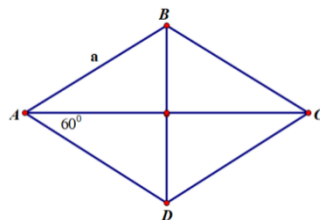
Vì tam giác đều ABC , cạnh $3a$ nên $|\vec{AC}| = AC = 3a$.

» Câu 26. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\angle BAD = 60^\circ$. Độ dài của $\vec{BD}$ bằng

- A. $2a$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B



Ta có hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\angle BAD = 60^\circ$,
suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên độ dài $\overline{BD}$ bằng a .

» Câu 27. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|\overline{AB} - \overline{AD}| = |\overline{AB} + \overline{AD}|$.
B. $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} = \vec{0}$.
C. $|\overline{BC} + \overline{BD}| = |\overline{AC} - \overline{AB}|$.
D. $\overline{AC} = \overline{BD}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có: $|\overline{AB} - \overline{AD}| = |\overline{DB}| = BD$ và $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AC}| = AC$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$.

Vậy mệnh đề đúng là $|\overline{AB} - \overline{AD}| = |\overline{AB} + \overline{AD}|$.

» Câu 28. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Khi đó $|\overline{AB} - \overline{AC}|$ bằng

- A. $2a$.
B. a .
C. $a\sqrt{3}$.
D. $2\sqrt{3}a$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

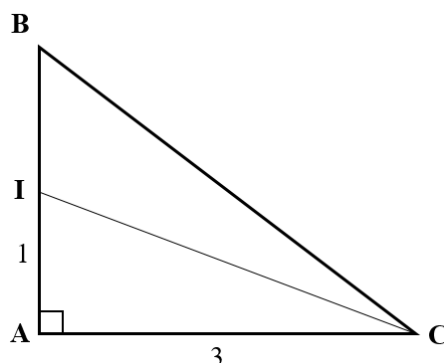
Ta có: $|\overline{AB} - \overline{AC}| = |\overline{CB}| = CB = 2a$.

» Câu 29. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2, AC = 3$. Độ dài của vector $\overline{BC} + \overline{AC}$ bằng

- A. 5.
B. 40.
C. $\sqrt{13}$.
D. $2\sqrt{10}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D



Ta có $\overline{BC} + \overline{AC} = -2\overline{CI}$ với I là trung điểm AB .

Vậy $|\overline{BC} + \overline{AC}| = 2|\overline{CI}| = 2\sqrt{1^2 + 3^2} = 2\sqrt{10}$.



- » **Câu 30.** Giả sử có các lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M . Cường độ hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là $300N, 400N$ và $\angle AMB = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ biết vật đứng yên.
- A.** $700N$. **B.** $250N$. **C.** $500N$. **D.** $1000N$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Vật đứng yên nên ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Rightarrow |\vec{F}_3| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2|.$$

Do $\angle AMB = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$.

$$\Rightarrow |\vec{F}_3| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500.$$

- » **Câu 31.** Cho tam giác ABC . Vị trí của điểm M sao cho $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ là
- A.** M trùng B .
B. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CABM$.
C. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBAM$.
D. M trùng C .

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA} = \vec{MB} - \vec{MC} \Leftrightarrow \vec{MA} = \vec{CB}$.

Do A, B, C không thẳng hàng suy ra M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBAM$.

- » **Câu 32.** Cho tam giác ABC , M là điểm thỏa $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.** M là trung điểm AB . **B.** M là trọng tâm tam giác ABC .
C. M trùng B . **D.** A là trung điểm MB .

👉 **Lời giải**

Chọn B

Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ với M là trọng tâm $DABC$.

- » **Câu 33.** Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$?
- A.** M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
B. M là trọng tâm tam giác ABC .
C. M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.
D. M thuộc trung trực của AB .

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta có: $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MC} = -\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{MC} = \vec{AB}$. Suy ra M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

- » **Câu 34.** Cho tam giác ABC . Tập hợp điểm M thỏa mãn: $|\vec{MB} - \vec{MA}| = |\vec{CB} - \vec{MB}|$



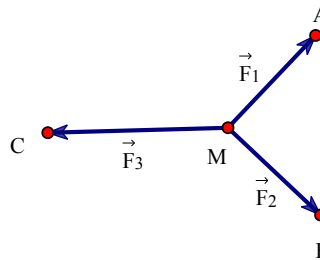
- A.** Đường tròn tâm C , bán kính AB . **B.** Đường tròn tâm B , bán kính AB .
C. Đường trung trực của đoạn AB . **D.** Đường trung trực của đoạn BC .
 ➤ **Lời giải**

Chọn A

Ta có: $|\vec{MB} - \vec{MA}| = |\vec{CB} - \vec{MB}| \Leftrightarrow AB = CM$

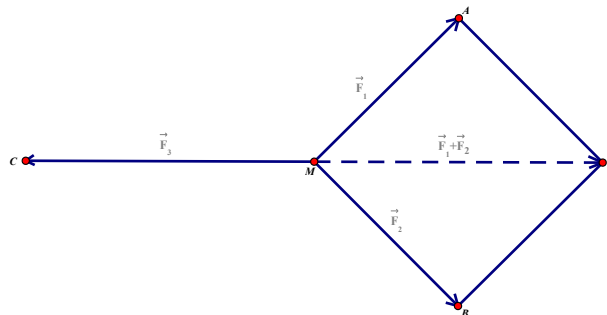
Do A, B, C cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn tâm C , bán kính AB .

- » **Câu 35.** Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}, \vec{F}_2 = \vec{MB}, \vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng $100N$ và góc $\angle AMB = 90^\circ$. Khi đó xác định cường độ của lực $\vec{F}_3$.



- A.** $|\vec{F}_3| = 100\sqrt{2}N$ **B.** $|\vec{F}_3| = 2\sqrt{2}N$ **C.** $|\vec{F}_3| = \sqrt{2}N$ **D.** $|\vec{F}_3| = 2\sqrt{3}N$
 ➤ **Lời giải**

Chọn A



Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MD}$ (D là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MADB$)

Do vật đứng yên nên

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Rightarrow |\vec{F}_3| = |-(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = MD = 100\sqrt{2}N$$

Vậy $|\vec{F}_3| = 100\sqrt{2}N$ cùng phương và ngược hướng với $\vec{MD}$.

B. Câu hỏi - Trả lời đúng/sai

- » **Câu 36.** Cho bốn điểm A, B, C, D . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CA}$		
(b)	$\vec{AD} + \vec{DA} = 0$		
(c)	$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$		



(d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

🔍 **Lời giải**

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$

» **Chọn SAI.**

(b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \text{ (luôn đúng).}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \text{ (luôn đúng)}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 37.** Cho tam giác ABC đều cạnh a , có trọng tâm G . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$		
(b)	$ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = 2a$		
(c)	$ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$		
(d)	$ \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$		

🔍 **Lời giải**

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}| = 2a$

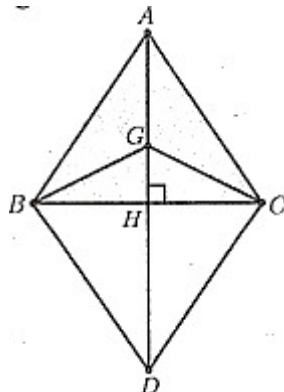
$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a$$

» **Chọn SAI.**



(c) $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$;

Vẽ hình bình hành $ABDC$, gọi H là giao điểm AD và BC
Suy ra H là trung điểm của cả AD và BC .



Theo quy tắc hình bình hành: $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.

Ta có AH là đường cao của tam giác ABC nên

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra: $AD = 2AH = a\sqrt{3}$.

Vậy $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = a\sqrt{3}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $|\vec{BG} - \vec{BC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\vec{BG} - \vec{BC} = \vec{BG} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{BG} = \vec{CG}$.

Dễ thấy $CG = AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $|\vec{BG} - \vec{BC}| = |\vec{CG}| = CG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 38.** Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} - \vec{CB} - \vec{ED} = \vec{FA}$		
(b)	$\vec{AB} - \vec{AF} + \vec{CD} - \vec{CB} + \vec{EF} = \vec{DE}$		
(c)	$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$		
(d)	$\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{EF} = \vec{AF} + \vec{BC} + \vec{ED}$		

👉 **Lời giải**

(a) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} - \vec{CB} - \vec{ED} = \vec{FA}$.

Ta có: $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} - \vec{CB} - \vec{ED} = \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} + \vec{BC} + \vec{DE}$



$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$$

» **Chọn SAI.**

(b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED}$

» **Chọn SAI.**

(c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

Ta có: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 39.** Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$		
(b)	$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$		
(c)	$ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = AC$		
(d)	Nếu $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} $ thì $ABCD$ là hình thoi.		

» **Lời giải**

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AD}$

» **Chọn SAI.**

(b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$

Ta có: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (vì $ABCD$ là hình bình hành).

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC$

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$ (vì $ABCD$ là hình bình hành).

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Nếu $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}|$ thì $ABCD$ là hình thoi.

Ta có: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DB}| \Leftrightarrow AC = BD$

Vì $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

» **Chọn SAI.**

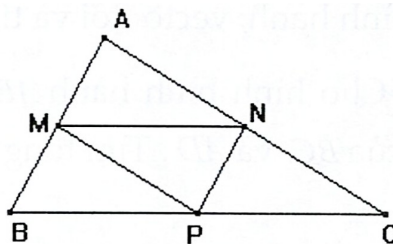


» **Câu 40.** Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$		
(b)	$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$		
(c)	$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MP}$		
(d)	$\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PC}$		

👉 **Lời giải**

Dễ thấy tứ giác $AMPN, MNCP$ là hình bình hành



- (a) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$
 $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$
 » **Chọn ĐÚNG.**
- (b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$
 $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN} \quad (\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP})$
 » **Chọn SAI.**
- (c) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MP}$
 $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
 » **Chọn ĐÚNG.**
- (d) $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PC}$
 $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$
 » **Chọn SAI.**

» **Câu 41.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , có O là giao điểm hai đường chéo. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	O là trung điểm của AC, BD		
(b)	$ \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$		
(c)	$ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = a$		
(d)	$ \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$		

👉 **Lời giải**

- (a) O là trung điểm của AC, BD



O là giao điểm hai đường chéo nên O là trung điểm của AC, BD

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\left| \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} \right| = a\sqrt{2}$

$$\left| \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} \right| = \left| \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} \right| = \left| \overrightarrow{BO} \right| = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

» **Chọn SAI.**

(c) $\left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \right| = a$

$$\left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \right| = \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \right| = 2 \left| \overrightarrow{AB} \right| = 2a$$

» **Chọn SAI.**

(d) $\left| \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} \right| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\left| \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} \right| = \left| \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} \right| = \left| \overrightarrow{BD} \right| = BD = a\sqrt{2}$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 42.** Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$		
(b)	$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$		
(c)	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$		
(d)	$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$		

👉 **Lời giải**

(a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$

Ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

Ta có

» **Chọn SAI.**

(c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

Ta có

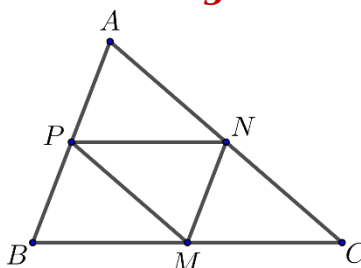
» **Chọn ĐÚNG.**



» **Câu 43.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tứ giác $BMNP$ và $APMN$ là hình bình hành		
(b)	$\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0}$		
(c)	$\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} = \vec{BM}$		
(d)	$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$ với O là điểm bất kì		

» **Lời giải**



(a) Tứ giác $BMNP$ và $APMN$ là hình bình hành

Ta có $\begin{cases} \vec{BP} \parallel \vec{MN}; BP = MN \\ \vec{NP} \parallel \vec{MB}; NP = MB \end{cases} \Rightarrow BMNP$ là hình bình hành

Ta có $\begin{cases} \vec{AP} \parallel \vec{MN}; AP = MN \\ \vec{AN} \parallel \vec{MP}; AN = MP \end{cases} \Rightarrow APMN$ là hình bình hành

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0}$.

$BMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow \vec{BM} = \vec{PN}$.

Vì N là trung điểm của $AC \Rightarrow \vec{CN} = \vec{NA}$.

$$\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = (\vec{PN} + \vec{NA}) + \vec{AP} = \vec{PA} + \vec{AP} = \vec{0} \quad (*)$$

Do đó theo quy tắc ba điểm:

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} = \vec{BM}$.

Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên $\vec{AP} + \vec{AN} = \vec{AM}$,

Kết hợp với quy tắc trừ $\Rightarrow \vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{AM} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{CM} + \vec{BM}$.

Mà $\vec{CM} + \vec{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC .

Vậy $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} = -\vec{BM}$

» **Chọn SAI.**

(d) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$ với O là điểm bất kì.

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = (\vec{OP} + \vec{PA}) + (\vec{OM} + \vec{MB}) + (\vec{ON} + \vec{NC})$$

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$= (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) + \vec{PA} + \vec{MB} + \vec{NC} = (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) - (\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP})$$

Lại có $\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0} \quad (*)$ suy ra $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$.

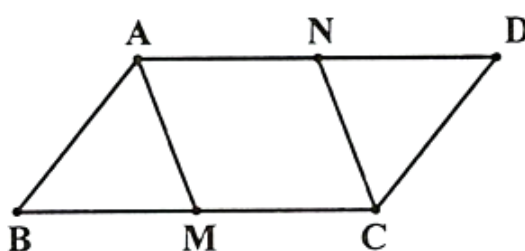


» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 44.** Cho hình bình hành $ABCD$ với M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$		
(b)	$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$		
(c)	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$		
(d)	$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BM}$		

👉 **Lời giải**



(a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

Theo qui tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Do $AMCN$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA}$

Suy ra $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

» **Chọn SAI.**

(c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Do $AMCN$ là hình bình hành, ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$$

» **Chọn SAI.**

(d) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BM}$

Do $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, suy ra $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM}$

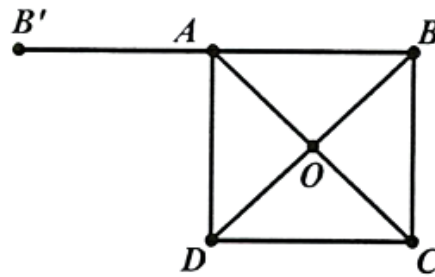
» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 45.** Cho $ABCD$ là hình vuông tâm O có cạnh a . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$OC = AO$		
(b)	$ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = AO$		
(c)	$ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$		
(d)	Độ dài vector $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ bằng DC		



Lời giải



(a) $\vec{OC} = \vec{AO}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $|\vec{AB} + \vec{OD}| = AO$

Ta có $\vec{OD} = \vec{BO} \Rightarrow \vec{AB} + \vec{OD} = \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{AO}$

$|\vec{AB} + \vec{OD}| = |\vec{AB} + \vec{BO}| = |\vec{AO}| = AO$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $|\vec{AB} - \vec{OC} + \vec{OD}| = 0$

Ta có $\vec{OC} = \vec{AO}$

$\vec{AB} - \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{AB} - \vec{AO} + \vec{OD} = \vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{AB} - \vec{OC} + \vec{OD}| = 0$

Suy ra

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Độ dài vector $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}$ bằng DC

$\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{BA} - \vec{DC}$

Áp dụng quy tắc trừ ta có

Lấy B' là điểm đối xứng của B qua A

Khi đó $-\vec{DC} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{BA} - \vec{DC} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BB'}$

$|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}| = |\vec{BB'}| = BB'$

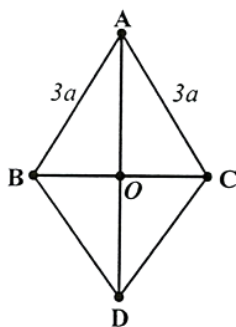
Suy ra

» **Chọn SAI.**

» **Câu 46.** Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $3a$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	$AO = 3a \frac{\sqrt{3}}{2}$		
(b)	$ \vec{AB} - \vec{AC} = 2a$		
(c)	$ \vec{AB} - \vec{CB} - \vec{AC} = 0$		
(d)	$ \vec{AB} + \vec{AC} = a\sqrt{3}$		

Lời giải



(a) $AO = 3a \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có: tam giác ABC đều có cạnh bằng $3a$ do đó $AO = 3a \frac{\sqrt{3}}{2}$
» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $|\vec{AB} - \vec{AC}| = 2a$

Ta có: $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB} \Rightarrow |\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{CB}| = CB = 3a$

» **Chọn SAI.**

(c) $|\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{AC}| = 0$

$$\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{AC} = \vec{AB} - \vec{AC} - \vec{CB} = \vec{CB} - \vec{CB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{AC}| = 0$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$

Dựng hình bình hành $ABDC$, Theo qui tắc hình bình hành ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$
Gọi O là giao điểm của AD và BC ,

$$AO = 3a \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = 2AO = 3a\sqrt{3}$$

Ta có

» **Chọn SAI.**

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» **Câu 47.** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB=1, CD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm

$$AD \text{ và } BC. \text{ Tính } |\vec{DM} - \vec{BA} - \vec{CN}|$$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1,5**

$$\text{Ta có: } |\vec{DM} - \vec{BA} - \vec{CN}| = |\vec{MA} + \vec{AB} + \vec{NC}|$$

$$= |\vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN}| = |\vec{MN}| = MN = \frac{AB+CD}{2} = \frac{3}{2} \approx 1,5$$

» **Câu 48.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh 1. Tính $|\vec{OA} - \vec{CB}| + |\vec{CD} - \vec{DA}|$ Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2,1**



+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\vec{OA} = \vec{CO}$ suy ra $\vec{OA} - \vec{CB} = \vec{CO} - \vec{CB} = \vec{BO}$

Vậy $|\vec{OA} - \vec{CB}| = |\vec{BO}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên $\vec{CD} = \vec{BA}$ suy ra $\vec{CD} - \vec{DA} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BD}$

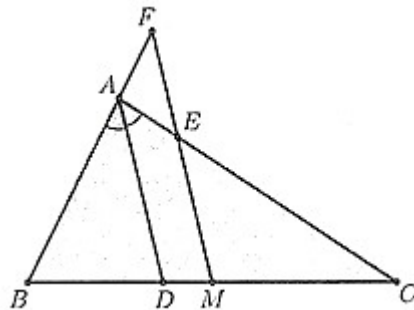
Mà $|\vec{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ suy ra $|\vec{CD} - \vec{DA}| = \sqrt{2}$

Khi đó $|\vec{OA} - \vec{CB}| + |\vec{CD} - \vec{DA}| = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \approx 2,1$

» **Câu 49.** Cho tam giác $ABC (AB < AC)$, AD là phân giác trong của góc A . Qua trung điểm M của cạnh BC , ta kẻ đường thẳng song song với AD , cắt cạnh AC tại E và cắt tia BA tại F . Biết rằng $AB = 6$ và $4BD = 3BM$. Tính: $|\vec{CM} - \vec{EM}|$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 8**



Ta có: $\vec{CM} - \vec{EM} = \vec{CM} + \vec{ME} = \vec{CE}$

Ta có: $ME \parallel AD \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{CM}{CD} \quad (1) \quad ; \quad AD \parallel MF \Rightarrow \frac{BA}{BF} = \frac{BD}{BM} \quad (2)$

Nhân theo vế (1), (2) với $BM = CM$, ta được: $\frac{CE}{BF} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad (3)$

Theo giả thiết, AD là phân giác của góc A nên $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \quad (4)$.

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{CE}{BF} = 1 \Rightarrow CE = BF \quad (5)$.

Từ (2): $\frac{BA}{BF} = \frac{BD}{BM} = \frac{3}{4} \Rightarrow BF = \frac{4}{3}BA = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8 \quad (6)$.

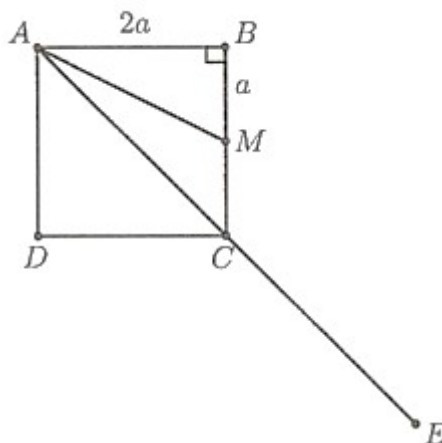
Từ (5) và (6) suy ra $CE = BF = 8$.

Vậy $|\vec{CM} - \vec{EM}| = |\vec{CE}| = CE = 8$.

» **Câu 50.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2 , M là trung điểm BC . Tính $|\vec{AB} + \vec{BM}|$. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**



Ta có: $|\vec{AB} + \vec{BM}| = |\vec{AM}| = AM$.

Theo định lí Py-ta-go: $AM^2 = AB^2 + BM^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow AM = a\sqrt{5}$

Vậy $|\vec{AB} + \vec{BM}| = AM = \sqrt{5} \approx 2$

» **Câu 51.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2 , M là trung điểm BC . Tính $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 6**

Ta có: $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = (\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{AC}$

Gọi E đối xứng với A qua C , suy ra $\vec{AC} = \vec{CE}$.

Khi đó: $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{CE} = \vec{AE}$.

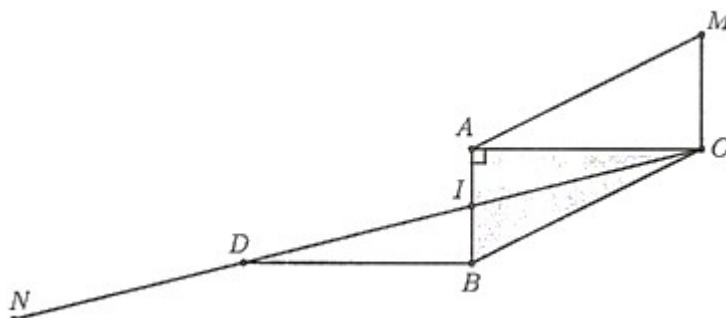
Ta có: $AE = 2AC = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (do AC là đường chéo của hình vuông cạnh $2a$).

Vậy $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = AE = 4\sqrt{2} \approx 6$.

» **Câu 52.** Cho tam giác vuông ABC có các cạnh góc vuông là $AB=1, AC=2$. Điểm M thỏa mãn $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{AM}$. Tính độ dài vectơ $\vec{AM}$? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2,2**



Ta có: $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{AM} \Leftrightarrow \vec{BC} = \vec{AM}$.

Vẽ hình bình hành $ABCM$, ta có điểm M thỏa mãn.

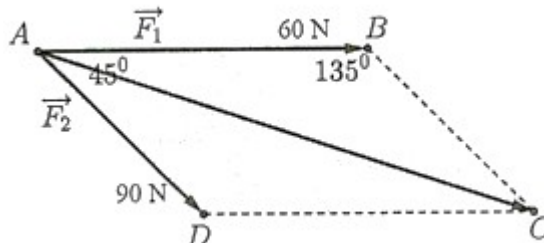


Ta có: $|\vec{AM}| = AM = BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,2$

» **Câu 53.** Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có điểm đặt A tạo với nhau góc 45° , biết rằng cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ lần lượt bằng $60N, 90N$. Tính cường độ tổng hợp của hai lực trên? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 139**



Đặt $\vec{F}_1 = \vec{AB}, \vec{F}_2 = \vec{AD}$.

Vẽ hình bình hành $ABCD$.

Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.

Vì $\angle BAD = 45^\circ \Rightarrow \angle ABC = 135^\circ$; $AD = 90 = BC$

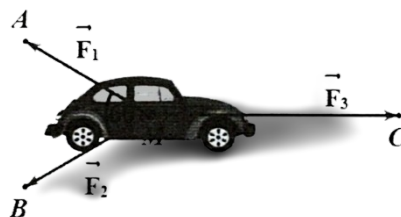
Theo định lí cosin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 135^\circ$$

$$= 60^2 + 90^2 - 2 \cdot 60 \cdot 90 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \approx 19336,75 \Rightarrow AC \approx 139$$

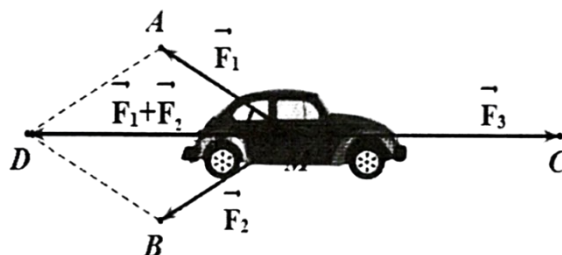
Vậy vector hợp lực của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có độ lớn là: $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| \approx 139N$.

» **Câu 54.** Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}, \vec{F}_2 = \vec{MB}, \vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một ô tô tại điểm M và ô tô đứng yên. Cho biết cường độ hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng $25N$ và góc $\angle AMB = 60^\circ$. Khi đó cường độ $\vec{F}_3$ đạt bao nhiêu niuton? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 43,3**



Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MD}$ (với D là điểm sao cho $AMBD$ là hình bình hành)



Ta có: $MA \neq \vec{MA} = \vec{F_1} = 25N$ và $MB \neq \vec{MB} = \vec{F_2} = 25N$

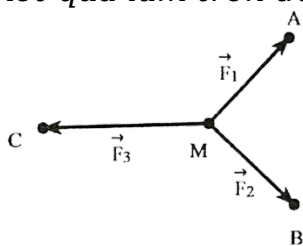
Do $\angle AMB = 60^\circ$ nên $\triangle MAB$ là tam giác đều. Khi đó: $MD = 2 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}(N)$

Do ô tô đứng yên nên cường độ lực tác dụng lên ô tô bằng 0 hay $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$

Suy ra: $\vec{F_3} = -(\vec{F_1} + \vec{F_2}) \Rightarrow |\vec{F_3}| = |-(\vec{F_1} + \vec{F_2})| = |\vec{DM}| = MD = 25\sqrt{3}(N)$

Vậy cường độ của $\vec{F_3}$ là $25\sqrt{3}(N) \approx 43,3(N)$

» **Câu 55.** Cho ba lực $\vec{F_1} = \vec{MA}, \vec{F_2} = \vec{MB}, \vec{F_3} = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ đều bằng $100N$ và góc $\angle AMB = 90^\circ$. Khi đó tính cường độ của lực $\vec{F_3}$. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



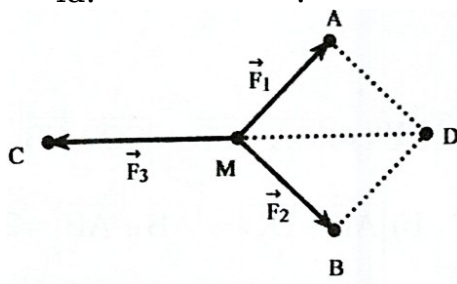
👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 141**

Vẽ hình vuông $ADBM$, cạnh $MA = 100$ thì $MD = 100\sqrt{2}$.

Theo qui tắc hình bình hành có $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MD}$. Vật đứng yên khi $\vec{F_3} = -\vec{MD}$.

Suy ra cường độ của lực $\vec{F_3}$ là: $|\vec{F_3}| = 100\sqrt{2}N$



----- Hết -----