

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

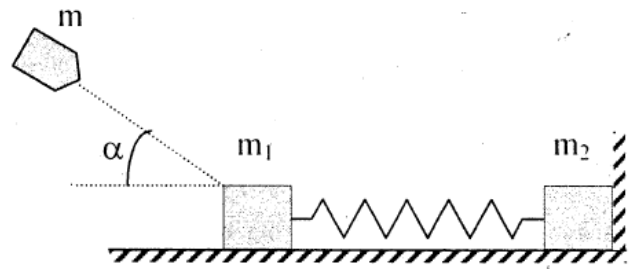
Chuyên đề 4. SỰ VA CHẠM CÁC VẬT

33. Hai vật nặng có khối lượng $m_1 = 10\text{kg}$ và $m_2 = 20\text{kg}$ được mắc vào hai đầu của lò xo có khối lượng không đáng kể, độ cứng của lò xo là $k = 100(\text{N} / \text{m})$. Vật nặng m_2 được đặt tựa vào tường thẳng đứng. Hệ được đặt trên mặt phẳng nằm ngang như hình vẽ. Hệ số ma sát giữa mặt phẳng và hai vật là như nhau và có giá trị $\mu = 0,1$. Ban đầu hệ ở trạng thái cân bằng, lò xo không biến dạng. Một viên đạn có khối lượng $m = 1\text{kg}$ bay với vận tốc $v_0 = 10(\text{m} / \text{s})$ hợp với phương ngang góc $\alpha = 30^\circ$ đến cắm vào vật m_1 . Giả sử lực tương tác giữa m và m_1 rất lớn so với trọng lực của chúng. Coi thời gian va chạm đủ nhỏ để lò xo chưa kịp biến dạng trong quá trình xảy ra va chạm

Lấy $g = 10(\text{m} / \text{s}^2)$

- Xác định vận tốc của vật m_1 ngay sau va chạm
- Xác định độ biến dạng cực đại của lò xo
- Trong quá trình hệ chuyển động vật m_2 có dịch chuyển không?

(Trích đề thi Trại hè Hùng vương, 2014)



Bài giải

- Vận tốc của vật m_1 ngay sau khi va chạm

- Động lượng của hệ hai vật " m và m_1 ":

+ Trước va chạm: $p_x = mv_0 \cos \alpha$; $p_y = mv_0 \sin \alpha$

+ Sau va chạm: $p_x' = (m + m_1)v_1$; $p_y' = 0$

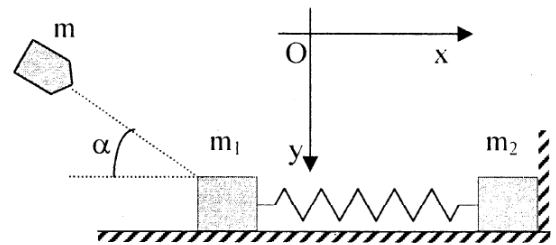
- Độ biến thiên động lượng của hệ phương Oy :

$$\Delta p_y = p_y' - p_y = -mv_0 \sin \alpha$$

- Trong quá trình va chạm hệ chịu tác dụng của trọng lực và phản lực $\vec{F}$ của mặt phẳng ngang. Phản lực này có thể phân tích thành hai thành phần: thành phần pháp tuyến F_y và lực ma sát F_{ms} . Theo dữ kiện bài toán, ta thấy $F \gg F_y$ và $F \gg P$

- Áp dụng định lý biến thiên động lượng theo phương Oy , ta được:

$$F_y + (m_1 + m_2)g = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = -\frac{mv_0 \sin \alpha}{\Delta t}$$



- Vì $F_y \gg P$ nên: $F_y = -\frac{mv_0 \sin \alpha}{\Delta t}$

- Áp dụng định lí biến thiên động lượng theo phương Ox , ta được: $\Delta p_x = F_{ms} \Delta t$

Ta có: $\Delta p_x = (m + m_1)v_1 - mv_0 \cos \alpha; F_{ms} = \mu F_y$

$$\Leftrightarrow (m + m_1)v_1 - mv_0 \cos \alpha = -\mu mv_0 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{mv_0 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m + m_1} = \frac{1.10 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.1 \cdot \frac{1}{2} \right)}{1 + 10} = 0.74 (m/s)$$

Vậy: Vận tốc của vật m_1 ngay sau khi va chạm là $v_1 = 0.74 (m/s)$

b) Độ biến dạng cực đại của lò xo

Sau khi tương tác hệ vật chuyển động chịu tác dụng của lực ma sát nên cơ năng của hệ giảm dần vì vậy độ biến dạng cực đại của lò xo chính là độ nén cực đại của lò xo ngay sau thời điểm va chạm. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có:

$$\frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu(m + m_1)gx$$

$$50x^2 + 11x - 3.01 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 15.9cm \\ x = -37.9cm \end{cases}$$

Vậy: độ biến dạng (nén) cực đại của lò xo trong quá trình hệ dao động là $x_{\max} = 15.9cm$

c) Vật m_2 có dịch chuyển không

Giả sử sau khi lò xo bị nén cực đại, vật m và m_1 dịch chuyển sang trái tới vị trí lò xo biến dạng một đoạn x thì dừng lại. Trong quá trình này ta giả sử vật m_2 vẫn đứng yên. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có:

$$\frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu(m + m_1)(x_{\max} + x)$$

$$50x^2 + 1.1x - 1.098 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 13.7cm \\ x = -15.9cm \end{cases}$$

- Như vậy, khi lò xo bị dãn ra một đoạn $13.7cm$ thì vật m và m_1 dừng lại. Tại vị trí này lực đàn hồi của lò xo là:

$$F_{dh} = kx = 100 \cdot 0.137 = 13.7N$$

- Mặt khác, để vật m_2 dịch chuyển sang trái thì:

$$F_{dh} \geq F_{msn(\max)} = \mu m_2 g = 0.1 \cdot 20 \cdot 10 = 20N > 13.7N$$

Vậy: Trong suốt quá trình chuyển động của m và m_1 thì m_2 vẫn đứng yên.

34. Vật nhỏ có khối lượng m_1 chuyển động với vận tốc v_1 từ A đến va chạm đàn hồi với vật m_2 ($m_2 < m_1$) đang đứng yên ở B trên sàn ngang. Sau va chạm m_1 có vận tốc v_1' , v_2' hợp với v_1 góc α . Xác định tỉ số $\frac{v_1'}{v_1}$ ứng với trường hợp góc lệch α lớn nhất. Bỏ qua mọi ma sát

Bài giải

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ " m_1 và m_2 ", ta được:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$\Leftrightarrow p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos \alpha \quad (1)$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta được: $W_1 = W_1' + W_2'$

$$\text{Mặt khác: } W = \frac{p^2}{2m} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} p_2'^2 = p_1^2 - p_1'^2 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2): } \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) p_1^2 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) p_1'^2 = 2p_1p_1' \cos \alpha$$

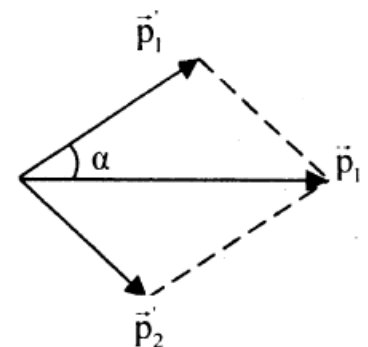
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) + x \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 2 \cos \alpha, \left(x = \frac{v_1'}{v_1}\right)$$

$$\text{Góc lệch } \alpha = \alpha_{\max} \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \alpha_{\min}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) + x \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}$$

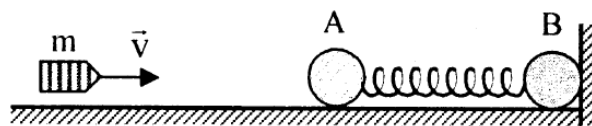
$$\text{Vậy: Góc lệch } \alpha \text{ lớn nhất khi } x = \frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}$$



35. Hai khối A và B có khối lượng $m_A = 9\text{kg}$ và $m_B = 40\text{kg}$ đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Hệ số ma sát giữa mặt phẳng ngang và mỗi khối đều là $\mu = 0,1$. Hai khối được nối với nhau bằng lò xo nhẹ, độ cứng $k = 150(\text{N} / \text{m})$. Khối B dựa vào tường thẳng đứng. Ban đầu hai khối nằm yên và lò xo không biến dạng. Một viên đạn có khối lượng $m = 1\text{kg}$ bay theo phương ngang với vận tốc v đến cắm vào trong khối A . Lấy $g = 10(\text{m} / \text{s}^2)$

a) Cho $v = 10(m/s)$. Tìm độ co lớn nhất của lò xo

b) Viên đạn phải có vận tốc là bao nhiêu thì khối B có thể dịch chuyển sang trái?



Bài giải

a) Độ co lớn nhất của lò xo

Gọi x là độ co lớn nhất của lò xo

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ " m và m_A " ta được:

$$mv = (m + m_A)v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{mv}{m + m_A} = \frac{1 \cdot 10}{1 + 9} = 1(m/s)$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho hệ cho quá trình từ lúc va chạm đến lúc lò xo có độ co cực đại, ta được:

$$\frac{1}{2}(m + m_A)v_0^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \mu(m + m_A)gx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + 9) \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 150x^2 = 0,1(1 + 9) \cdot 10x$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0,2m$$

Vậy: độ co lớn nhất của lò xo là $x = 0,2m$

b) Vận tốc của viên đạn để khối B có thể dịch chuyển sang trái

Gọi v' là vận tốc viên đạn để B có thể dịch chuyển sang trái; x' là độ co của lò xo khi B bắt đầu dịch chuyển sang trái

Để B có thể dịch chuyển sang trái thì lò xo phải dãn một đoạn ít nhất là x_0 sao cho:

$$F_{dh} = F_{msB} \Leftrightarrow kx_0 = \mu m_B g \Leftrightarrow 150x_0 = 40 \Rightarrow x_0 = \frac{4}{15}m$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho hệ, ta được:

$$\frac{1}{2}kx'^2 = \mu(m + m_A)g(x' + x_0) + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 150x'^2 = 0,1(1 + 9) \cdot 10 \left(x' + \frac{4}{15} \right) + \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot \left(\frac{4}{15} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 75x'^2 - 10x' - 8 = 0 \Rightarrow x' = 0,4m$$

$$\text{và: } \frac{1}{2}(m + m_A)v_0'^2 - \frac{1}{2}kx'^2 = \mu(m + m_A)gx'$$

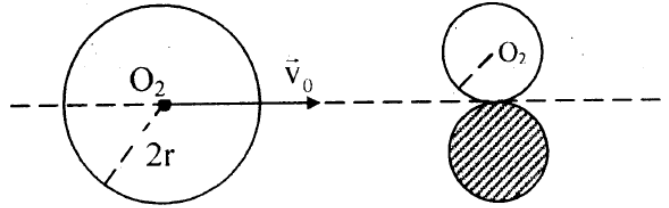
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + 9)v_0'^2 - \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 0,4^2 = 0,1(1 + 9) \cdot 10 \cdot 0,4 \Rightarrow v_0' = \frac{4\sqrt{5}}{5}(m/s)$$

Mặt khác:

$$mv' = (m + m_A)v_0' \Rightarrow v' = \frac{(m + m_A)v_0'}{m} = \frac{(1 + 9) \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5}}{1} = 8\sqrt{5} (m/s)$$

Vậy: để khối B có thể dịch chuyển sang trái thì viên đạn phải có vận tốc $v' = 8\sqrt{5} (m/s)$

36. Hai quả cầu nhỏ đàn hồi, bán kính r nằm tiếp xúc với nhau trên một mặt phẳng nằm ngang nhẵn. Quả cầu đàn hồi thứ ba bán kính $2r$ trượt với vận tốc v_0 cũng theo mặt phẳng này, cùng một lúc va chạm vào hai quả cầu (hình vẽ)



Hãy tính vận tốc của quả cầu lớn sau va chạm. Tất cả quả cầu được làm từ cùng một kim loại

Bài giải

Khối lượng hai quả cầu nhỏ: $m_3 = m_2 = D \frac{4}{3} \pi r^3$

Khối lượng quả cầu lớn: $m_1 = D \frac{4}{3} \pi (2r)^3 = 8m_2$

Tại thời điểm va chạm, có các lực tác dụng lên quả cầu nhỏ hướng dọc theo đường nối tâm của chúng và tâm của quả cầu lớn. Vì vậy, sau va chạm các quả cầu nhỏ chuyển động theo phương của các đường nối này với $v_2 = v_3$, quả cầu lớn chuyển động theo phương cũ (hình vẽ)

Theo định luật bảo toàn động lượng, ta có:

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 \quad (1)$$

Chiếu (1) lên trục Ox , ta được:

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos \alpha + m_3 v_3 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow m_1 v_0 = m_1 v_1 + \frac{1}{4} m_1 v_2 \cos \alpha$$

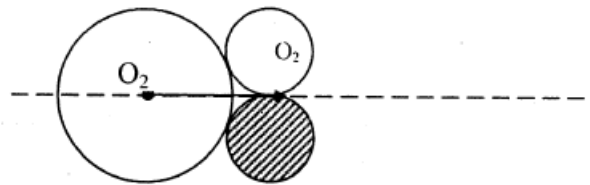
$$\Rightarrow v_0 = v_1 + \frac{1}{4} v_2 \frac{2\sqrt{2}}{3} = v_1 + v_2 \frac{\sqrt{2}}{6} \quad (2)$$

$$(\sin \alpha = \frac{OO_2}{O_1O_2} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}; \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3})$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng, ta có:

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{8} m_1 v_2^2$$

$$\Rightarrow 4v_0^2 = 4v_1^2 + v_2^2 \quad (3)$$



Từ (2) và (3): $v_1 = \frac{7v_0}{11}$ và $v_2 = \frac{12\sqrt{2}v_0}{11}$

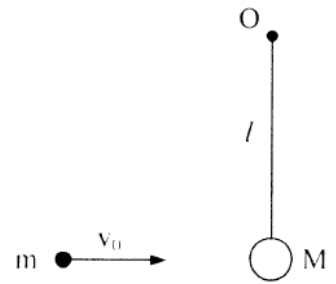
Vậy: vận tốc của quả cầu lớn sau va chạm là $v_1 = \frac{7v_0}{11}$

37. Một quả cầu nhỏ khối lượng $M = 100g$ treo vào đầu sợi dây lý tưởng, chiều dài $l = 20cm$ như hình vẽ. Dùng một vật nhỏ khối lượng $m = 50g$ có tốc độ v_0 bắn vào M . Bỏ qua sức cản của không khí. Lấy $g = 10(m/s^2)$. Coi va chạm là tuyệt đối đàn hồi

a) Xác định v_0 để vật M lên đến vị trí dây treo nằm ngang

b) Xác định giá trị tối thiểu của v_0 để vật M chuyển động tròn xung quanh điểm O

c) Xác định chuyển động của vật M sau va chạm nếu $v_0 = \frac{3\sqrt{7}}{2}(m/s)$



Bài giải

a) Xác định v_0 để M lên đến vị trí dây treo nằm ngang

Gọi v_1 và v_2 là vận tốc của các vật ngay sau va chạm. Vì va chạm là tuyệt đối đàn hồi nên động lượng và động năng của hệ hai vật m và M bảo toàn:

$$\begin{cases} mv_0 = mv_1 + Mv_2 \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow v_2 = \frac{2m}{m+M}v_0 \quad (1)$$

Khi dây nằm ngang:

$$\frac{Mv_2^2}{2} = Mgl \Rightarrow v_0 = \frac{m+M}{m} \sqrt{\frac{gl}{2}} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \frac{0,05 + 0,1}{0,05} \sqrt{\frac{10 \cdot 0,2}{2}} = 3(m/s)$$

Vậy: để M lên đến vị trí dây treo nằm ngang thì $v_0 = 3(m/s)$

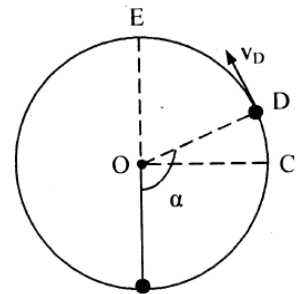
b) Giá trị tối thiểu của v_0 để vật M chuyển động tròn xung quanh điểm O

Gọi v_E là vận tốc vật M tại vị trí cao nhất E , ta có:

$$mg + T = \frac{mv_E^2}{r} \Rightarrow T = \frac{mv_E^2}{r} - mg$$

Để vật quay hết vòng tròn:

$$T \geq 0 \Leftrightarrow \frac{mv_E^2}{r} - mg \geq 0 \Rightarrow v_E \geq \sqrt{gl} \quad (3)$$



Theo định luật bảo toàn cơ năng, ta có:

$$\frac{1}{2} M v_2^2 = M g \cdot 2l + \frac{1}{2} M v_E^2 \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) ta được:

$$v_0 \geq \frac{m+M}{m} \sqrt{5gl} = \frac{0,05+0,1}{0,05} \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 0,2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} (m/s)$$

Vậy: để M chuyển động tròn xung quanh điểm O thì $v_{0\min} = \frac{3\sqrt{10}}{2} (m/s)$

c) Xác định chuyển động của vật M sau va chạm nếu $v_0 = \frac{3\sqrt{7}}{2} (m/s)$

Với $v_0 = \frac{3\sqrt{7}}{2} (m/s) < v_{0\min}$ nên M không lên tới điểm cao nhất E của quỹ đạo tròn

Lực căng của dây: $T = \frac{mv^2}{l} + mg \cos \alpha$

+ Khi $T=0$ thì M bắt đầu rời quỹ đạo tròn tại D với vận tốc $v_D = \sqrt{-gl \cos \alpha}$

+ Từ D , vật M chuyển động như vật bị ném xiên. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, ta được:

$$\frac{1}{2} M v_2^2 = M g l (1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2} M v_D^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} M v_2^2 = M g l (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} M g l \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} M v_2^2 = M g l (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} M g l \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{v_2^2}{gl} \right) \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{3} \left(2 - \frac{v_2^2}{gl} \right)$$

$$\text{Mặt khác, từ (1): } v_2 = \frac{2 \cdot 0,05}{(0,05+0,1)} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7} (m/s)$$

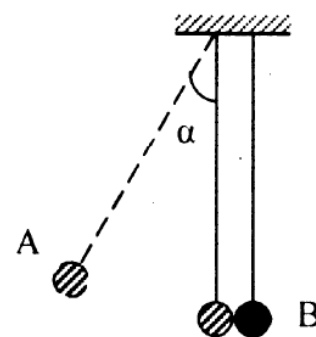
$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{3} \left(2 - \frac{7}{10 \cdot 0,2} \right) = 120^\circ \text{ và } v_D = \sqrt{-10 \cdot 0,2 \cdot \cos 120^\circ} = 1 (m/s)$$

Vậy: sau va chạm nếu $v_0 = \frac{3\sqrt{7}}{2} (m/s)$ thì chuyển động của M là:

+ Chuyển động theo quỹ đạo tròn đến $D (\alpha = 120^\circ)$ thì rời quỹ đạo

+ Từ D , M chuyển động như vật bị ném xiên, vận tốc ban đầu (tại D) là $v_D = 1 (m/s)$

38. Hai quả cầu A và B , khối lượng m_1, m_2 được treo bằng sợi dây không dẫn dài bằng nhau, khối lượng không đáng kể, sao cho ở vị trí cân bằng A và B chạm vào nhau như hình vẽ. Kéo A ra khỏi vị trí cân bằng sao cho dây treo nó lệch một góc α so với phương thẳng đứng rồi buông ra



Tìm sự phụ thuộc vào tỉ số $k = \frac{m_2}{m_1}$ của góc lệch cực đại của dây treo quả cầu sau

khí chúng va chạm nhau. Coi va chạm là hoàn toàn đàn hồi

Bài giải

Gọi v_0 là vận tốc của A trước khi va chạm; v_1, v_2 là vận tốc của A, B sau va chạm; h_1, h_2 là độ cao của A, B sau va chạm; α_1, α_2 là góc lệch cực đại của dây treo A, B sau va chạm

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho A tại điểm thả vật và điểm va chạm với B , ta có:

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g l (1 - \cos \alpha) \Rightarrow v_0^2 = 2 g l (1 - \cos \alpha)$$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và động năng cho hệ " A và B " trước và sau va chạm, ta được:

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_0 = \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right) v_0; v_2 = \left(\frac{2 m_1 v_0}{m_1 + m_2} \right) = \left(\frac{2 v_0}{1 + k} \right)$$

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^2 \frac{v_0^2}{2g} = \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^2 l (1 - \cos \alpha); h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{4l(1 - \cos \alpha)}{(1 + k)^2}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{l - h_1}{l} = 1 - \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^2 (1 - \cos \alpha); \cos \alpha_2 = \frac{l - h_2}{l} = 1 - \frac{4(1 - \cos \alpha)}{(1 + k)^2}$$

Xét các trường hợp đặc biệt:

a) Nếu $m_1 \ll m_2 : k = \frac{m_2}{m_1} \rightarrow \infty : \cos \alpha_1 = \cos \alpha$ và $\cos \alpha_2 = 1$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha; \alpha_2 = 0 : B$ vẫn đứng yên còn A nảy lên độ cao ban đầu

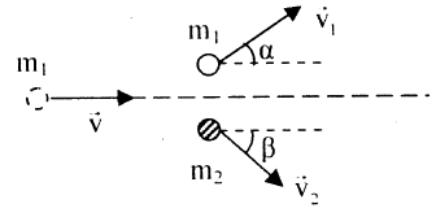
b) Nếu $m_1 = m_2 : k = \frac{m_2}{m_1} = 1 : \cos \alpha_2 = \cos \alpha, \cos \alpha_1 = 1$

$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha; \alpha_1 = 0 : A$ đứng yên còn B chuyển động như A ban đầu

c) Nếu $m_1 \gg m_2 \Rightarrow k = \frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0 : \cos \alpha_1 = \cos \alpha; \cos \alpha_2 = 4 \cos \alpha - 3 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha$

39. Một hạt khối lượng m_1 chuyển động với vận tốc v đến va chạm hoàn toàn đàn hồi với hạt $m_2 (m_2 < m_1)$ ban đầu đứng yên (hình vẽ). Xác định góc lệch lớn nhất của hạt m_1 so với phương ban đầu sau va chạm

Xét trường hợp riêng $m_1 = m_2$



Bài giải

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng, ta được:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m v \quad (1)$$

Chiếu (1) lên hai trục tọa độ Ox và Oy, ta được:

$$\begin{cases} m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta = m v \\ m_1 v_1 \sin \alpha + m_2 v_2 \sin \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m_2 v_2)^2 \cos^2 \beta = (m v - m_1 v_1 \cos \alpha)^2 \\ (m_2 v_2)^2 \sin^2 \beta = (m_1 v_1)^2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ trên vế theo vế, ta được:

$$m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v_1^2 - 2 m_1^2 v v_1 \cos \alpha = m_1 m_2 v^2 \quad (2)$$

Mặt khác, theo định luật bảo toàn cơ năng, ta có:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

$$\Leftrightarrow m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \Leftrightarrow m_2^2 v_2^2 = m_1 m_2 v^2 - m_1 m_2 v_1^2 \quad (3)$$

Từ (2) và (3): $m_1^2 v^2 + m_1^2 v_1^2 - 2 m_1^2 v v_1 \cos \alpha = m_1 m_2 v^2 - m_1 m_2 v_1^2$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2) v_1^2 - 2 m_1 v \cos \alpha v_1 + (m_1 - m_2) v^2 = 0 \quad (4)$$

Đề bài toán cơ ý nghĩa, phương trình bậc hai theo v_1 phải có nghiệm, tức là:

$$\Delta' = m_1^2 v^2 \cos^2 \alpha - (m_1^2 - m_2^2) v^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \geq 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2} \Rightarrow \sin \alpha \leq \frac{m_2}{m_1}$$

$$\text{Từ đó: } \alpha = \alpha_{\max} \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin \alpha_{\max} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \alpha = \alpha_{\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}$$

$$\text{Trường hợp: } m_1 = m_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, v_1 \perp v$$

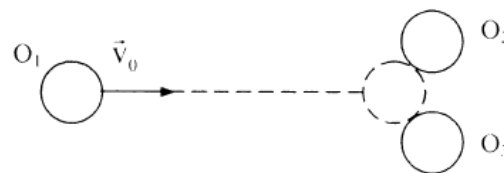
Vậy: góc lệch lớn nhất của hạt m_1 so với phương ban đầu sau va chạm là $\alpha_{\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}$

40. Ba vòng đệm nhỏ giống nhau O_1, O_2, O_3 nằm yên trên sàn ngang nhẵn. Truyền vận tốc v_0 cho O_1 đến va chạm đồng thời với O_2 và O_3 . Giả sử va chạm tuyệt đối đàn hồi, khoảng cách O_2O_3 bằng k lần đường kính mỗi vòng

a) Tính giá trị của k để ngay sau va chạm thì O_1 dừng lại, đổi ngược lại, tiếp tục chuyển động theo hướng ban đầu

b) Nhận xét gì về chuyển động sau va chạm nếu: $k=1, k=2$?

(Trích đề thi Plympic 30/4, 1995)



Bài giải

a) Giá trị của k để ngay sau va chạm thì O_1 dừng lại, đổi ngược lại, tiếp tục chuyển động theo hướng ban đầu

Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ lần lượt là vector vận tốc của các vòng ngay sau va chạm. Xét hệ kín " O_1, O_2 và O_3 "; va chạm của các vật là tuyệt đối đàn hồi

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn động năng cho hệ trước và sau va chạm, ta được:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 \quad (2)$$

Từ (1), ta được: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_0$; do tính đối xứng của hệ nên: $v_2 = v_3 = v$

$$\Rightarrow v_1 + 2v \cos \alpha = v_0 \Leftrightarrow v_0 - v_1 = 2v \cos \alpha \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), ta được: } 2mv^2 + m_1^2 = mv_0^2 \Rightarrow v_0^2 - v_1^2 = 2v^2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4), ta được: } v = \frac{2v_0 \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}; v_1 = v_0 \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha} \quad (5)$$

$$\text{Theo đề: } O_2O_3 = k \cdot 2R \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\frac{O_2O_3}{2}}{R} = \frac{\frac{k \cdot 2R}{2}}{2R} = \frac{k}{2} \quad (\text{với } k \leq 2)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{k^2}{4} \quad (6)$$

$$\text{Thay (6) vào (5) ta được: } v_1 = v_0 \frac{1 - 2 \left(1 - \frac{k^2}{4} \right)}{1 + 2 \left(1 - \frac{k^2}{4} \right)} = v_0 \frac{k^2 - 2}{6 - k^2} \quad (7)$$

Từ (7) ta có:

+ Để O_1 dừng lại ngay sau va chạm: $v_1 = 0 \Rightarrow k = \sqrt{2}$

+ Để O_1 dội ngược lại ngay sau va chạm: $v_1 < 0 \Rightarrow k < \sqrt{2}$

+ Để O_1 tiếp tục đi tới sau va chạm: $v_1 > 0 \Rightarrow k > \sqrt{2}$

Vậy: để O_1 dừng lại ngay sau va chạm thì $k = \sqrt{2}$; để O_1 dội ngược lại ngay sau va chạm thì $k < \sqrt{2}$; để O_1 tiếp tục đi tới sau va chạm thì $k > \sqrt{2}$

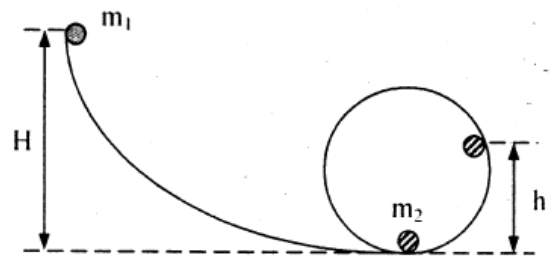
b) Nhận xét về chuyển động sau va chạm của hệ nếu $k=1, k=2$

Trường hợp $k=1$: Từ (5), (6) và (7), ta được: $v_1 = -\frac{v_0}{5}; v_2 = v_3 = \frac{2\sqrt{3}}{5}v_0; \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$: các vector $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ hợp với phương $\vec{v}_0$ góc 30°

Trường hợp $k=2$: Từ (5), (6) và (7), ta được: $v_1 = v_0; v_2 = v_3 = 0$; va chạm không xảy ra

41. Vật có khối lượng m_1 được thả không vận tốc đầu và trượt xuống một vòng xiếc có bán kính R . Tại điểm thấp nhất nó va chạm đàn hồi với vật có khối lượng m_2 đang đứng yên

Sau va chạm, m_2 trượt theo vòng xiếc đến độ cao h thì rời khỏi vòng xiếc ($h > R$). Vật m_1 giạt lùi trên máng nghiêng rồi lại trượt xuống, lên đến độ cao h thì cũng rời vòng xiếc. Tìm độ cao ban đầu H của m_1 và tính tỉ số $\frac{m_2}{m_1}$. Bỏ qua ma sát



(Trích đề thi Olympic 30/4, 1996)

Bài giải

Gọi v là vận tốc của m_1 ngay trước va chạm; v_1, v_2 là vận tốc của m_1 và m_2 ngay sau va chạm. Ta có:

$$m_1 g H = \frac{1}{2} m_1 v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g h; \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h$$

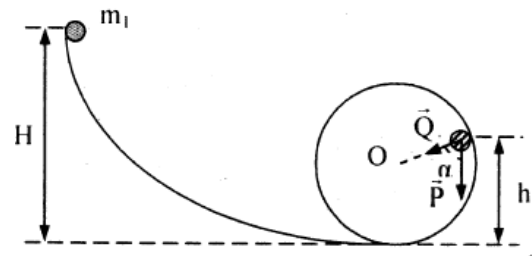
$$\Rightarrow v_1 = v_2 \quad (2)$$

Vì hệ hai vật là hệ kín và va chạm là đàn hồi nên:

+ Theo định luật bảo toàn động lượng, ta có:

$$m_1 v = m_2 v_2 - m_1 v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m_1 v}{m_2 - m_1} \quad (3)$$

+ Theo định luật bảo toàn động năng, ta có:



$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = v \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \quad (v_1 = v_2) \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta được: $\frac{m_1 v}{m_2 - m_1} = v \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 3$

Thay $m_2 = 3m_1$ vào (3), ta được: $v_1 = v_2 = \frac{m_1 v}{3m_1 - m_1} = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{2gH}}{2}$

Gọi M là điểm vật rời khỏi vòng xiếc, áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho m_2 tại hai điểm: điểm thấp nhất và điểm rời khỏi vòng xiếc, ta được:

$$\frac{m_2 v_2^2}{2} = m_2 gh + \frac{m_2 v_M^2}{2} \Rightarrow v_2^2 = v_M^2 + 2gh \quad (5)$$

Tại M , với m_2 , ta có: $\vec{Q} + \vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2 \quad (6)$

Chiếu (6) xuống phương hướng tâm, ta được: $Q + m_2 g \cos \alpha = m_2 \frac{v_M^2}{R}$

Vật rời khỏi vòng xiếc khi: $Q = 0 \Rightarrow v_M^2 = gR \cos \alpha$

Mặt khác: $\cos \alpha = \frac{h - R}{R} \Rightarrow v_M^2 = gR \cdot \frac{h - R}{R} = g(h - R) \quad (7)$

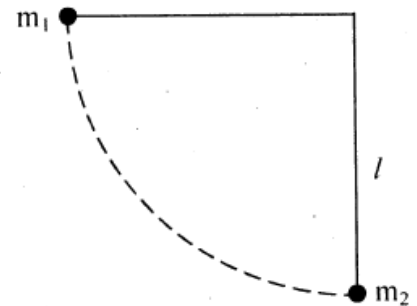
$$\Rightarrow \frac{gH}{2} = g(h - R) + 2gh = 3gh - gR \Rightarrow H = 2(3h - R)$$

Vậy: độ cao ban đầu của m_1 là $H = 2(3h - R)$ và tỉ số $\frac{m_2}{m_1} = 3$

42. Hai quả cầu nhỏ m_1, m_2 treo vào cùng một điểm bởi hai dây nhẹ, không dẫn, cùng chiều dài l . Ban đầu hệ có vị trí như hình vẽ. Buông để quả cầu m_1 chuyển động. Bỏ qua ma sát và lực cản

a) Tính vận tốc của m_1 ngay trước va chạm và vận tốc của m_1, m_2 ngay sau va chạm. Biết rằng va chạm là xuyên tâm, tuyệt đối đàn hồi

b) Trong thời gian va chạm, lực tổng hợp do hai dây tác dụng lên giá treo thay đổi trong khoảng giá trị nào? Lực tổng hợp này có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu và đạt được vào lúc nào?
(Trích đề thi Olympic 30/4, 1997)



Bài giải

a) Vận tốc của m_1 ngay trước va chạm và vận tốc của m_1, m_2 ngay sau va chạm

Gọi v là vận tốc quả cầu 1 ngay trước va chạm; v_1 và v_2 là vận tốc của quả cầu 1 và 2 ngay sau va chạm

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho quả cầu 1 tại hai vị trí: ban đầu và trước khi va chạm với quả cầu 2, ta được:

$$m_1 gl = \frac{1}{2} m_1 v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gl} \quad (1)$$

Vì hệ "hai quả cầu" là hệ kín và va chạm là đàn hồi nên:

+ Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ, ta được:

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (2)$$

+ Áp dụng định luật bảo toàn động năng, ta được:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta được: $v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2}; v_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \quad (4)$

Vậy: vận tốc của m_1 ngay trước va chạm là $v = \sqrt{2gl}$ và vận tốc của m_1, m_2 ngay sau va chạm là

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2}, v_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$$

b) Lực tổng hợp do hai dây tác dụng lên giá treo

Tại vị trí thấp nhất của quỹ đạo, các lực tác dụng vào hai quả cầu (trọng lực $\vec{P}$ và lực căng dây $\vec{T}$) coi như đều có phương thẳng đứng. Theo định luật II Niuton, ta có:

+ Quả cầu m_1 : $\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow T_1 = m_1 g + m_1 a_1 = m_1 \left(g + \frac{v_1^2}{l} \right)$

+ Quả cầu m_2 : $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 a_2 = m_2 \left(g + \frac{v_2^2}{l} \right)$

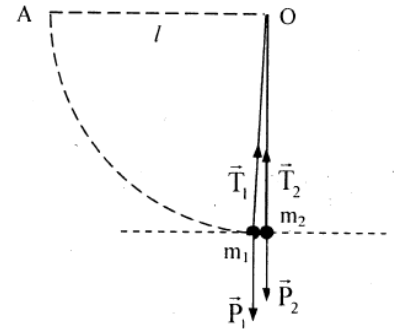
Trong tương tác hai quả cầu đều thu gia tốc. Vận tốc của m_1 biến thiên từ vị trí ban đầu v đến vị trí cuối cùng v_1 , vận tốc của m_2 biến thiên từ vị trí ban đầu 0 đến vị trí cuối cùng v_2 . Các lực căng dây cũng biến đổi và lực tổng hợp đặt lên giá đỡ là $F = T_1 + T_2$ cũng thay đổi

+ Lúc m_1 vừa rơi xuống tới B, ta có: $v_1 = v$ và $v_2 = 0$

$$T_1 = 3m_1 g, T_2 = m_2 g; F_1 = 3m_1 g + m_2 g = (3m_1 + m_2)g$$

+ Lúc hai quả cầu đã biến dạng tối đa, gọi V là vận tốc của hai quả cầu lúc này. Ta có:

$$(m_1 + m_2)V = m_1 v \Rightarrow V = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \quad (\text{định luật bảo toàn động lượng})$$



$$\text{và } T_1 = m_1 \left(g + \frac{V^2}{l} \right) = m_1 \left[g + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{v^2}{l} \right] = m_1 g \left[1 + 2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right];$$

$$T_2 = m_2 \left(g + \frac{V^2}{l} \right) = m_2 \left[g + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{v^2}{l} \right] = m_2 g \left[1 + 2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right]$$

$$F_2 = T_1 + T_2 = \left[m_1 + m_2 + 2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] g = \left(m_1 + m_2 + 2 \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right) g$$

Khi hai quả cầu tách rời nhau thì v_1 và v_2 có giá trị như trong (4), hợp lực đặt vào giá đỡ bây giờ là:

$$F_3 = T_1 + T_2 = m_1 \left(g + \frac{v_1^2}{l} \right) + m_2 \left(g + \frac{v_2^2}{l} \right)$$

$$\Leftrightarrow F_3 = \left(m_1 g + m_2 g + \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{l} \right) = \left(m_1 g + m_2 g + \frac{m_1 v^2}{l} \right) = (3m_1 + m_2) g$$

$$\Rightarrow F_3 = F_1$$

$$\forall \left(m_1 + m_2 + 2 \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right) g \leq (3m_1 + m_2) g$$

$$\Rightarrow F = F_{\min} = F_2 = \left(m_1 + m_2 + 2 \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right) g$$

Vậy: trong thời gian va chạm, lực tổng hợp do hai dây tác dụng lên giá treo thay đổi trong khoảng

$$F_2 \leq F \leq F_1 = F_3; \text{ lực tổng hợp này có giá trị nhỏ nhất là } F_{\min} = F_2 = \left(m_1 + m_2 + 2 \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right) g \text{ và đạt được}$$

vào lúc hai quả cầu biến dạng tối đa

43. Cho hai quả cầu tuyệt đối đàn hồi va chạm với nhau với vận tốc là v_1 và v_2 . Biện luận vận tốc của mỗi quả cầu sau va chạm. Cho biết va chạm là xuyên tâm. Giải bài toán trong hai trường hợp:

a) Vận tốc quả cầu thứ hai trước va chạm bằng 0

b) Khối lượng hai quả cầu bằng nhau

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1999)

Bài giải

Gọi v_1, v_2 là vận tốc hai quả cầu ngay trước va chạm, v_1', v_2' là vận tốc các quả cầu ngay sau va chạm. Hệ

"hai quả cầu" là hệ kín, va chạm là đàn hồi, xuyên tâm

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ, ta được:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\Leftrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (1)$$

Áp dụng định luật bảo toàn động năng ta được:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; v_2' = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

a) Trường hợp quả cầu thứ hai đứng yên trước va chạm ($v_2 = 0$), ta có:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

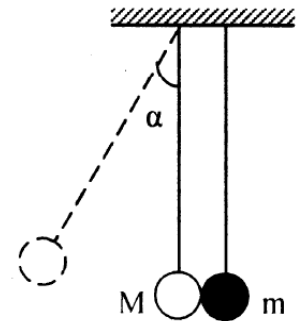
Nếu $m_1 > m_2$ ($v_1' > 0; v_2' > 0$): sau va chạm, quả cầu 1 tiếp tục tiến về phía trước nhưng với vận tốc nhỏ hơn, quả cầu 2 chuyển động cùng chiều với quả cầu 1

Nếu $m_1 < m_2$ ($v_1' < 0; v_2' > 0$): sau va chạm, quả cầu 1 chuyển động ngược lại, quả cầu 2 chuyển động theo hướng chuyển động của quả cầu 1 trước va chạm

b) Trường hợp $m_1 = m_2$, ta có: ($v_1' = 0$ và $v_2' = v_1$): sau va chạm, hai quả cầu trao đổi vận tốc cho nhau

44. Hai quả cầu treo tiếp xúc với nhau bằng các sợi dây dài bằng nhau. Khối lượng của quả cầu bên trái là M và khối lượng của cầu bên phải là m (hình vẽ). Kéo lệch quả cầu bên trái một góc α và thả ra. Sau khi va chạm vào nhau, quả cầu bên trái dừng lại, còn quả cầu bên phải lệch một góc β . Hãy thiết lập biểu thức liên hệ giữa góc lệch α_1 và β_1 của quả cầu bên trái và quả cầu bên phải sau lần va chạm thứ hai. Biết rằng sau mỗi lần va chạm có một tỉ lệ k của phần thế năng biến dạng của các quả cầu chuyển thành nhiệt

(trích đề thi Olympic 40/4. 1999)



Bài giải

Gọi v là vận tốc của quả cầu M ngay trước va chạm; v' là vận tốc quả cầu m ngay sau va chạm. Hệ "hai quả cầu" là hệ kín

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho M tại hai vị trí B và C, ta được:

$$\frac{1}{2} Mv^2 = Mgl(1 - \cos \alpha) \Rightarrow v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \quad (1)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho m tại hai vị trí C và D, ta được:

$$\frac{1}{2} mv'^2 = mgl(1 - \cos \beta) \Rightarrow v' = \sqrt{2gl(1 - \cos \beta)} \quad (2)$$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ trước và sau va chạm, ta được:

$$Mv = mv' \Leftrightarrow M\sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = m\sqrt{2gl(1 - \cos \beta)}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha}} \quad (3)$$

Gọi ΔW là phần cơ năng bị tiêu hao sau một lần va chạm;

W_i là thế năng biến dạng của các quả cầu; v_0 là vận tốc chung của hai quả cầu lúc chúng biến dạng tối đa, ta có:

$$Mgl(1 - \cos \alpha) = Mgl(1 - \cos \beta) + \Delta W \quad (4)$$

$$\Delta W = kW_i$$

$$Mv = (M + m)v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{M}{M + m}v \quad (\text{bảo toàn động lượng})$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}(M + m)v_0^2 + W_i \quad (\text{bảo toàn cơ năng})$$

$$\Rightarrow W_i = \frac{1}{2}Mv^2 \left(\frac{M}{M + m} \right)$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{1}{2}Mv^2 = Mgl(1 - \cos \alpha) \text{ nên } W_i = \frac{mM}{M + m}gl(1 - \cos \alpha) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \Delta W = kW_i = k \frac{mM}{M + m}gl(1 - \cos \alpha) \quad (6)$$

Sau lần va chạm thứ nhất, ta có:

$$Mgl(1 - \cos \alpha) = mgl(1 - \cos \beta) + k \frac{mM}{M + m}gl(1 - \cos \alpha)$$

$$\Leftrightarrow M(1 - \cos \alpha) = M \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \beta}}(1 - \cos \beta) + k \frac{mM}{M + m}(1 - \cos \alpha) \quad (7)$$

Sau lần va chạm thứ hai, ta có:

$$mgl(1 - \cos \beta) = Mgl(1 - \cos \alpha_1) + mgl(1 - \cos \beta_1) + k \frac{mM}{M + m}gl(1 - \cos \beta)$$

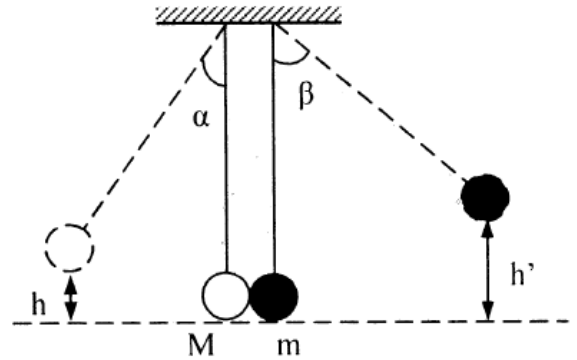
$$\Leftrightarrow m(1 - \cos \beta) = M(1 - \cos \alpha_1) + m(1 - \cos \beta_1) + k \frac{mM}{M + m}(1 - \cos \beta) \quad (8)$$

Mặt khác theo định luật bảo toàn động lượng cho hệ trong lần va chạm thứ hai, ta có:

$$mv' = Mv_1 + mv_2$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{2gl(1 - \cos \beta)} = M\sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_1)} + m\sqrt{2gl(1 - \cos \beta_1)}$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{1 - \cos \beta} = M\sqrt{1 - \cos \alpha_1} + m\sqrt{1 - \cos \beta_1} \quad (9)$$



Sau lần va chạm thứ nhất, quả cầu M dừng lại và $M < m \Rightarrow 1 - \cos \beta < 1 - \cos \alpha$

Đặt: $a = \sqrt{1 - \cos \alpha}$; $b = \sqrt{1 - \cos \beta}$; $x = \sqrt{1 - \cos \alpha_1}$; $y = \sqrt{1 - \cos \beta_1}$ với $a > b$

$$\text{Từ (3): } \frac{M}{m} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{m}{M+m} = \frac{a}{a+b} \Leftrightarrow \frac{mM}{M+m} = \frac{Ma}{a+b}$$

$$\text{Từ (7): } Ma^2 = M \frac{a}{b} b^2 + k \frac{Ma}{a+b} a^2 \Rightarrow a = b + k \frac{a^2}{a+b}$$

$$\Rightarrow k = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (10)$$

$$\text{Từ (8): } M \frac{a}{b} b^2 = Mx^2 + M \frac{a}{b} y^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{Ma}{a+b} b^2$$

$$\Rightarrow ab = x^2 + \frac{a}{b} y^2 + \frac{(a-b)b^2}{a} \quad (11)$$

$$\text{Từ (9): } M \frac{a}{b} b = Mx + M \frac{a}{b} y \Rightarrow y = \frac{b(a-x)}{a} \quad (12)$$

Thay giá trị của y từ (12) vào (11), ta được:

$$ab = x^2 + \frac{a}{b} \left(\frac{b(a-x)}{a} \right)^2 + \frac{(a-b)b^2}{a}$$

$$\Rightarrow x = b \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos \alpha_1} = \sqrt{1 - \cos \beta} \Rightarrow \alpha_1 = \beta$$

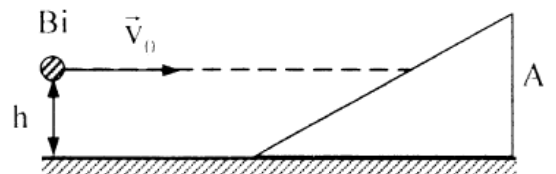
Từ đó, quan hệ giữa các góc α_1 và β_1 có thể biểu diễn qua hệ thức:

$$\sqrt{1 - \cos \beta_1} = \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha_1} (\sqrt{1 - \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha_1})}{\sqrt{1 - \cos \alpha}}$$

Vậy: hệ thức liên hệ giữa α_1 và β_1 là

$$\sqrt{1 - \cos \beta_1} = \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha_1} (\sqrt{1 - \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha_1})}{\sqrt{1 - \cos \alpha}}$$

45. Một nêm A có khối lượng M đặt trên mặt bàn nằm ngang. Cho hệ số ma sát giữa nêm và mặt bàn là k, góc $\alpha = 30^\circ$ (hình vẽ). Một viên bi khối lượng m đang bay với vận tốc v_0 (ở độ cao h so với bàn) đến chạm vào mặt nghiêng của nêm



Va chạm của bi vào nêm tuân theo định luật phản xạ gương và vận tốc bi sau va chạm có độ lớn $\frac{7v_0}{9}$

Hỏi sau khi va chạm viên bi lên tới độ cao tối đa là bao nhiêu (so với mặt bàn) và nê-m dịch ngang được một đoạn bao nhiêu?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2000)

Bài giải

Gọi O là điểm va chạm, hệ trục Oxy như hình vẽ; $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ là vận tốc bi ngay sau va chạm; $\vec{v}_A$ là vận tốc nê-m ngay sau va chạm

Theo phương ngang, động lượng của hệ "bi + nê-m" được bảo toàn nên:

$$mv_x + Mv_A = mv_0 \Rightarrow v_A = \frac{m}{M}(v_0 - v_x)$$

với:
$$\begin{cases} v_x = v \cos 2\alpha = \frac{7}{9}v_0 \cos 2\alpha \\ v_y = v \sin 2\alpha = \frac{7}{9}v_0 \sin 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{m}{M} \left(v_0 - \frac{7}{9}v_0 \cos 2\alpha \right) = \frac{mv_0}{M} \left(1 - \frac{7}{9} \cos 60^\circ \right) = \frac{11mv_0}{18M}$$

Độ lên cao tối đa của bi kể từ chỗ chạm với mặt nê-m là:

$$h_{\max} = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{\left(\frac{7}{9}v_0 \sin 2\alpha \right)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{7}{9}v_0 \sin 60^\circ \right)^2}{2g} = \frac{49v_0^2}{216g}$$

Độ lên cao tối đa của bi so với mặt bàn là: $H_{\max} = h_{\max} + h = \frac{49v_0^2}{216g} + h$

Gia tốc trượt ngang của nê-m là: $a = -\frac{F_{ms}}{M} = -\frac{kMg}{M} = -kg$

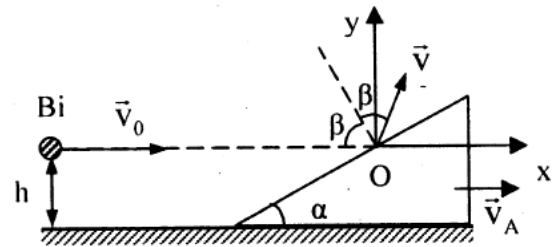
Quãng đường trượt ngang của nê-m là: $s = \frac{v_A^2}{2a} = \frac{\left(\frac{11mv_0}{18M} \right)^2}{2kg} = \frac{121m^2v_0^2}{648M^2kg}$

vậy: sau khi va chạm viên bi lên tới độ cao tối đa so với mặt bàn là $H_{\max} = \frac{49v_0^2}{216g} + h$ và nê-m dịch ngang

được một đoạn $s = \frac{121m^2v_0^2}{648M^2kg}$

46. Một bán cầu tâm O bán kính R đặt cố định trên mặt phẳng ngang. Một vật nhỏ trượt xuống không vận tốc đầu từ đỉnh A của bán cầu. Bỏ qua mọi ma sát và lực cản của không khí

a) Tìm biểu thức xác định vị trí $\alpha = \angle AOM$ cho biết tại M vật bắt đầu rời khỏi bán cầu

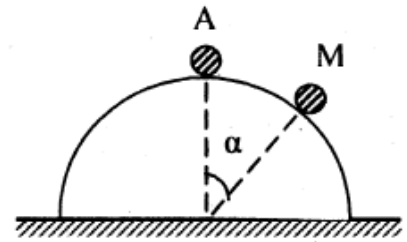


b) Khi rơi xuống đến đất, vật va chạm tuyệt đối đàn hồi với mặt đất và nảy lên. Tính theo R độ cao tối đa vật đạt được (so với mặt đất) sau va chạm

c) So sánh độ cao của vật tại A và độ cao cực đại sau va chạm. Vận dụng quan điểm về năng lượng để giải thích kết quả này

Ghi chú: trong va chạm tuyệt đối đàn hồi, vector vận tốc đập xuống và vector vận tốc nảy lên đối xứng nhau qua mặt phẳng va chạm

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2001)



Bài giải

a) Biểu thức xác định vị trí $\alpha = \angle AOM$

Áp dụng định luật II Newton cho vật: $\vec{P} + \vec{Q} = m\vec{a}$

Chiếu hệ thức vector trên xuống phương hướng tâm, ta được:

$$mg \cos \alpha - Q = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow Q = m \left(g \cos \alpha - \frac{v^2}{R} \right) \quad (1)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho vật tại hai điểm A và M, ta được:

$$mgR = mgR \cos \alpha + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gR(1 - \cos \alpha) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $Q = m \left(g \cos \alpha - \frac{2gR(1 - \cos \alpha)}{R} \right) = mg(3 \cos \alpha - 2)$

Khi vật rời mặt cầu tại B, ta có: $Q = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$ hay $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

Vậy: biểu thức xác định vị trí $\alpha = \angle AOM$ là $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

b) Độ cao tối đa vật đạt được (so với mặt đất) sau va chạm

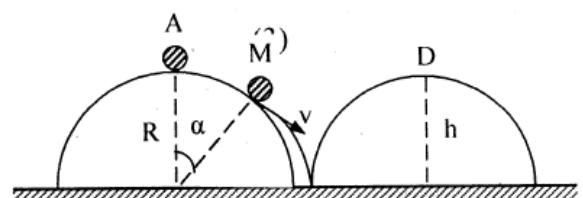
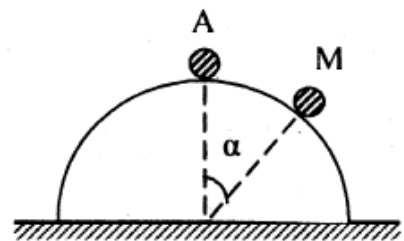
Tại B vật chuyển động như vật bị ném xiên xuống tới C rồi từ C vật cũng chuyển động như vật bị ném xiên lên tới D. Ta có: $v_D = v_M = v_x = v \cos \alpha$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho vật tại hai điểm A và D, ta được:

$$mgR = mgh + \frac{1}{2}mv_D^2 = mgh + \frac{mv^2 \cos^2 \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow h = R - \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{2g} = R - \frac{2v^2}{9g}$$

Mặt khác, từ (2) ta có:



$$v^2 = 2gR \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2gR}{3} \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được:
$$h = R - \frac{2v^2}{9g} = R - \frac{2 \cdot \frac{2gR}{3}}{9g} = \frac{23}{27}R$$

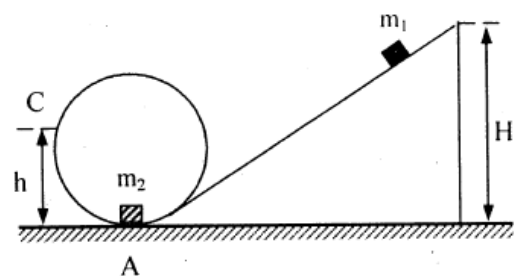
Vậy: độ cao tối đa vật đạt được (so với mặt đất) sau va chạm là $h = \frac{23}{27}R$

c) So sánh h_D và h_A . Giải thích $W_A = W_D$

Ta có: $v_A = 0, v_D > 0 \Rightarrow v_D > v_A$ nên $W_{d_D} > W_{d_A}$ và $W_{t_D} < W_{t_A} \Rightarrow h_D < h_A$

Vậy: độ cao của vật tại A cao hơn độ cao cực đại của vật sau va chạm: $h_A > h_D$

47. Một vật khối lượng m_1 được thả không vận tốc đầu và trượt trên một mặt phẳng nghiêng của một vòng xiếc có bán kính r . Ở điểm thấp nhất A của vòng xiếc, vật m_1 va chạm đàn hồi với vật có khối lượng m_2 đang đứng yên. Vật m_2 trượt theo vòng tròn đến độ cao $h (h > r)$ thì tách khỏi vòng tròn. Vật m_1 giạt lùi theo



mặt phẳng nghiêng rồi lại trượt xuống, tiếp tục trượt theo vòng tròn cũng đến độ cao h thì tách ra khỏi vòng tròn. Tính độ cao ban đầu H của m_1 . Bỏ qua mọi ma sát

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2002)

Bài giải

Chọn mốc tính thế năng tại A

Trước va chạm, m_1 có vận tốc v , với:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = m_1gH \quad (\text{bảo toàn cơ năng}) \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

Sau va chạm, m_1 và m_2 có vận tốc v_1' và v_2' , với:

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad (\text{bảo toàn động lượng})$$

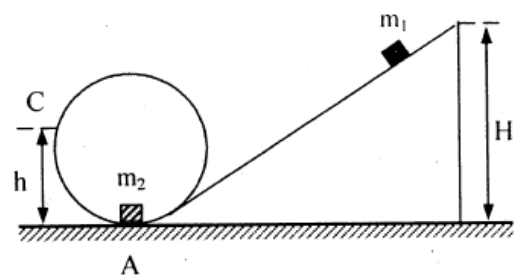
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (\text{bảo toàn động năng})$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1; v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

Sau va chạm m_2 đến C thì rời vòng tròn. Phương trình chuyển động của m_2 :

$$\overline{\overline{P}}_2 + \overline{\overline{Q}}_2 = m_2a \quad (3)$$

Chiếu (3) lên phương CO, chiều (+) hướng tâm, ta được:



$$m_2 g \cos \alpha + Q_2 = \frac{m_2 v_C^2}{r}, \text{ với } \cos \alpha = \frac{h-r}{r}$$

$$\text{Khi vật rời vòng tròn: } Q_2 = 0 \Rightarrow v_C^2 = g(h-r) \quad (4)$$

Mặt khác, theo định luật bảo toàn cơ năng, ta có: $W_A = W_C$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + m_2 gh \Rightarrow v_2'^2 = g(3h-r) \quad (5)$$

Vật m_1 sau khi giạt lùi và trượt xuống đến A có vận tốc $-v_2'$ tiếp tục lên vòng xiếc đến C lại rời vòng xiếc,

$$\text{suy ra: } -v_1' = v_2'$$

$$\text{Từ (2): } -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 3$$

$$\Rightarrow v_2'^2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 . 2gH \Rightarrow H = 2(3h-r) \quad (6)$$

$$\text{Thay (1), (5) vào (6): } \frac{v_1^2}{4} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 . 2gH \Rightarrow H = 2(3h-r)$$

Vậy: độ cao ban đầu của m_1 là $H = 2(3h-r)$

48. Một vật A chuyển động với vận tốc v_0 đến va chạm đàn hồi hoàn toàn với một vật B đang đứng yên tại

C. Sau va chạm vật B chuyển động trên máng đường tròn đường kính

$CD = 2R$. Một tấm phẳng (E) đặt vuông góc với CD tại tâm O của

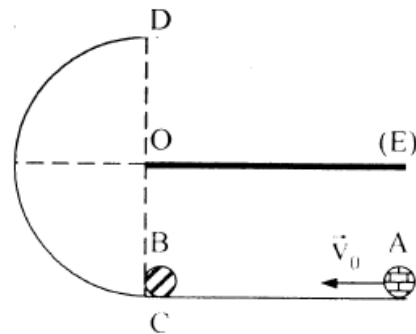
máng đường tròn

Cho khối lượng của hai vật bằng nhau. Bỏ qua mọi ma sát

1. Xác định vận tốc của vật B tại M mà ở đó vật bắt đầu rời máng

2. Cho $v_0^2 = 3,5Rg$. Hỏi vật B có thể rơi vào tấm E không? Nếu có hãy

xác định vị trí của B trên tấm E



Bài giải

1. Vận tốc của vật B tại M mà ở đó vật bắt đầu rời máng

Vì va chạm là hoàn toàn đàn hồi nên sau va chạm B chuyển động với vận tốc v_0 còn A đứng yên. Theo định luật bảo toàn cơ năng ta có:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgR(1 + \sin \alpha)$$

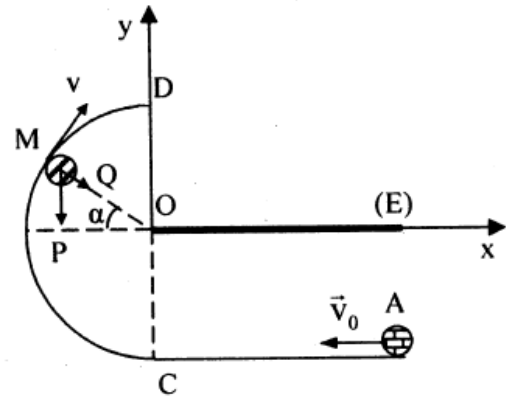
$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gR(1 + \sin \alpha)$$

Theo định luật II Newton ta có: $\vec{P} + \vec{Q} = m\vec{a}$

Chiếu hệ thức vectơ trên lên phương MO, chiều (+) hướng tâm, ta được:

$$mg \sin \alpha + Q = \frac{mv^2}{R}$$

Vật B rời khỏi máng tại M nên $Q = 0 \Leftrightarrow mg \sin \alpha = \frac{mv^2}{R}$



$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{v^2}{gR} = \frac{v_0^2 - 2gR(1 + \sin \alpha)}{gR} \Leftrightarrow gR \sin \alpha = v_0^2 - 2gR - 2gR \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{v_0^2 - 2gR}{3gR}$$

Vận tốc của B khi nó bắt đầu rời khỏi máng: $v^2 = v_0^2 - 2gR \left(1 + \frac{v_0^2 - 2gR}{3gR} \right)$

$$\Leftrightarrow v^2 = gR \sin \alpha = gR \frac{v_0^2 - 2gR}{3gR} = \frac{v_0^2 - 2gR}{3}, \text{ điều kiện: } 2Rg \leq v_0^2 \leq 5Rg$$

Vậy: vận tốc đầu của B khi nó bắt đầu rời khỏi máng là: $v = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gR}{3}}$

2. Vật có thể rơi vào tấm E không?

Khi vật rời khỏi máng

$$\sin \alpha = \frac{3,5gR - 2gR}{3gR} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ và } v_B = \sqrt{\frac{3,5gR - 2gR}{3}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$

Khi rời B, vật chuyển động như vật bị ném xiên với các phương trình:

$$x = (v \sin \alpha)t - R \cos \alpha$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + (v \cos \alpha)t + R \sin \alpha$$

Để B có thể tới (E) thì $x \geq 0 \Leftrightarrow (v \sin \alpha)t - R \cos \alpha > 0$

$$\Rightarrow t > \frac{R \cos \alpha}{v \sin \alpha} = \frac{R}{v} \cot \alpha = \frac{R}{\sqrt{\frac{gR}{2}}} \cdot \cot 30^\circ = \sqrt{\frac{6R}{g}} = 2,45 \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (1)$$

Khi chạm vào tấm (E): $y = 0 \Leftrightarrow gt_1^2 - 2(v \cos \alpha)t_1 - 2R \sin \alpha = 0$

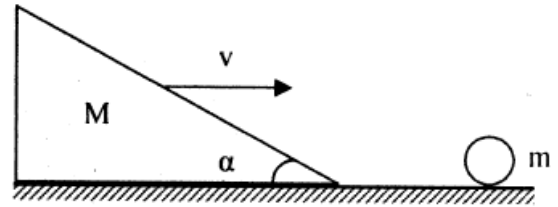
Phương trình bậc hai theo t_1 trên có nghiệm:

$$t_1 = \sqrt{\frac{R}{g}} \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2\sqrt{2}} \right) = 1,785 \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy: $t_1 < 2,45 \sqrt{\frac{R}{g}}$, nghĩa là B không rơi vào tấm (E)

Vậy: B không thể rơi vào tấm (E)

49. Trên mặt phẳng nằm ngang tuyệt đối nhẵn có một quả cầu khối lượng m . Một chiếc nêm khối lượng $M = \frac{m}{2}$ chuyển động với vận tốc $v = 5(m/s)$ đến va chạm tuyệt đối đàn hồi vào quả cầu, nhưng chiếc nêm không bị nảy lên. Bỏ qua mất mát năng lượng trong va chạm



Tính thời gian giữa lần va chạm đầu tiên và lần kế tiếp

Cho $g = 9,81(m/s^2)$; $\alpha = 30^\circ$

Bài giải

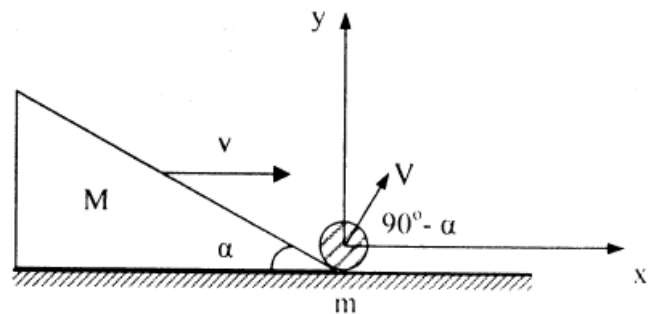
Lực của nêm tác dụng lên quả cầu có hướng tạo với mặt phẳng ngang một góc $(90^\circ - \alpha)$, còn hướng của $\Delta \vec{p}$ cùng hướng $\vec{F}$ ($\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$). Vì ban đầu quả cầu đứng yên, sau va chạm nó cũng có vận tốc tạo với mặt phẳng ngang một góc $(90^\circ - \alpha)$

Áp dụng định luật bảo toàn động năng và động lượng, ta được:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} m V^2 \\ M v = M v_1 + m V \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25 = 0,5 + V^2 \\ 5 = v_1 + V \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{5}{3}(m/s); V = \frac{10}{3}(m/s)$$



(v và v_1 là vận tốc của M trước và sau va chạm. V là vận tốc của m sau va chạm)

Xét chuyển động của M và m sau va chạm. Ta thấy

+ M chuyển động thẳng đều có vận tốc $\vec{v}_1$ hướng sang phải

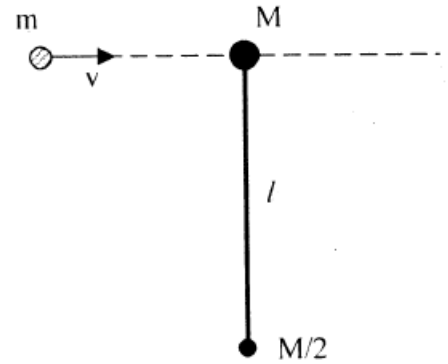
+ m chuyển động như vật bị ném xiên: $V_{ox} = V \sin \alpha = v_1$; $V_{oy} = V \cos \alpha$

+ m lại sẽ va chạm đúng vào mũi nệm sau thời gian: $t = \frac{2V_{oy}}{g}$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2V \cos \alpha}{g} = \frac{2 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9,81} \approx 0,6s$$

Vậy: thời gian giữa lần va chạm đầu tiên và lần kế tiếp là $t \approx 0,6s$

50. Một thanh cứng có chiều dài l , khối lượng không đáng kể, hai đầu gắn chặt với hai quả cầu nhỏ khối lượng M và $\frac{M}{2}$. Thanh được đặt nằm trên mặt bàn nhẵn nằm ngang. Một quả cầu nhỏ khối lượng $m (m < M)$, chuyển động với vận tốc v đến va chạm đàn hồi xuyên tâm với quả cầu M



Tìm tỉ số $\frac{M}{m}$ để sau khi va chạm lần thứ nhất với M , quả cầu m

tiếp tục va chạm với quả cầu $\frac{M}{2}$ ở phía bên phải vị trí va chạm lần đầu

Bài giải

Hệ "hai quả cầu M và m " là hệ kín, va chạm giữa m và M là va chạm đàn hồi nên động lượng và động năng của hệ bảo toàn:

$$mv = mv_1 + Mv_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \quad (2)$$

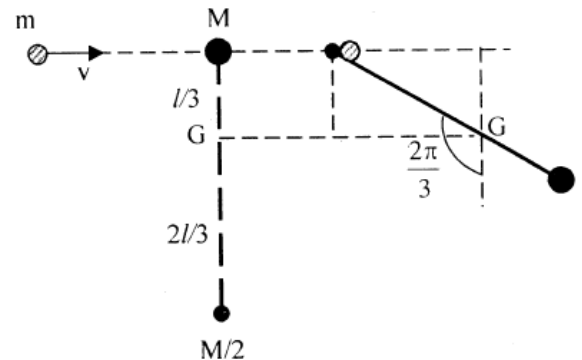
Từ (1) và (2), ta được:

$$v_1 = \frac{v(1 - \gamma)}{(1 + \gamma)} \text{ và } v_2 = \frac{2v}{1 + \gamma}, \gamma = \frac{M}{m}$$

Vì $\gamma = \frac{M}{m} < 1 \Rightarrow v_1 > 0$: ngay sau va chạm, m chuyển động theo hướng cũ với vận tốc v_1 và M chuyển động sang phải với vận tốc v_2

Sau va chạm, khối tâm G của hệ hai quả cầu M và $\frac{M}{2}$ chuyển động tịnh tiến sang phải với vận tốc:

$$v_G = \frac{Mv_2}{M + \frac{M}{2}} \text{ (bảo toàn động lượng cho hệ "quả cầu } M \text{ và } \frac{M}{2} \text{")}$$



$$\Rightarrow v_G = \frac{2Mv_2}{3m} = \frac{2}{3}v_2 = \frac{4v}{3(1+\gamma)}$$

Sau va chạm, M sẽ chuyển động:

+ Tịnh tiến đối với khối tâm G với vận tốc:

$$u = v_2 - v_G = \frac{2v}{1+\gamma} - \frac{4}{3} \cdot \frac{v}{1+\gamma} = \frac{2v}{3(1+\gamma)}$$

+ Quay quanh khối tâm G với vận tốc góc:

$$\omega = \frac{u}{\frac{l}{3}} = \frac{2v}{l(1+\gamma)}$$

Từ hình vẽ, m và $\frac{M}{2}$ chỉ có thể va chạm với nhau sau khi M và $\frac{M}{2}$ quay được một góc $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ quanh G

$$\text{Thời gian quay tính từ lúc va chạm lần 1 là: } t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{\pi l(1+\gamma)}{3v}$$

Vận tốc của quả cầu m đối với khối tâm G:

$$v' = v_1 - v_G = v \frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma)} - \frac{4v}{3(1+\gamma)} = -v \frac{3\gamma+1}{3(\gamma+1)}$$

Để xảy ra sự va chạm giữa m và $\frac{M}{2}$, ta phải có: $|v't| = \frac{2l}{3} \cos 30^\circ$

$$\Leftrightarrow v \frac{3\gamma+1}{3(\gamma+1)} \cdot \frac{\pi l(1+\gamma)}{3v} = \frac{2l}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{(3\gamma+1)\pi l}{9} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3} \approx 0,22$$

Vậy: để sau khi va chạm lần thứ nhất với M, quả cầu m tiếp tục va chạm với quả cầu $\frac{M}{2}$ ở phía bên

phải vị trí va chạm lần đầu thì $\frac{M}{m} = 0,22$