

CHỦ ĐỀ 7

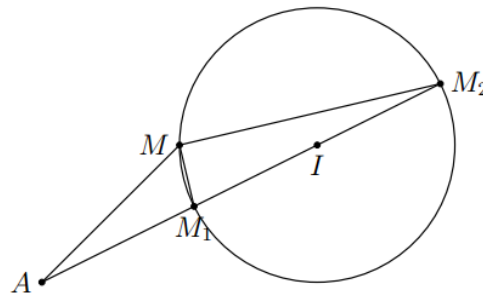
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

DẠNG 4

MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

Bài toán. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R , M là điểm di động trên (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .

Phương pháp giải



Xét A nằm ngoài mặt cầu (S) . Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) ($AM_1 < AM_2$) và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI . Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C) .

Ta có $\angle M_1MM_2 = 90^\circ$, nên $\angle AMM_2$ và $\angle AM_1M$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có $AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có $R - AI \leq AM \leq R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

DẠNG 1

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; -1; 3)$, $B(-2; -8; -4)$, $C(2; -1; 1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $\left| \overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = x_M + y_M$.

- A. $P = 0$. B. $P = 6$. C. $P = \sqrt{14}$. D. $P = 3\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi J là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{3JA} - 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JO} + 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OJ} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow J(3; 6; 9)$.

Mà $\overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ} + (\overrightarrow{3JA} - 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC})$ nên $\left| \overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| = \left| 2\overrightarrow{MJ} \right|$

Do đó $\left| \overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right|_{\min} \Leftrightarrow \left| 2\overrightarrow{MJ} \right|_{\min}$.

Mặt khác: (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{14}$ và $IJ = 2\sqrt{14} > R \Rightarrow$ điểm J nằm ngoài mặt cầu nên IJ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm M_1, M_2 .

$$(IJ): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Xét hệ phương trình:

Suy ra $M_1(2; 4; 6), M_2(0; 0; 0)$, $M_1J = \sqrt{14}; M_2J = 3\sqrt{14}$.

Vậy $\left| \overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right|_{\min} \Leftrightarrow \left| 2\overrightarrow{MJ} \right|_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_1$.

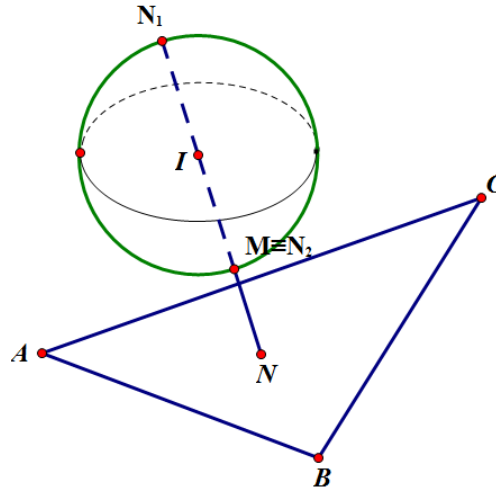
$$P = x_M + y_M = 2 + 4 = 6$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8; 5; -11), B(5; 3; -4), C(1; 2; -6)$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a; b; c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a + b$.

- A. 6. B. 2. C. 4. D. 9.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$, suy ra $N(-2; 0; 1)$.

Khi đó: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}) + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC})| = |(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}) + 3\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{MN}|$.

Suy ra $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 4; -1)$, suy ra:

$\overrightarrow{NI} = (4; 4; -2) = 2(2; 2; -1)$. Phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$. Thay phương trình NI vào phương trình (S)

ta được: $(2t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$.

Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3; 6; -2), N_2(0; 2; 0)$.

Vì $NN_1 > NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv N_2$. Vậy $M(0; 2; 0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a + b = 2$.

Câu 3. Cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và hai điểm $A(1; 1; 3), B(21; 9; -13)$.

Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a.b.c$ bằng

A. 3.

B. 8.

C. 6.

D. -18.

Lời giải

Chọn B

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(6; 3; -1)$.

Khi đó $3MA^2 + MB^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$
 $= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2$.

Do $3IA^2 + IB^2$ không đổi vì ba điểm $A; B; I$ cố định nên $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất.

Khi đó M là giao điểm của đường thẳng IJ với mặt cầu (S) , $J(2; 1; 3)$ là tâm của mặt cầu (S) .

Ta có phương trình đường thẳng IJ là
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow IJ \cap (S) = \begin{cases} M_1(4; 2; 1) \\ M_2(0; 0; 5) \end{cases}$$

Kiểm tra $IM_1 < IM_2 (3 < 9)$ nên $M_1(4; 2; 1)$ là điểm cần tìm. Vậy $T = a.b.c = 8$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0; 0; 2), B(1; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{1}{4}$. Xét

điểm M thay đổi thuộc (S) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{19}{4}$. D. $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.

K là điểm thỏa mãn $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0} \Rightarrow K\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Gọi

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 &= (\vec{MK} + \vec{KA})^2 + 2(\vec{MK} + \vec{KB})^2 \\ &= 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2 + 2\vec{MK}(\vec{KA} + 2\vec{KB}) = 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2. \end{aligned}$$

Biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ đạt GTNN khi và chỉ khi MK đạt giá trị nhỏ nhất.

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min} = |KI - R| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Vậy $(MA^2 + 2MB^2)_{\min} = 3MK_{\min}^2 + KA^2 + 2KB^2 = \frac{3}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{19}{4}$.

Câu 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$ thỏa mãn $AB = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $OA^2 - OB^2$ là

- A. 12. B. 6. C. 10. D. 24.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$ có tâm $I(0; 0; 1)$.

Vì A, B cùng thuộc mặt cầu tâm I nên $IA = IB$.

$$\begin{aligned} OA^2 - OB^2 &= (\overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{OI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \cos \varphi, \text{ với } \varphi = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BA}). \end{aligned}$$

Suy ra biểu thức $OA^2 - OB^2$ đạt GTLN khi và chỉ khi $\varphi = 0$.

Vậy $\max(OA^2 - OB^2) = 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos 0 = 12$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m - n)$.

A. 64.

B. 68.

C. 60.

D. 48.

Lời giải

Chọn C

Xét điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Giả sử $I(x; y; z)$, ta có:

$$\overrightarrow{IA}(4-x; 3-y; 1-z), \overrightarrow{IB}(3-x; 1-y; 3-z).$$

$$2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4-x) = 3-x \\ 2(3-y) = 1-y \\ 2(1-z) = 3-z \end{cases} \Leftrightarrow I(5; 5; -1).$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= 2MA^2 - MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - (\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{IB}^2. \end{aligned}$$

Do I cố định nên $\overrightarrow{IA}^2, \overrightarrow{IB}^2$ không đổi. Vậy P lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2$ lớn nhất (nhỏ nhất). $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IK (với $K(1; 2; -1)$ là tâm của mặt cầu (S)) với mặt cầu (S) .

Ta có: MI đi qua $I(5; 5; -1)$ và có vector chỉ phương là $\overrightarrow{KI}(4; 3; 0)$.

Phương trình của MI là:
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1. \end{cases}$$

Tọa độ điểm M cần tìm ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình:

$$(1+4t-1)^2 + (2+3t-2)^2 + (-1+1)^2 = 9 \Leftrightarrow 25t^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Với $t = \frac{3}{5} \Rightarrow M_1\left(\frac{17}{5}; \frac{19}{5}; -1\right) \Rightarrow M_1I = 2 \text{ (min)}.$

Với $t = -\frac{3}{5} \Rightarrow M_2\left(-\frac{7}{5}; \frac{1}{5}; -1\right) \Rightarrow M_2I = 8 \text{ (max)}.$ Vậy $\begin{cases} m = P_{\max} = 48 \\ n = P_{\min} = -12 \end{cases} \Rightarrow m - n = 60.$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2; 1; 3), B(1; -1; 2), C(3; -6; 0), D(2; -2; -1)$. Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$ sao cho

$S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2$$

A. $P = 6$.

B. $P = 2$.

C. $P = 0$.

D. $P = -2$.

Lời giải

Chọn A

Với mọi điểm I ta có

$$\begin{aligned} S &= 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 4NI^2 + 2NI(\overrightarrow{2A} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

Chọn điểm I sao cho $\overrightarrow{2A} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{2A} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ Suy ra tọa độ điểm } I \text{ là } I(0; 1; 2)$$

Khi đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Tọa độ điểm $N(t; 1-t; 2+t) \in (P) \Leftrightarrow t - 1 + t + 2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow N(-1; 2; 1)$

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4; 3; 1), B(3; 1; 3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m - n)$.

A. 64.

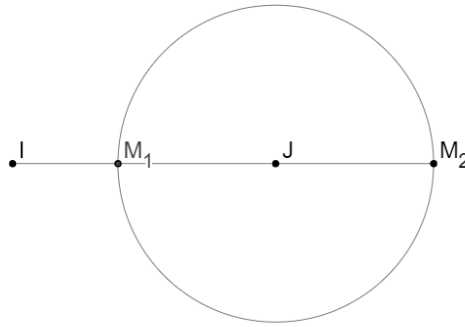
B. 68.

C. 60.

D. 48.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là điểm thỏa mãn $2IA - IB = 0$

$$\Rightarrow I(2x_A - x_B; 2y_A - y_B; 2z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow I(5; 5; -1)$$

Suy ra I là điểm cố định.

Suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất, P đạt giá trị lớn nhất khi MI đạt giá trị lớn nhất.

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9 \text{ có tâm } J(1; 2; -1) \text{ và bán kính } R=3$$

Suy ra $IJ = 5$

Mà M là điểm thay đổi trên (S)

Do đó:

$$\min MI = IM_1 = IJ - R = 5 - 3 = 2$$

$$\max MI = IM_2 = IJ + R = 5 + 3 = 8$$

$$\text{Suy ra } m - n = 8^2 - 2^2 = 60$$

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của

$2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. 103.

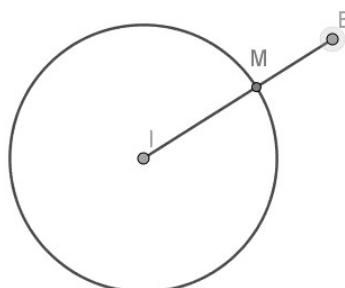
B. 108.

C. 105.

D. 100.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;3)$ bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Suy ra $E(-1;1;1)$.

Xét $P = 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + 3(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2$.

P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

$IE = 2\sqrt{3} > R$ suy ra điểm E nằm ngoài mặt cầu nên ME nhỏ nhất bằng

$$IE - R = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Vậy $P = 2MA^2 + 3MB^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 = 105$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 39$ thỏa mãn

$MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

A. $\sqrt{7}$.

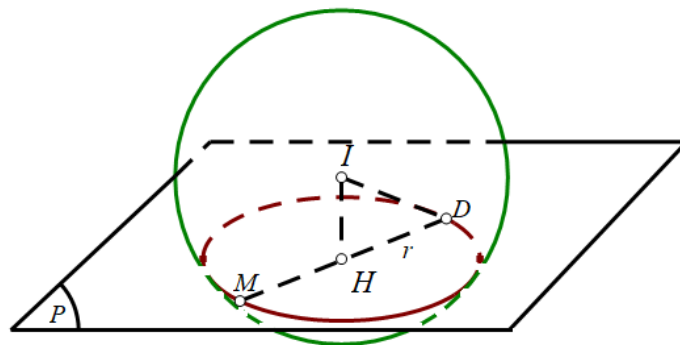
B. $2\sqrt{7}$.

C. $3\sqrt{7}$.

D. $4\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B



+ Mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 39$ có tâm là $I(-2;4;0)$, bán kính $R = \sqrt{39}$.

Gọi $M(x,y,z) \in (S)$. Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = 19 - 4x + 8y$.

$$MA^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 20 - 6x + 8y$$

$$\overrightarrow{MB} = (2-x; 1-y; 3-z), \quad \overrightarrow{MC} = (-x; 2-y; -3-z)$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = -2x + x^2 + 2 - 3y + y^2 - 9 + z^2 = 19 - 4x + 8y - 2x - 3y - 7 = -6x + 5y + 12$$

Suy ra $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = -18x + 18y + 44$.

Theo giả thiết $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8 \Leftrightarrow -18x + 18y + 44 = 8 \Leftrightarrow -x + y + 2 = 0$.

Do đó $M \in (P): -x + y + 2 = 0$.

Ta có $d(I;(P)) = \frac{|8|}{\sqrt{2}} = \sqrt{32} < \sqrt{39}$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính R_1 với $R_1 = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{39 - 32} = \sqrt{7}$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} D, M \in (P) \\ D, M \in (S) \end{cases} \Rightarrow D, M \in (C)$. Do đó độ dài MD lớn nhất bằng $2R_1 = 2\sqrt{7}$.

Câu 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}|$ là:

- A. 12. B. $12\sqrt{2}$. C. 24. D. $24\sqrt{2}$.

Lời giải

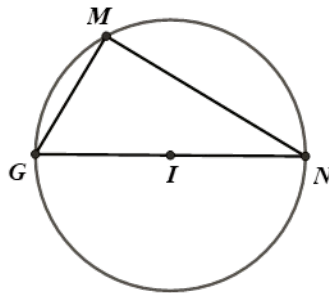
Chọn B

Mặt cầu (S) : tâm $I(0;1;0)$ bán kính $R=1$

Gọi trọng tâm tam giác ABC là $G(0;0;0)$, trung điểm DE là $N(0;2;0)$

do G, N đều nằm trên (S) và I là trung điểm GN nên GN là đường kính của (S)

$$\begin{aligned} P &= 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}| = 2|3\overrightarrow{MG}| + 3|2\overrightarrow{MN}| \\ &= 6MG + 6MN = 6(MG + MN) \end{aligned}$$



Ta có: $(MG + MN)^2 \leq 2(MG^2 + MN^2) = 2GN^2 = 8$

Suy ra $MG + MN \leq 2\sqrt{2}$

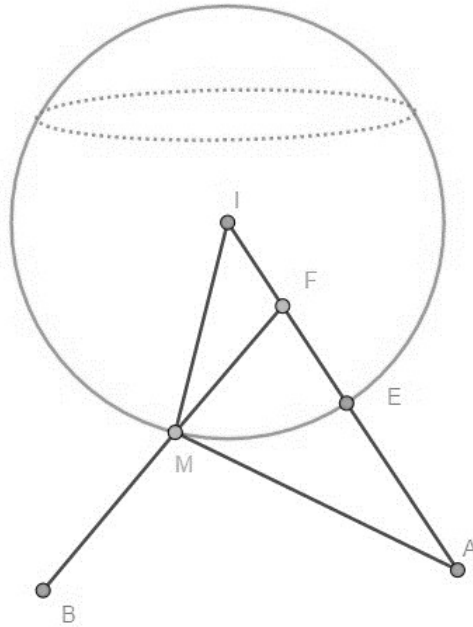
Vậy giá trị lớn nhất của P là $12\sqrt{2}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0); B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

- A. $P = 2\sqrt{2}$. B. $P = 3\sqrt{2}$. C. $P = 4\sqrt{2}$. D. $P = 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Nhận xét: điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 0), R = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA = 4\sqrt{2} = 2R, E = IA \cap (S) \Rightarrow E(1; 2; 0)$

Gọi F là trung điểm của $IE \Rightarrow F(0; 3; 0)$

Tam giác IFM và IMA có $\widehat{AIM}$ chung và $\frac{IF}{IM} = \frac{1}{2} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow \triangle AIM \sim \triangle MIF$

Suy ra $\frac{MA}{FM} = \frac{AI}{MI} = 2 \Rightarrow MA = 2MF$

Ta có: $MA + 2MB = 2(MF + MB) \geq 2FB = 6\sqrt{2}$

Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu " $=$ " xảy ra khi $M = BF \cap (S)$

Câu 13. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3; 0; 0), B(4; 2; 1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

- A. $P = 2\sqrt{2}$ B. $P = 3\sqrt{2}$ C. $P = 4\sqrt{2}$ D. $P = 6\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn D

Giả sử $M(x; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x-3; y; z), \overrightarrow{BM} = (x-4; y-2; z-1)$

Và $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8 \Leftrightarrow 3[(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 - 8] = 0$

Ta có: $P = MA + 2MB = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 - 8} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\
 &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 24y + 4z^2 + 36} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\
 &= 2\left[\sqrt{x^2 + (y-3)^2 + z^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}\right] \\
 &= 2\left[\sqrt{x^2 + (y-3)^2 + z^2} + \sqrt{(4-x)^2 + (2-y)^2 + (1-z)^2}\right]
 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \geq \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} > 0$

$$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{(x+4-x)^2 + (y-3+2-y)^2 + (z+1-z)^2} = 2\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (1)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{x}{4-x} = \frac{y-3}{2-y} = \frac{z}{1-z} = t > 0 \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4t}{t+1} \\ y = \frac{2t+3}{t+1} \\ z = \frac{t}{t+1} \\ \left(\frac{5t+1}{t+1}\right)^2 + \left(\frac{-2t-1}{t+1}\right)^2 + \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 = 8 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4t}{t+1} \\ y = \frac{2t+3}{t+1} \\ z = \frac{t}{t+1} \\ 22t^2 - 2t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4+4\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}} \\ y = \frac{34+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}} \\ z = \frac{1+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}} \\ t = \frac{1+\sqrt{133}}{22} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $6\sqrt{2}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1; 2; -4)$ và $B(1; 2; 14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) . Giá trị nhỏ nhất của $(MA + 2MB)$ bằng

A. $2\sqrt{82}$ B. $3\sqrt{79}$ C. $5\sqrt{79}$ D. $3\sqrt{82}$

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(1; 0; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Ta có $IA = 2\sqrt{10} = 2R$ nên tồn tại điểm C cố định sao cho $MA = 2MC \quad \forall M \in (S)$ (1).

Thật vậy, gọi $(a; b; c)$ là tọa độ điểm C . Khi đó, với mọi điểm

$$M(x; y; z) \in (S) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 4z + 5, \text{ ta có:}$$

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 21$$

$$= 2x + 4z + 5 - 2x - 4y + 8z + 21 = -4y + 12z + 26$$

$$MC^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2$$

$$= 2x + 4z + 5 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = (2-2a)x - 2by + (4-2c)z + a^2 + b^2 + c^2 + 5$$

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow MA^2 = 4MC^2 \quad \forall M \in (S)$$

$$\Leftrightarrow -4y + 12z + 26 = 4[(2-2a)x - 2by + (4-2c)z + a^2 + b^2 + c^2 + 5] \quad \forall x, y, z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2-2a) = 0 \\ 4(-2b) = -4 \\ 4(4-2c) = 12 \\ 4(a^2 + b^2 + c^2 + 5) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Lúc này, $IC = \frac{\sqrt{10}}{2} < R < IB = 2\sqrt{37}$ nên C nằm trong (S) còn B nằm ngoài (S) và

$$MA + 2MB = 2MC + 2MB = 2(MC + MB) \geq 2BC = 3\sqrt{82}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn BC và mặt cầu (S) .

$$\text{Vậy } \min(MA + 2MB) = 3\sqrt{82}$$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 0)$ và $B(2; 3; 4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa

đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$ và

$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = 1$. Giá

trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

A. 5.

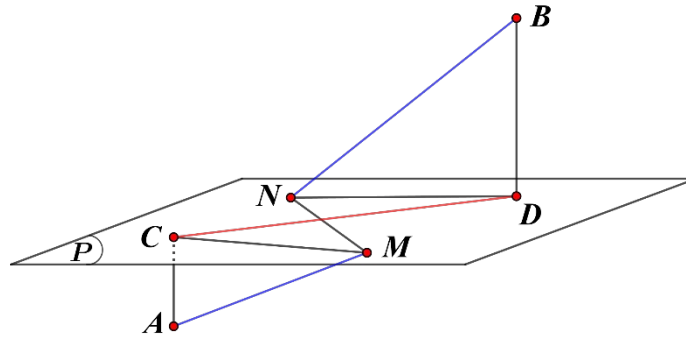
B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn A



• Xét hệ
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Vậy $(P): x = 0$ ((P) chính là mặt phẳng (Oyz)).

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$ trên mặt phẳng (P) . Suy ra $AC = 1$, $BD = 2$, $CD = 5$.

• Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$, ta được

$$\begin{aligned} AM + BN &= \sqrt{AC^2 + CM^2} + \sqrt{BD^2 + DN^2} \\ &\geq \sqrt{(AC + BD)^2 + (CM + DN)^2} \\ &\geq \sqrt{9 + (CM + DN)^2} \end{aligned}$$

Lại có $CM + MN + ND \geq CD = 5$ nên suy ra $CM + ND \geq 4$. Do đó $AM + BN \geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{AC}{CM} = \frac{BD}{DN}$, tức là $M\left(0; \frac{4}{5}; \frac{16}{15}\right)$ và $N\left(0; \frac{7}{5}; \frac{28}{15}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là 5.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ với $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

A. $\sqrt{34} - 1$.

B. 5.

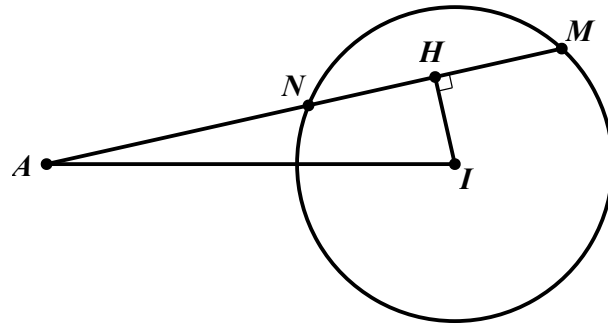
C. $\sqrt{34}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$AI = \sqrt{34} > R \Rightarrow A \text{ nằm ngoài mặt cầu } (S).$$



Do hai điểm M, N nằm ở vị trí hai đầu một dây cung nên để $S_{\min}$ thì N nằm giữa A và M . Gọi H

là trung điểm $MN \Rightarrow IH \perp MN, NH = \frac{1}{2}MN$

$$S = 4(AH - NH) + AH + NH = 5AH - 3NH$$

$$S = 5\sqrt{AI^2 - IH^2} - 3\sqrt{R^2 - IH^2} = 5\sqrt{34 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2}, x = IH$$

Xét hàm số $f(x) = 5\sqrt{34 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2}, (0 \leq x < 3)$

$$f'(x) = \frac{-5x}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{9 - x^2}} = x \left(\frac{-5}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} \right)$$

$$\text{Xét } \left(\frac{-5}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{9 - x^2} < 3\sqrt{34 - x^2} \Leftrightarrow 225 - 25x^2 < 9 \cdot 34 - 9x^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 81 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 3), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0; 3)$

$$\text{Suy ra } \min_{[0; 3)} f(x) = f(0) = 5\sqrt{34} - 9.$$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và mặt cầu $(S):$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 729. \text{ Cho biết điểm } A(-2; -2; -7), \text{ điểm } B \text{ thuộc giao tuyến của mặt cầu}$$

(S) và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 107 = 0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$.

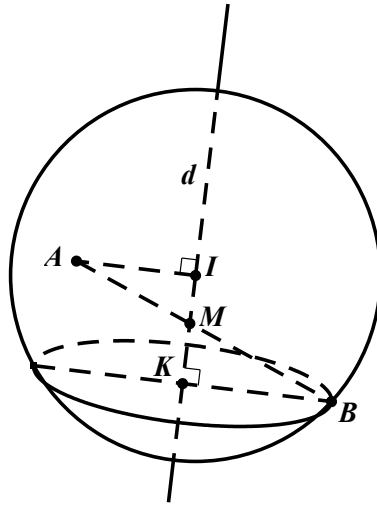
B. 27.

C. $5\sqrt{29}$.

D. $\sqrt{742}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(-3; -4; -5)$ và bán kính $R=27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;4) \Rightarrow d \perp (P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d . Vì $I \in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB \perp d$.

Ta có $\vec{IA}=(1;2;-2) \Rightarrow IA=3$ và $\vec{IA} \cdot \vec{u}=0 \Rightarrow IA \perp d$.

Ta tính được $IK=d(I,(P))=\frac{|2 \cdot (-3)+3 \cdot (-4)+4 \cdot (-5)-107|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=5\sqrt{29}$ và $KB=\sqrt{R^2-IK^2}=2$.

Do M di động trên đường thẳng d (trục của đường tròn giao tuyến) và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M=AB \cap d$.

Khi đó, ta có $\frac{MI}{MK}=\frac{IA}{KB}=\frac{3}{2}$ và $MI+MK=IK=5\sqrt{29}$.

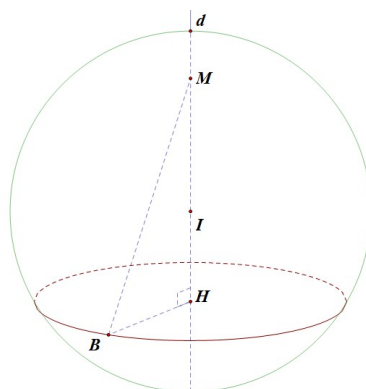
Suy ra $MI=3\sqrt{29}$, $MK=2\sqrt{29}$.

$$AM=\sqrt{IA^2+MI^2}=3\sqrt{30} \Rightarrow BM=\frac{2}{3}AM=2\sqrt{30}$$

Ta có

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AM+BM=3\sqrt{30}+2\sqrt{30}=5\sqrt{30}$.

Cách 2:



Ta có (S) có tâm $I(-3; -4; -5)$, bán kính $R=27$.

Dễ thấy d đi qua $I(-3; -4; -5)$ và vuông góc với (P) .

(P) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r=2$.

$$M \in d \Leftrightarrow M(1+2t; 2+3t; 3+4t)$$

Ta có $T = MA + MB = MA + \sqrt{MH^2 + r^2}$.

Lại có
$$MH = d(M; (P)) = \frac{|29t - 87|}{\sqrt{29}} = |\sqrt{29}t - 3\sqrt{29}|$$

$$T = \sqrt{29t^2 + 116t + 125} + \sqrt{29(t-3)^2 + 4} = \sqrt{29}\sqrt{(t+2)^2 + \frac{9}{29}} + \sqrt{29}\sqrt{(t-3)^2 + \frac{4}{29}}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = \left(t+2; \frac{3}{\sqrt{29}}\right) \quad \vec{v} = \left(3-t; \frac{2}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(5; \frac{5}{\sqrt{29}}\right).$$

Xét

Do đó
$$T = \sqrt{29}(|u| + |v|) \geq \sqrt{29}|u+v| = 5\sqrt{50}$$

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm

thay đổi trên (S_1) , N là điểm thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là

- A. $2\sqrt{265}$. B. $\sqrt{265}$. C. $3\sqrt{265}$. D. $4\sqrt{265}$.

Lời giải

Chọn A

$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1 = 1$

$(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ nên (S_2) có tâm $I(0;4;0)$ và bán kính $R_2 = 2$

Vậy các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$, $O(0;0;0)$ và $I(0;4;0)$ cùng thuộc (Oxy)

Ta có $\overrightarrow{IA} = (3; 0; 4) \Rightarrow IA = 5$, $\overrightarrow{IB} = (0; 2; 2) \Rightarrow IB = 2\sqrt{2}$ nên điểm $A(4; 2; 4)$ nằm ngoài mặt cầu (S) và điểm $B(1; 4; 2)$ nằm trong mặt cầu (S) .

Do $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $u = (0; 1; 1)$ suy ra $\overrightarrow{MN} = (0; k; k), k > 0$ do $MN = 4\sqrt{2}$ suy ra $\overrightarrow{MN} = (0; 4; 4)$.

Gọi $A' = T_{\overrightarrow{MN}}(A)$, suy ra $A' = (4; 6; 8)$. Khi đó $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM = A'N$.

Ta có $|AM - BN| = |A'N - BN| \leq A'B$, dấu bằng xảy ra khi A', N, B thẳng hàng $\Leftrightarrow N$ là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng $A'B$. (Điểm N luôn tồn tại).

$\overrightarrow{A'B} = (-3; -2; -6)$ suy ra $A'B = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 7$.

Vậy $|AM - BN|_{\min} = A'B = 7$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a; b; c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0$ sao cho biểu thức $T = 2a + 3b + 6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P = 2a - b + c$ bằng

A. $\frac{12}{7}$.

B. 8.

C. 6.

D. $\frac{51}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 16$$

$$M(a; b; c) \in (S) \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 = 16$$

Ta có: $|2(a - 1) + 3(b - 2) + 6(c - 2)| \leq \sqrt{(2^2 + 3^2 + 6^2) \cdot [(a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2]}$

$$\Leftrightarrow |2a + 3b + 6c - 20| \leq 28 \Rightarrow 2a + 3b + 6c - 20 \leq 28 \Rightarrow 2a + 3b + 6c \leq 48$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 48 \\ \frac{a - 1}{2} = \frac{b - 2}{3} \\ \frac{a - 1}{2} = \frac{c - 2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 48 \\ 3a - 2b = -1 \\ 3a - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{15}{7} \\ b = \frac{26}{7} \\ c = \frac{38}{7} \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

Vậy $P = 2a - b + c = 2 \cdot \frac{15}{7} - \frac{26}{7} + \frac{38}{7} = 6$

Câu 22. Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 1$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$.

A. $\sqrt{3} - 1$.

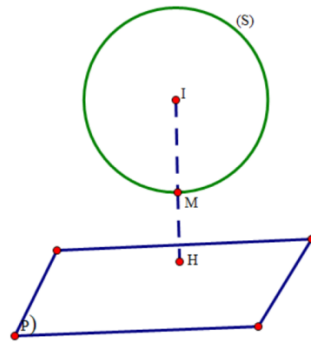
B. $\sqrt{3} + 1$.

C. $4 - 2\sqrt{3}$.

D. $4 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(x; y; z) \Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-1; -1; 2)$ bán kính $R=1$

Gọi $H(a; b; c) \Rightarrow H$ thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$

Ta có $d(I, (P)) = \frac{|-1 - 1 + 2 - 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} > R \Rightarrow (P)$ và (S) không có điểm chung

$P = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = MH^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi vị trí của M và H như hình vẽ

Khi đó $HI = d(I, (P)) = \sqrt{3} \Rightarrow HM = HI - R = \sqrt{3} - 1$

Do đó $P_{\min} = (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2)$, $B(3; -3; 3)$. Điểm M trong

không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

- A. $6\sqrt{3}$. B. $12\sqrt{3}$. C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. D. $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y; z)$

Ta có $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA = 2MB \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$

$$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108$$

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6; 6; -6)$ và bán kính $R = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI + R = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-6)^2} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm $A(0; 2; 0)$, $B(2; -6; -2)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ bằng

- A. -1. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vì $IA = \sqrt{2} > R$ và $IB = \sqrt{82} > R$ nên hai điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) .

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AB thì $K(1; -2; -1)$ và K nằm ngoài mặt cầu (S) .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overline{MA} \cdot \overline{MB} &= (\overline{MK} + \overline{KA}) \cdot (\overline{MK} + \overline{KB}) \\ &= MK^2 + MK \cdot (\overline{KA} + \overline{KB}) + \overline{KA} \cdot \overline{KB} = MK^2 - KA^2. \end{aligned}$$

Suy ra $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ nhỏ nhất khi MK^2 nhỏ nhất, tức là MK nhỏ nhất.

$$\text{Đánh giá: } IM + MK \geq IK \Rightarrow R + MK \geq IK \Rightarrow MK \geq IK - R.$$

Suy ra MK nhỏ nhất bằng $IK - R$, xảy ra khi I, M, K thẳng hàng và M nằm giữa hai điểm I, K .

Như vậy M là giao điểm của đoạn thẳng IK và mặt cầu (S) .

$$\text{Có } \overline{IK} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6} = 4R = 4IM.$$

$$\text{Suy ra } \overline{IK} = 4IM \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4(a+1) \\ -4 = 4(b-2) \\ -2 = 4(c-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 1.$$

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $x + y + z + 3 = 0$. B. $x + y + z - 3 = 0$. C. $x + 2y + 3z - 3 = 0$. D. $x + 2y + 3z + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $H(a; b; c)$ là tiếp điểm của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

Từ giả thiết ta có a, b, c là các số dương.

Mặt khác, $H \in (S)$ nên $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ hay $OH^2 = 3 \Leftrightarrow OH = \sqrt{3}$. (1)

Mặt phẳng (α) đi qua điểm H và vuông góc với đường thẳng OH nên nhận $\vec{OH} = (a; b; c)$ làm vectơ

pháp tuyến. Do đó, mặt phẳng (α) có phương trình là

$$a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - 3 = 0$$

Suy ra: $A\left(\frac{3}{a}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{3}{b}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3}{c}\right)$.

Theo đề: $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27 \Leftrightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{9}{b^2} + \frac{9}{c^2} = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 9$.

Mặt khác, ta có: $(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9$ và dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là: $x + y + z - 3 = 0$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng

$(d): \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng (Δ)

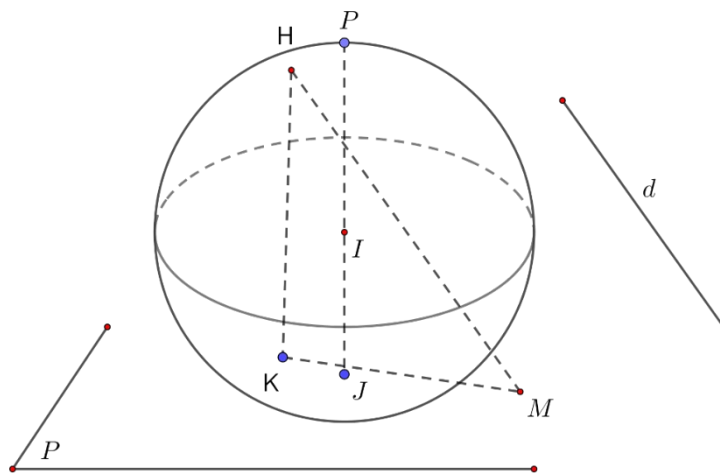
thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng

(P) sao cho AA', BB' cùng song song với (d) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-2)$ và bán kính $R=5$.

Gọi H là trung điểm của AB thì $IH \perp AB$ và $IH = 3$ nên H thuộc mặt cầu (S') tâm I bán kính $R' = 3$

Gọi M là trung điểm của $A'B'$ thì $AA' + BB' = 2HM$, M nằm trên mặt phẳng (P) .

Mặt khác ta có $d(I;(P)) = \frac{4}{\sqrt{3}} < R$ nên (P) cắt mặt cầu (S) và $\sin(d;(P)) = \sin \alpha = \frac{5}{3\sqrt{3}}$. Gọi K là hình chiếu của H lên (P) thì $HK = HM \cdot \sin \alpha$.

Vậy để $AA' + BB'$ lớn nhất thì HK lớn nhất

$$\Leftrightarrow HK \text{ đi qua } I \text{ nên } HK_{\max} = R' + d(I; (P)) = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

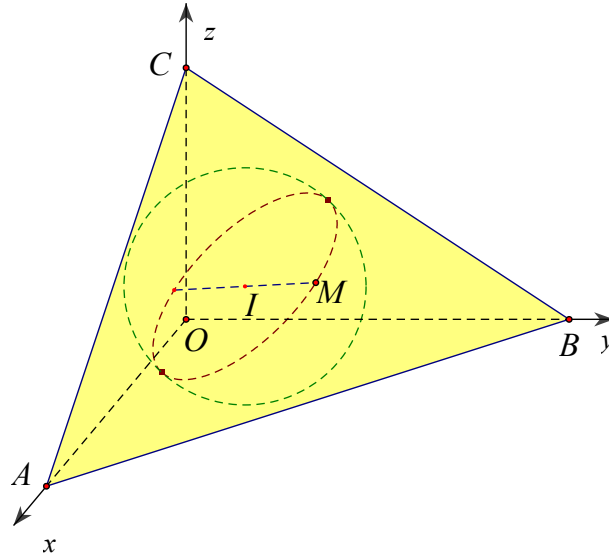
Vậy $AA' + BB'$ lớn nhất bằng $2 \left(\frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} = \frac{24+18\sqrt{3}}{5}$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Điểm $M \in (S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia Ox ; Oy ; Oz tại các điểm A , B , C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (1 + OA^2)(1 + OB^2)(1 + OC^2)$ là:

- A. 24.** **B. 27.** **C. 64.** **D. 8.**

Lời giải

Chọn C



(S) có tâm (O) và bán kính $R=1$.

Theo đề bài ta có $A(a,0,0); B(0,b,0); C(0,0,c); (a,b,c > 0)$ khi đó phương trình mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\Leftrightarrow d(O, (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = 1$$

(P) tiếp xúc với (S) tại $M \in (S)$

$$\Leftrightarrow abc = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} \Rightarrow abc \geq 3\sqrt{3} \quad (1) \text{ vì } (a,b,c > 0)$$

$$\text{Khi đó: } T = (1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2) = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

$$\Rightarrow T = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2c^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b^2c^2$$

$$\text{Mặt khác } 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b^2c^2 \geq 1 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 2a^2b^2c^2 \geq 64 \quad (2) \Rightarrow T \geq 64$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 64 khi (1) và (2) xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 28. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn
$$\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$$
 Gọi giá trị lớn nhất,

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m . Khi đó, $M - m$ bằng

- A. 10. B. $\sqrt{10}$. C. 8. D. $2\sqrt{2}$.

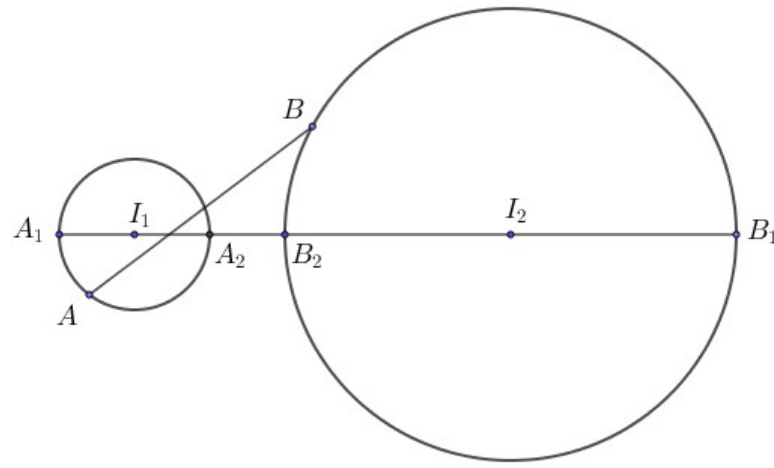
Lời giải

Chọn C

Gọi $A(d, e, f)$ thì A thuộc mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ có tâm $I_1(1; 2; 3)$, bán kính

$R_1=1$, $B(a, b, c)$ thì B thuộc mặt cầu $(S_2): (x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có tâm $I_2(-3; 2; 0)$, bán kính

$R_2=3$. Ta có $I_1I_2=5 > R_1+R_2 \Rightarrow (S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.



Dễ thấy $F = AB$, AB max khi $A \equiv A_1, B \equiv B_1 \Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1 I_2 + R_1 + R_2 = 9$.

AB min khi $A \equiv A_2, B \equiv B_2 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1 I_2 - R_1 - R_2 = 1$.

Vậy $M - m = 8$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t; 2t; 0)$, $B(0; 0; t)$ (với $t > 0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$. Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q = 2a + b$ bằng

A. 5

B. 13

C. 11

D. 9

Lời giải

Chọn C

Gọi $P(x; y; z)$, ta có: $\overrightarrow{OP} = (x; y; z)$, $\overrightarrow{AP} = (x - 2t; y - 2t; z)$, $\overrightarrow{BP} = (x; y; z - t)$

Vì $P(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4tx - 4ty - 2tz - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}tx - \frac{4}{3}ty - \frac{2}{3}tz - 1 = 0$$

Nên P thuộc mặt cầu tâm $I\left(\frac{2t}{3}; \frac{2t}{3}; \frac{t}{3}\right)$, $R = \sqrt{t^2 + 1}$.

Ta có $OI = t < R$ nên O thuộc phần không gian phía trong mặt cầu.

Để $OP_{\max}$ thì P, I, O thẳng hàng và $OP = OI + R$.

Suy ra $OP_{\max} = OI + R \Leftrightarrow 3 = t + \sqrt{t^2 + 1}$. Từ đó tìm được $t = \frac{4}{3}$ Suy ra $a = 4, b = 3$

Vậy, $Q = 2a + b = 11$.

DẠNG 2

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Câu 30. Cho x, y, z là ba số thực thỏa $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = 2x + 2y - z$.

- A. $\max P = 20$. B. $\max P = -18$. C. $\max P = 18$. D. $\max P = 12$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P = 2x + 2y - z \Leftrightarrow 2x + 2y - z - P = 0$ (1)

Lại có: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 25$ (2)

Xét trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, ta thấy (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là $mp(\alpha)$ và (2) là phương trình của một mặt cầu (S) tâm $I(2; -3; 1)$, bán kính $R = 5$.

Giá trị lớn nhất của $P = 2x + 2y - z$ là giá trị lớn nhất của P để (α) và (S) có điểm chung, điều này tương

$$d(I, (\alpha)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 - P|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \leq 5 \Leftrightarrow |P + 3| \leq 15 \Leftrightarrow -18 \leq P \leq 12.$$

đương với

Vậy $\max P = 12$.

$$d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho d và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$. Tọa độ điểm M trên (S) sao cho $d(M, d)$ đạt GTLN là:

- A. $(1; 2; -1)$ B. $(2; 2; -1)$ C. $(0; 2; -1)$ D. $(-3; -2; 1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $d(I, d) = 1 = R$ suy ra (S) tiếp xúc với d và tiếp điểm là $H(2; 2; -1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên $d \Rightarrow H(2; 2; -1)$.

Đường thẳng IH có pt:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Tọa độ giao điểm của IH và (S) là: $A(0; 2; -1)$, $B \equiv H(2; 2; -1)$.

Ta có: $d(A, (d)) = AH = 2 \geq d(B, (P)) = BH = 0$.

$$\Rightarrow d(A, (d)) = 2 \geq d(M, (d)) \geq d(B, (d)) = 0.$$

Vậy $M(0; 2; -1)$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A ,

B . Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

- A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$ B. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$
- C. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$ D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; 5)$, bán kính $R = 10$. Do $d(I, (\alpha)) < R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B .

Khi đó $AB = \sqrt{R^2 - (d(I, \Delta))^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d(I, (\Delta))$ nhỏ nhất nên Δ qua H , với H là hình

$$BH : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

chiếu vuông góc của I lên (α) . Phương trình

$$H \in (\alpha) \Rightarrow 2(2 + 2t) - 2(3 - 2t) + 5 + t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(-2; 7; 3)$$

Do vậy $\vec{AH} = (1; 4; 6)$ là véc tơ chỉ phương của Δ . Phương trình của $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B . Để độ dài AB nhỏ nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$

B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$

C. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$

D. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{-11} = \frac{z+3}{10}$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; 5)$, bán kính $R = 10$. Do $d(I, (\alpha)) < R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B .

Khi đó $AB = \sqrt{R^2 - (d(I, \Delta))^2}$. Do đó, AB nhỏ nhất thì $d(I, (\Delta))$ lớn nhất nên Δ là đường thẳng nằm trong

(α) , qua A và vuông góc với AI . Do đó Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{AI}, \vec{n}_\alpha] = (16; 11; -10)$

Vậy, phương trình của $\Delta: \frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 0; 2)$, $B(3; 0; 2)$ và mặt cầu $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là:

A. $x - 4y - 5z + 17 = 0$

B. $3x - 2y + z - 7 = 0$

C. $x - 4y + 5z - 13 = 0$

D. $3x + 2y + z - 11 = 0$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$, bán kính $R = 5$. Do $IA = \sqrt{17} < R$ nên AB luôn cắt (S) . Do đó (α) luôn cắt (S) theo đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - (d(I, (\alpha)))^2}$. Để bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ lớn nhất.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mp (ABC) .

Ta có $\vec{AB} = (1; -1; -1)$, $\vec{AC} = (-2; -3; -2)$ suy ra (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (-1; 4; -5)$

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}, \vec{AB}] = (-9; -6; -3) = -3(3; 2; 1)$

Phương trình $(\alpha): 3(x-2) + 2(y-1) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + z - 11 = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\vec{MN}$ cùng phương với vector $u(1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

A. $MN = 3$

B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$

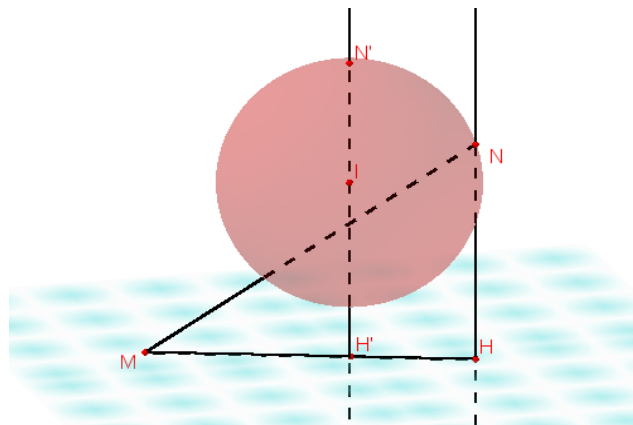
C. $MN = 3\sqrt{2}$

D. $MN = 14$

Lời giải

Chọn C

Cách 1



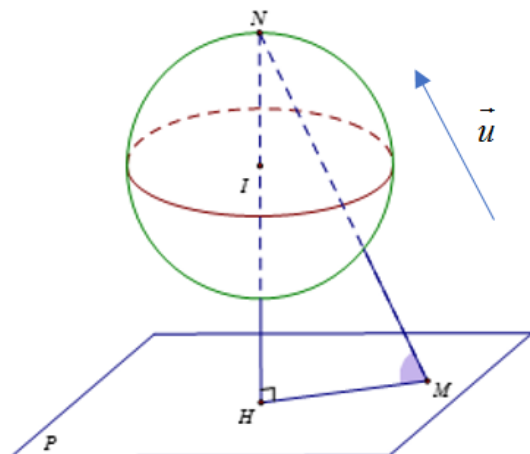
Mặt phẳng (P) có vpt $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $r = 1$. Nhận thấy rằng góc giữa u và $\vec{n}$ bằng 45° . Vì $d(I; (P)) = 2 > 1 = r$ nên (P) không cắt (S) .

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $\angle NMH = 45^\circ$ và $MN = \frac{NH}{\sin 45^\circ} = NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N \equiv N'$ và $H \equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d qua I , vuông góc (P) và H' là hình chiếu của I lên (P) .

Lúc đó $NH_{\max} = N'H' = r + d(I; (P)) = 3$ và $MN_{\max} = \frac{NH_{\max}}{\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}$.

Cách 2

(S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R=1$. Ta có: $d(I, (P)) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2 > R$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH .

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với u nên góc α có số đo không đổi, $\alpha = \angle HNM$.

Có $HN = MN \cdot \cos \alpha \Rightarrow MN = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot HN$ nên MN lớn nhất $\Leftrightarrow HN$ lớn nhất $\Leftrightarrow$

$$HN = d(I, (P)) + R = 3$$

Có $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}_P) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot HN = 3\sqrt{2}$

Câu 36. Cho $A(0; 8; 2)$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$ và điểm $A(9; -7; 23)$. Viết

phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giải sử $n = (1; m; n)$ là một vector pháp tuyến của (P) . Lúc đó

- A. $m \cdot n = 4$. B. $m \cdot n = 2$. C. $m \cdot n = -4$. D. $m \cdot n = -2$.

Lời giải

Chọn C

(P) đi qua điểm $A(0; 8; 2)$ và có vector pháp tuyến $n = (1; m; n) \Rightarrow (P): x + my + nz - 8m - 2n = 0$

(P) tiếp xúc với mặt cầu $(S) \Rightarrow \frac{|5 - 11m + 5n|}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} = 6\sqrt{2}$

$$d = d(B; (P)) = \frac{|9 - 15m + 21n|}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} = \frac{|5 - 11m + 5n + 4 - 4m + 16n|}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}$$

$$\leq \frac{|5 - 11m + 5n|}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} + 4 \frac{|1 - m + 4n|}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}$$

$$\leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1 + m^2 + n^2}}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} \quad (\text{Bunhiacôpxki}).$$

$$= 18\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow d_{\max} = 18\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{-1}{m} = \frac{4}{n} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow mn = -4$$

DẠNG 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BÁN KÍNH MẶT CẦU, ĐƯỜNG TRÒN

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$$

Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y + z + 1 = 0$.

B. $x + 3y + 5z + 2 = 0$.

C. $x - 2y - 3 = 0$.

D. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Gọi H là hình chiếu của I trên d .

$$H \in d \Leftrightarrow H(1+2t; -1+t; -t), \vec{IH} = (-2+2t; -2+t; -t)$$

Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u_d} = (2;1;-1)$.

$$\vec{IH} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2(-2+2t) + 1(-2+t) + t = 0 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Suy ra } H(3;0;-1) \Rightarrow IH = \sqrt{2}.$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính r . Ta có

$$r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{4 - [d(I, (P))]^2}$$

$$\text{Mà } d(I, (P)) \leq IH = \sqrt{2} \text{ nên } r = \sqrt{4 - [d(I, (P))]^2} \geq \sqrt{4 - IH^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}.$$

Suy ra $\min r = \sqrt{2}$, đạt được khi $IH \perp (P)$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $H(3;0;-1)$ nhận $\vec{IH} = (0;-1;-1)$ làm một véc tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $0(x-3) - 1(y-0) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow y + z + 1 = 0$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo

giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

A. $T = 3$

B. $T = 4$

C. $T = 5$

D. $T = 2$

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: $\vec{AB} = (-3; 3; -6)$ cùng phương với $u = (1; -1; 2)$.

$$AB: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến. K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB , H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K \in AB \Rightarrow K(t; 1-t; 2t) \Rightarrow IK = (t-1; -t-1; 2t-3)$

$$IK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow IK = (0; -2; -1)$$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - IH^2}$$

Ta có: $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$.

Mà $IH \leq IK \Rightarrow IH_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK \Rightarrow n_p$ và $\overline{IK}^{\cup\cup}$ cùng phương.

$$\Rightarrow n_p \xrightarrow{\vec{\square}} k.IK \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2k \\ c=-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ k=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow t=a+b+c=0+2+1=3.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Ta có $\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b + 6c - 2 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2c \\ b = 2 \end{cases}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - [d(I;P)]^2} = \sqrt{25 - [d(I;P)]^2}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I; (P))$ lớn nhất

Ta có
$$d(I, (P)) = \frac{|a+2b+3c-2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}} = \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}$$

Xét
$$f(c) = \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-48c^2-144c+192}{(5c^2-8c+8)^2 \sqrt{\frac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}}$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ c=-4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\searrow$		$\nearrow$		$\sqrt{5}$	$\searrow$
						$\frac{1}{\sqrt{5}}$	

Vậy $d(I; (P))$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c=1 \Rightarrow a=0, b=2 \Rightarrow a+b+c=3$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 4), B(0; 0; 1)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-4=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a+b+c$?

A. $T = \frac{1}{5}$.

B. $T = \frac{3}{4}$.

C. $T = 1$.

D. $T = -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: (S) có tâm $I(-1; 1; 0)$ và bán kính $R=2$.

Do $A, B \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+4c-4=0 \\ c-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b-12 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow (P): -2(b+6)x+by+4z-4=0$.

Gọi r là bán kính của đường tròn là giao tuyến của (P) và $(S) \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))}$, để r đạt giá trị

nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ đạt giá trị lớn nhất. Mà
$$d(I, (P)) = \frac{|3b+8|}{\sqrt{5b^2+48b+160}}$$

$$f(x) = \frac{3x+8}{\sqrt{5x^2+48x+160}}; f'(x) = \frac{32x+288}{(\sqrt{5x^2+48x+160})^3}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -9$$
.

Xét hàm số

Bảng xét biến thiên:

x	$-\infty$	-9	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-1,34$	$f(-9) \approx -1,66$	$1,34$

suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là

x	$-\infty$	-9	$-\frac{8}{3}$	$+\infty$
$ f(x) $	$1,34$	$f(-9) \approx 1,66$	0	$1,34$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $x = -9 \Rightarrow b = -9 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow T = 1$.

Kết luận: $T = 1$.

Câu 40. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, điểm $A(0;0;2)$. Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, phương trình (P) là:

A. $(P): x - 2y + 3z - 6 = 0$

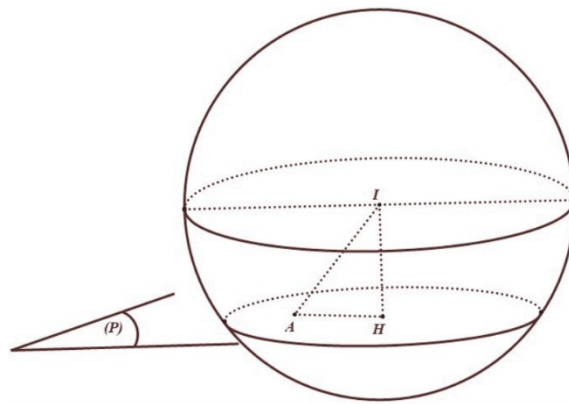
B. $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$

C. $(P): 3x + 2y + 2z - 4 = 0$

D. $(P): x + 2y + z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 3$.

Ta có $IA = \sqrt{6} < R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S) .

Do đó mặt phẳng (P) qua A luôn cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$ (với H là hình chiếu của $I(1; 2; 3)$ trên (P)).

Ta luôn có $IA \geq IH \Rightarrow \sqrt{R^2 - IH^2} \geq \sqrt{R^2 - IA^2} \Rightarrow r \geq \sqrt{R^2 - IA^2}$.

Diện tích của hình tròn (C) nhỏ nhất khi bán kính r nhỏ nhất, tức là $r = \sqrt{R^2 - IA^2} \Leftrightarrow H \equiv A$.

Khi đó $IA \perp (P) \Rightarrow$ mặt phẳng (P) nhận $\vec{IA} = (-1; -2; -1)$ làm một VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) : $-x - 2y - (z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 2 = 0$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0; 0; -4)$, $B(2; 0; 0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) , là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax + by - z + c = 0$, khi đó $a - b + c$ bằng:

A. 8.

B. 0.

C. 2.

D. -4.

Lời giải

Chọn D

+ Vì (α) qua A ta có: $-(-4) + c = 0 \Rightarrow c = -4$.

+ Vì (α) qua B ta có: $2a + c = 0 \Rightarrow a = 2$.

$\Rightarrow (\alpha): 2x + by - z - 4 = 0$.

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, $R = 3\sqrt{3}$.

+ Chiều cao khối nón: $h = d_{(I, \alpha)} = \frac{|2 - 2b - 3 - 4|}{\sqrt{4 + b^2 + 1}} = \frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}$.

+ Bán kính đường tròn: $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{27 - \left(\frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}\right)^2} = \sqrt{27 - \frac{(2b + 5)^2}{b^2 + 5}}$.

+ Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(27 - \frac{(2b + 5)^2}{b^2 + 5} \right) \frac{|2b + 5|}{\sqrt{b^2 + 5}}$.

+ Tới đây ta có thể Thử các trường hợp đáp án.

Hoặc ta làm tự luận như sau:

Đặt $t = \frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$ và xét hàm số $f(t) = (27 - t^2)t$ trên đoạn $[0; 3\sqrt{3}]$.

Ta có: $f'(t) = 27 - 3t^2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3(l) \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên:

t	0	3	$3\sqrt{3}$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$			54	
	0			0

$$t = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}} \right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow 4b^2 + 20b + 25 = 9b^2 + 45$$

Do đó thể tích khối nón lớn nhất khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 20b + 20 = 0 \Leftrightarrow b = 2.$$

Vì vậy $a - b + c = -4$.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\angle AMB = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

- A. 4. B. 2. C. 4π . D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R=2$.

Bài ra A, M, B nằm trên mặt cầu (S) và $\angle AMB = 90^\circ \Rightarrow AB$ qua $I \Rightarrow AB = 2R = 4$.

Ta có $S_{AMB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB \leq \frac{MA^2 + MB^2}{4} = \frac{AB^2}{4} = 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA = MB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ và $AB = 4$.

Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

- A. $S = \sqrt{7}$. B. $S = 4$. C. $S = 2\sqrt{7}$. D. $S = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $O=(0;0;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $OM=1 \Rightarrow M$ nằm trong mặt cầu. Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Đặt $x=OI \leq OM \Rightarrow 0 < x \leq 1$.

Khi đó $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OI \cdot AB = OI \sqrt{R^2 - OI^2} = x \sqrt{8 - x^2} = f(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{8 - x^2}} (0 < x \leq 1)$, ta có bảng biến thiên

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$\sqrt{7}$

Vậy $\max S_{\Delta OAB} = \sqrt{7}$ khi $OI=1$ hay $I \equiv M$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

A. $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$

B. $R = \frac{\sqrt{17}}{3}$

C. $R = \frac{\sqrt{17}}{6}$

D. $R = \frac{\sqrt{17}}{17}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $A; B$ là hai điểm thuộc lần lượt Δ_1 và Δ_2 sao cho AB là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường.

Gọi M là trung điểm AB . Để có mặt cầu tâm M bán kính $R = \frac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là mặt cầu có bán kính bé nhất.

Ta có tọa độ theo tham số của $A; B$ lần lượt là:

$$A(2t_1 - 1; t_1 - 1; 2t_1 - 1) \text{ và } B(2t_2 + 1; 2t_2 + 1; t_2 + 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2t_2 - 2t_1 + 2; 2t_2 - t_1 + 2; t_2 - 2t_1 + 2)$$

Có $\overrightarrow{u_1}(2; 1; 2)$ và $\overrightarrow{u_2}(2; 2; 1)$ lần lượt là 2 vectơ chỉ phương của Δ_1 và Δ_2 nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 2 + (2t_2 - t_1 + 2) \cdot 1 + (t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 2 = 0 \\ (2t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 2 + (2t_2 - t_1 + 2) \cdot 2 + (t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t_2 - 9t_1 + 10 = 0 \\ 9t_2 - 8t_1 + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{10}{17} \\ t_2 = \frac{-10}{17} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{17}; \frac{-7}{17}; \frac{3}{17}\right); B\left(\frac{-3}{17}; \frac{-3}{17}; \frac{7}{17}\right) \quad \overline{AB}\left(\frac{-6}{17}; \frac{4}{17}; \frac{4}{17}\right)$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 4^2}}{17} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

Bán kính mặt cầu cần tính là $R = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

$$d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 . Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$.

B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$.

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; 0)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 1; 0)$.

Để phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 khi và chỉ khi:

Tâm mặt cầu (S) nằm trên đoạn thẳng vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2 , đồng thời là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung.

Gọi điểm $M(2t; t; 4)$ thuộc d_1 ; gọi điểm $N(3-t'; t'; 0)$ thuộc d_2 với MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 .

Ta có $\overline{MN} = (3-t'-2t; t'-t; -4)$.

$$\overline{MN} \perp \vec{u}_1 \Rightarrow \overline{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2(3-t'-2t) + t' - t = 0 \\ (-1)(3-t'-2t) + t' - t = 0 \end{cases}$$

MN là đoạn thẳng vuông góc chung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' + 5t = 6 \\ 2t' + t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 1; 4) \\ N(2; 1; 0) \end{cases}$$

Gọi điểm I là tâm mặt cầu (S) , do đó điểm I là trung điểm MN .

$$\Rightarrow I(2; 1; 2) \Rightarrow R = IM = IN = 2.$$

Suy ra mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau

$$d_1: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}), d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R})$$

. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai

đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là:

A. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{9}{4}$

B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{3}{2}$

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{9}{4}$

D. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với $(d_1), (d_2)$ là mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của $(d_1), (d_2)$. Lấy $A(4-2t; t; 3) \in d_1; B(1; t'; -t') \in d_2$. A, B là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_{d_1}} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_{d_2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5t + t' = -6 \\ -t + 2t' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Khi đó $A(2; 1; 3); B(1; -1; 1)$. Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$, bán kính $R = \frac{3}{2}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và

$\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S) là mặt cầu

có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$.

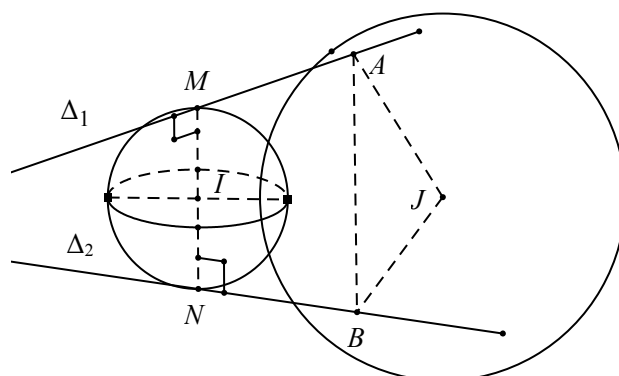
B. $\sqrt{6}$.

C. $\sqrt{24}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 4 + 3t_1 \\ y = 1 - t_1 \\ z = -5 - 2t_1 \end{cases}, \Delta_2 : \begin{cases} x = 2 + t_2 \\ y = -3 + 3t_2 \\ z = t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

Ta có , gọi $u_1(3; -1; -2), u_2(1; 3; 1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng.

$$\text{Gọi } M \in \Delta_1 \Rightarrow M(4 + 3t_1; 1 - t_1; -5 - 2t_1); N \in \Delta_2 \Rightarrow N(2 + t_2; -3 + 3t_2; t_2)$$

$$\text{Suy } \overrightarrow{MN} = (t_2 - 3t_1 - 2; 3t_2 + t_1 - 4; t_2 + 2t_1 + 5)$$

$$\overrightarrow{MN} \text{ là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot u_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot u_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t_1 + t_2 = -6 \\ 2t_1 + 11t_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MN} = (2; -2; 4) \Rightarrow MN = 2\sqrt{6}.$$

Giả sử (S) là mặt cầu tâm J đường kính d tiếp xúc với lần lượt Δ_1, Δ_2 tại A, B . Khi đó $JA + JB \geq AB$.

Hay $d \geq AB \geq MN \Rightarrow d \geq MN$. Vậy đường kính d nhỏ nhất khi $d = MN$. Suy ra mặt cầu (S) có bán

$$\text{kính nhỏ nhất } r = \frac{MN}{2} = \sqrt{6}.$$

Cách khác

Hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa Δ_1, Δ_2 là $(P), (Q)$. Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sẽ tiếp xúc với $(P), (Q)$ nên đường kính cầu là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ hay là khoảng cách từ Δ_2 đến (P) .

Gọi $u_1(3; -1; -2), u_2(1; 3; 1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng, $N(2; -3; 0) \in \Delta_2$.

$$[u_1, u_2] = (5; -5; 10) \Rightarrow \vec{n}_P = (1; -1; 2), \text{ phương trình } (P): x - y + 2z + 7 = 0.$$

$$d((P), (Q)) = d(\Delta_2, (P)) = d(N, (P)) = \frac{|2 - 3 + 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{6}. \text{ Suy ra bán kính cần tìm là } \sqrt{6}$$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y + z + 1 = 0$ **B.** $x + 3y + 5z + 2 = 0$ **C.** $x - 2y - 3 = 0$ **D.** $3x - 2y - 4z - 8 = 0$

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu $I(3; 1; 0)$ lên d , từ đó ta tìm được $H(3; 0; -1)$.

Thấy $IH \leq R$ nên d cắt (S) .

Vậy mặt phẳng cần tìm nhận $\overline{IH} = (0; -1; -1)$ làm VTPT nên pt mặt phẳng là $y + z + 1 = 0$.

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ có tâm I và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 2 = 0$. Gọi tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

A. $\frac{7}{3}$

B. $\frac{11}{3}$

C. 14

D. $\frac{16}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có tâm $I(1; -2; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) ngắn nhất khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \end{cases}$. Khi đó tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \\ 2(1 + 2t) - (-2 - t) + 2(2t) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = -\frac{4}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{11}{3}$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; -2; 1)$; bán kính $R = 4$ và đường

thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

A. $O(0; 0; 0)$

B. $A\left(1; \frac{3}{5}; -\frac{1}{4}\right)$

C. $B(-1; -2; -3)$

D. $C(2; 1; 0)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $H(2t; 1-2t; -1-t)$ là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

$$\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow 2(2t - 1) - 2(3 - 2t) - (-2 - t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow H \left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{3} \right).$$

Ta có:

Vì $IH = \sqrt{10} < 4 = R \Rightarrow d$ cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

Mặt phẳng (Q) bất kì chứa d luôn cắt (S) theo một đường tròn bán kính r .

Khi đó $r^2 = R^2 - d^2(I, (Q)) \geq R^2 - d^2(I, d) = 16 - 10 = 6$.

Do vậy mặt phẳng (P) chứa d cắt mặt cầu theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi

$d(I, (P)) = d(I, d)$ hay mặt phẳng (P) đi qua H nhận $\overrightarrow{IH} = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{8}{3} \right)$ làm vectơ pháp tuyến, do đó

(P) có phương trình $x + 5y - 8z - 13 = 0$.

Khi đó điểm $O(0; 0; 0)$ có khoảng cách đến (P) lớn nhất.