Chương 2
PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG DÃY SỐ

2.1. Phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng

Dưới đây ta trình bày một số phương trình, hệ phương trình sai phân cơ bản và phương pháp giải chúng (không nêu cách chứng minh).

2.1.1. Phương trình sai phân tuyến tính cấp một

Phương trình sai phân tuyến tính cấp một là phương trình sai phân dạng

$$u_1 = \alpha,\ \ au_{n+1} + bu_n = f_n,\ \ n \in \mathbb{N}^*$$

trong đó a, b, α là các hằng số, $a \neq 0$ và f_n là biểu thức của n cho trước.

Dạng 1.

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha,\ \ au_{n+1} + bu_n = 0,\ \ a,\ b,\ \alpha \text{ cho trước },\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Phương pháp giải.

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda + b = 0$ để tìm λ. Khi đó $\boxed{u_n = q\lambda^n}$ (q là hằng số), trong đó q được xác định khi biết $u_1 = \alpha$.

Bài toán 1. Xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu tiên bằng 1 và công bội bằng 2.

Cách giải. Ta có

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

$\lambda - 2 = 0$

$$\boxed{u_{n+1} = 2u_n, \quad u_1 = 1.}$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda = 2$. Vậy $u_n = c2^n$. Từ $u_1 = 1$ suy ra $c = \frac{1}{2}$. Do đó $u_n = 2^{n-1}$.

Dạng 2.

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, \quad a.u_{n+1} + b.u_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó f_n là đa thức theo n.

Phương pháp giải.

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda + b = 0$ ta tìm được λ. Ta có $u_n = \hat{u}_n + u$ trong đó $\hat{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $a.u_{n+1} + b.u_n =$ và u_n^* là nghiệm riêng tùy ý của phương trình không thuần nhất $au_{n+1} + bu_n = f$ Vậy $\hat{u}_n = q\lambda^n$, q là hằng số sẽ được xác định sau.

Ta xác định u_n^* như sau :

a) Nếu $\lambda \neq 1$ thì u_n^* là đa thức cùng bậc với f_n.

b) Nếu $\lambda = 1$ thì $u_n^* = n.g_n$ với g_n là đa thức cùng bậc với f_n.

Thay u_n^* vào phương trình, đồng nhất các hệ số, ta tính được các hệ số c u_n^*.

Bài toán 2. Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = u_n + \boxed{2n,} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cách giải. Phương trình đặc trưng $\lambda - 1 = 0$ có nghiệm $\lambda = 1$. Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó $\hat{u}_n = c.1^n = c$, $u_n^* = n(an + b)$. Thay u_n^* vào phương trình, ta được

$$(n + 1)[a(n + 1) + b] = n(an + b) + 2n.$$

Với $n = 1$, ta được $3a + b = 2$. Với $n = 2$, ta được $5a + b = 4$. Suy ra $a = 1, b = -1$.
Do đó $u_n = n(n - 1)$.
Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^* = c + n(n - 1)$. Vì $u_1 = 2$ nên $2 = c + 1(1 - 1) \Leftrightarrow c = 2$.
Vậy $u_n = 2 + n(n - 1)$, hay $u_n = n^2 - n + 2$.

Dạng 3.

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, \quad au_{n+1} + bu_n = \nu\mu^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Phương pháp giải.

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda + b = 0$ để tìm λ. Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó $\hat{u}_n = c\lambda^n$, c là hằng số chưa được xác định, u_n^* được xác định như sau :

a) Nếu $\lambda \neq \mu$ thì $u_n^* = A\mu^n$.

b) Nếu $\lambda = \mu$ thì $u_n^* = An\mu^n$.

Thay u_n^* vào phương trình, đồng nhất các hệ số tính được các hệ số của u_n^*.
Biết u_1, từ hệ thức $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, tính được c.

Bài toán 3. Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cách giải. Phương trình đặc trưng $\lambda - 3 = 0$ có nghiệm $\lambda = 3$. Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó $\hat{u}_n = c.3^n$ và $u_n^* = a.2^n$.
Thay $u_n^* = a.2^n$ vào phương trình, ta thu được

$$a.2^{n+1} = 3a.2^n + 2^n \Leftrightarrow 2a = 3a + 1 \Leftrightarrow a = -1.$$

Suy ra $u_n = -2^n$. Do đó $u_n = c.3^n - 2n$. Vì $u_1 = 1$ nên $c = 1$. Vậy $u_n = 3^n - 2^n$.

Dạng 4.

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, \quad a.u_{n+1} + b.u_n = f_{1n} + f_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó f_{1n} là đa thức theo n và $f_{2n} = \nu\mu^n$.

Phương pháp giải.

Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^* + u_n^{**}$, trong đó $\hat{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phươ trình thuần nhất $au_{n+1} + bu_n = 0$, u_n^* là một nghiệm riêng của phương trì không thuần nhất $au_{n+1} + bu_n = f_{1n}$, u_n^{**} là nghiệm riêng bất kỳ của phươ trình không thuần nhất $au_{n+1} + bu_n = f_{2n}$.

Bài toán 4. Tìm u_n, biết

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = 2u_n + n^2 + 2.2^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cách giải. Phương trình đặc trưng $\lambda - 2 = 0$ có nghiệm $\lambda = 2$. Ta c $u_n = \hat{u}_n + u_n^* + u_n^{**}$, trong đó $\hat{u}_n = c.2^n$, $u_n^* = an^2 + bn + c$, $u_n^{**} = An.2^n$. Thay u_n^* vào phương trình $u_{n+1} = 2u_n + n^2$, ta được

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2an^2 + 2bn + 2c + n^2.$$

Cho $n = 1$, ta được $2a - c = 1$. Cho $n = 2$, ta được $a - b - c = 4$. C $n = 3$, ta được $2a + 2b + c = -9$. Suy ra $a = -1$, $b = -2$, $c = -3$. V $u_n^* = -n^2 - 2n - 3$.
Thay u_n^{**} vào phương trình $u_{n+1} = 2u_n + 2.2^n$, ta được

$$A(n+1)2^{n+1} = 2An.2^n + 2.2^n \Leftrightarrow 2A(n+1) = 2An + 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{2}.$$

Vậy

$$u_n^{**} = \frac{3}{2}n2^n = 3n2^{n-1}.$$

Do đó $u_n = c.2^n + (-n^2 - 2n - 3) + 3n.2^{n-1}$. Ta có $u_1 = 1$ nên $1 = 2c - 2 + 3$ = $c = 0$.
Vậy $u_n = 3n.2^{n-1} - n^2 - 2n - 3$.

2.1.2. Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai

Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai là phương trình sai phân dạng

$$u_1 = \alpha,\ u_2 = \mu,\ \ au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = g_n,\ \ n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó a, b, c, ν, μ là các hằng số, $a \neq 0$ và g_n là biểu thức chứa n cho trước.

Dạng 1.

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha,\ u_2 = \mu,\ \ au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Phương pháp giải.

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tìm λ.

a) Nếu λ_1 và λ_2 là hai nghiệm thực khác nhau thì $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$, trong đó A và B được xác định khi biết u_1 và u_2.

b) Nếu λ_1 và λ_2 là nghiệm thực kép, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ thì $u_n = (A + B.n)\lambda^n$, trong đó A và B được xác định khi biết u_1 và u_2.

c) Nếu λ là nghiệm phức, $\lambda = x + iy$, thì ta đặt

$$r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},\quad \varphi \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Lúc đó $\lambda = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $u_n = r^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)$, trong đó A và B được xác định khi biết u_1 và u_2.

Bài toán 1. Tìm u_n, biết

$$u_1 = 0,\ \ u_2 = 0,\ \ u_{n+1} - u_n + u_{n-1} = 0,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cách giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ có các nghiệm phức

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có

$$r = |\lambda| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}, \quad \varphi \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy

$$\lambda = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Suy ra

$$u_n = A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Ta có

$$u_1 = 1 \Rightarrow A\cos\frac{\pi}{3} + B\sin\frac{\pi}{3} = 1 \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow A + B\sqrt{3} = 2, \quad (1$$

$$u_2 = 0 \Rightarrow A\cos\frac{2\pi}{3} + B\sin\frac{2\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{-A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow -A + B\sqrt{3} = 0. \quad (2$$

Kết hợp (1) và (2) ta được hệ phương trình có nghiệm

$$A = 1, \quad B = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy

$$u_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Dạng 2.

Tìm u_n, biết rằng

$$u_1 = \alpha, \quad u_2 = \beta, \quad au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = f_n, \quad n \geq 2,$$

trong đó $a \neq 0$, f_n là đa thức theo n cho trước.

Phương pháp giải.

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ để tìm λ. Ta có $u_n = \hat{u}_n + u$ trong đó $\hat{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $au_{n+1} + bu_n$ $cu_{n-1} = 0$ và u_n^* là một nghiệm riêng tùy ý của phương trình không thuần nh

$$au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = f_n \quad (f_n \not\equiv 0).$$

Theo Dạng 1 ta tìm được $\hat{u}_n$, trong đó hệ số A và B chưa được xác định, u_n^* được xác định như sau :

a) Nếu $\lambda \neq 1$ thì u_n^* là đa thức cùng bậc với f_n.

b) Nếu $\lambda = 1$ là nghiệm đơn thì $u_n^* = ng_n$, g_n là đa thức cùng bậc với f_n.

c) Nếu $\lambda = 1$ là nghiệm kép thì $u_n^* = n^2.g_n$, g_n là đa thức cùng bậc với f_n.

Thay u_n^* vào phương trình, đồng nhất các hệ số, tính được các hệ số của u_n^*.
Biết u_1, u_2, từ hệ thức $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$ tính được A, B.

Bài toán 2. Xác định u_n, biết rằng

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0, \quad u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = n + 1, \quad n \geq 2.$$

Cách giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ có nghiệm kép $\lambda = 1$. Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó $\hat{u}_n = (A + Bn) \cdot 1^n = A + Bn$ và $u_n^* = n^2(an + b)$. Thay u_n^* vào phương trình, ta được

$$(n+1)^2[a(n+1) + b] - 2n^2(an + b) + (n-1)^2[a(n-1) + b] = n + 1.$$

Cho $n = 1$, ta được

$$4(2a + b) - 2(a + b) = 2 \Leftrightarrow 3a + b = 1. \tag{3}$$

Cho $n = 2$, ta được

$$9(3a + b) - 8(2a + b) + (a + b) = 3 \Leftrightarrow 12a + 2b = 3. \tag{4}$$

Kết hợp (3) và (4), ta được hệ phương trình có nghiệm

$$a = \frac{1}{6}, \ b = \frac{1}{2}.$$

Vậy

$$u_n^* = n^2\left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\right).$$

Do đó

$$u_n = \hat{u}_n + u_n^* = A + Bn + n^2\left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\right).$$

Ta có

$$u_1 = 1 \Rightarrow A + B + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow A + B = \frac{1}{3}, \tag{5}$$

$$u_2 = 0 \Rightarrow A + 2B + 4.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow A + 2B = \frac{-10}{3}. \tag{6}$$

Giải hệ (5) và (6), ta được

$$A = 4, \ \ B = \frac{-11}{3}.$$

Vậy

$$u_n = 4 - \frac{11}{3}n + n^2\Big(\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\Big).$$

Dạng 3.

Tìm u_n, biết rằng

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, \ \ au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = \nu\mu^n, \ \ n \geq 2.$$

Phương pháp giải.

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tìm λ.
Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó $\hat{u}_n$ được tìm như dạng 1, hệ số A và B chưa đượ
xác định, u_n^* được xác định như sau :

a) Nếu $\lambda \neq \mu$ thì $u_n^* = k\mu^n$.

b) Nếu nghiệm đơn $\lambda = \mu$ thì $u_n^* = kn\mu^n$.

c) Nếu nghiệm kép $\lambda = \mu$ thì $u_n^* = kn^2\mu^n$.

Thay u_n^* vào phương trình, dùng phương pháp đồng nhất các hệ số sẽ tính đượ
hệ số k.
Biết u_1, u_2, từ hệ thức $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$ tính được A, B.

Bài toán 3. Tìm u_n, biết rằng

$$u_1 = 0, \ \ u_2 = 0, \ \ u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 2.2^n, \ \ n \geq 2.$$

Cách giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ có nghiệm kép $\lambda = 1$.
Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó $\hat{u}_n = (A + Bn)1^n = A + Bn$ và $u_n^* = k.2^n$.
Thay u_n^* vào phương trình, ta được

$$k.2^{n+1} - 2k.2^n + k.2^{n-1} = 2.2^n \Leftrightarrow k = 6.$$

Vậy $u_n^* = 6.2^n = 2.2^{n+1}$.
Do đó $u_n = \hat{u}_n + u_n^* = A + Bn + 2.2^{n+1}$
Ta có

$$u_1 = 1 \Rightarrow 1 = A + B + 12$$

$$u_2 = 0 \Rightarrow 0 = A + 2B + 24$$

Từ đó, ta được $A = 2$, $B = -13$. Vậy

$$u_n = 2 - 13n + 2.2^{n+1}.$$

Dạng 4.

Tìm u_n, biết

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, \;\; au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = f_n + g_n, \;\; n \geq 2,$$

trong đó $a \neq 0$, f_n là đa thức theo n và $g_n = \nu\mu^n$.

Phương pháp giải.

Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^* + u_n^{**}$ trong đó $\hat{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0$, u_n^* là nghiệm riêng tùy ý của phương trình không thuần nhất $au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = f_n$, u_n^{**} là nghiệm riêng tùy ý của phương trình không thuần nhất $au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = g_n$.

Bài toán 4. Tìm u_n, biết rằng

$$u_1 = 1, u_2 = 0, \;\; u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = n + 2^n, \;\; n \geq 2.$$

Cách giải. Giải phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, ta được $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Ta có

$$u_n = \hat{u}_n + u_n^* + u_n^{**},$$

trong đó

$$\hat{u}_n = A.(-1)^n + B.3^n, \;\; u_n^* = an + b, \;\; u^{**} = k.2^n.$$

Thay u_n^* và u_n^{**} vào phương trình $u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = n$, ta được

$$a(n+1) + b - 2(an + b) - 3[a(n-1) + b] = n \Leftrightarrow (4a+1)n - 4(a-b) = 0.$$

Vậy

$$a = b = -\frac{1}{4}.$$

Do đó

$$u_n^* = -\frac{1}{4}(n+1).$$

Thay u_n^{**} vào phương trình $u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = 2^n$, ta được

$$k.2^{n+1} - 2.k.2^n - 2.k.2^{n-1} = 2^n \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}.$$

Do đó

$$u_n^{**} = -\frac{2}{3}.2^n = -\frac{1}{3}.2^{n+1}.$$

Vậy

$$u_n = \hat{u}_n + u_n^* + u_n^{**} = A.(-1)^n + B.3^n - \frac{1}{4}(n+1) - \frac{1}{3}.2^{n+1}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} u_1 = 1 &\Rightarrow 1 = -A + 3B - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \Rightarrow -A + 3B = \frac{17}{6}, \qquad (\\ u_2 = 0 &\Rightarrow 0 = A + 9B - \frac{3}{4} - \frac{8}{3} \Rightarrow A + 9B = \frac{41}{12}. \qquad (\end{aligned}$$

Giải hệ phương trình (7) và (8), ta được

$$A = -\frac{61}{48}, \quad B = \frac{25}{48}.$$

Vậy

$$u_n = -\frac{61}{48}.(-1)^n + \frac{25}{48}.3^n - \frac{1}{4}.(n+1) - \frac{1}{3}.2^{n+1}.$$

Dạng 5.

Tìm u_n, biết rằng

$$u_1 = \alpha, \quad u_2 = \beta, \quad au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = \nu\cos n + \mu\sin n \quad (a \neq 0), \quad n \geq$$

Phương pháp giải.

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tìm λ.

Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó $\hat{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, xác định như ở dạng 1, các hệ số A và B chưa được xác định, $u_n^* = k\cos n + l\sin n$.
Thay u_n^* vào phương trình, đồng nhất các hệ số, tính được k , l.
Từ hệ thức $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$ và u_1, u_2, ta tính được A và B.

Bài toán 5. Tìm u_n, biết rằng

$$u_1 = 1,\ \ u_2 = 0,\ \ u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \sin n,\ \ n \geq 2.$$

Cách giải. Giải phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, ta được nghiệm kép $\lambda = 1$.
Ta có $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó

$$\hat{u}_n = (A + Bn)\cdot 1^n = A + Bn,\ \ u_n^* = k\cos n + l\sin n.$$

Thay u_n^* vào phương trình $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \sin n$, ta thu được
$k\cos(n+1)+l\sin(n+1)-2(k\cos n+l\sin n)+k\cos(n-1)+l\sin(n-1) = \sin n$

$\Leftrightarrow k[\cos(n+1) + \cos(n-1)] + l[\sin(n+1) + \sin(n-1)] - 2k\cos n - 2l\sin n = \sin n$

$\Leftrightarrow 2k\cos n\cos 1 - 2k\cos n + 2l\sin n\cos 1 - 2l\sin n = \sin n$

$\Leftrightarrow 2k\cos n(\cos 1 - 1) + 2l\sin n(\cos 1 - 1) = \sin n$

$\Leftrightarrow 2k(\cos 1 - 1)\cos n + [2l(\cos 1 - 1) - 1]\sin n = 0.$

Vì $\cos 1 - 1 \neq 0$ nên $k = 0$ và $l = \dfrac{1}{2(\cos 1 - 1)}$. Vậy $u_n^* = \dfrac{\sin n}{2(\cos 1 - 1)}$.

Do đó $u_n = \hat{u}_n + u_n^* = A + Bn + \dfrac{\sin n}{2(\cos 1 - 1)}$.

Ta có

$$u_1 = 1 \Rightarrow 1 = A + B + \frac{\sin 1}{2(\cos 1 - 1)}, \tag{9}$$

$$u_2 = 0 \Rightarrow 0 = A + 2B + \frac{\sin 2}{2(\cos 1 - 1)}. \tag{10}$$

Giải hệ phương trình (9) và (10), ta được

$$A = \frac{2\sin 1 - 4\cos 1 - \sin 2 - 4}{2(1 - \cos 1)},$$

$$B = \frac{-\sin 1 + 2\cos 1 + \sin 2 - 2}{2(1 - \cos 1)}.$$

Vậy nên

$$u_n = \frac{2\sin 1 - 4\cos 1 - \sin 2 - 4 + (-\sin 1 + 2\cos 1 + \sin 2 - 2)n - \sin n}{2(1 - \cos 1)}$$

2.1.3. Phương trình sai phân tuyến tính cấp ba

Phương trình sai phân tuyến tính cấp ba là phương trình sai phân dạng

$$u_1 = \alpha,\ u_2 = \beta, u_3 = \gamma,\ \ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + du_{n-1} = f_n,\ n \geq 2, \quad ($$

trong đó $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ là các hằng số, $a \neq 0$ và f_n là biểu thức của n c trước.

Phương trình sai phân tuyến tính cấp ba luôn giải được vì phương trình b ba luôn giải được. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính c ba có dạng $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó u_n^* là nghiệm riêng của phương trình tuy tính không thuần nhất, $\hat{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thu nhất.

Phương pháp giải.

a) Xét phương trình đặc trưng

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0. \quad ($$

(i) Nếu (2) có ba nghiệm thực $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ phân biệt thì

$$\hat{u}_n = \beta_1.\lambda_1^n + \beta_2.\lambda_2^n + \beta_3.\lambda_3^n.$$

(ii) Nếu (2) có một nghiệm thực bội 2 và một nghiệm đơn ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq$ thì

$$\hat{u}_n = (\beta_1 + \beta_2.n)\lambda_1^n + \beta_3.\lambda_3^n.$$

(iii) Nếu (2) có một nghiệm thực bội 3 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) thì

$$\hat{u}_n = (\beta_1 + \beta_2.n + \beta_3.n^2)\lambda_1^n.$$

$$B = \frac{-\sin 1 + 2\cos 1 + \sin 2 - 2}{2(1-\cos 1)}.$$

Vậy nên

$$u_n = \frac{2\sin 1 - 4\cos 1 - \sin 2 - 4 + (-\sin 1 + 2\cos 1 + \sin 2 - 2)n - \sin n}{2(1-\cos 1)}$$

2.1.3. Phương trình sai phân tuyến tính cấp ba

Phương trình sai phân tuyến tính cấp ba là phương trình sai phân dạng

$$u_1 = \alpha,\ u_2 = \beta, u_3 = \gamma,\ \ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + du_{n-1} = f_n,\ n \geq 2, \quad ($$

trong đó $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ là các hằng số, $a \neq 0$ và f_n là biểu thức của n c trước.

Phương trình sai phân tuyến tính cấp ba luôn giải được vì phương trình b ba luôn giải được. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính c ba có dạng $u_n = \hat{u}_n + u_n^*$, trong đó u_n^* là nghiệm riêng của phương trình tuy tính không thuần nhất, $\hat{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thu nhất.

Phương pháp giải.

a) Xét phương trình đặc trưng

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0. \quad ($$

(i) Nếu (2) có ba nghiệm thực $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ phân biệt thì

$$\hat{u}_n = \beta_1.\lambda_1^n + \beta_2.\lambda_2^n + \beta_3.\lambda_3^n.$$

(ii) Nếu (2) có một nghiệm thực bội 2 và một nghiệm đơn ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq$ thì

$$\hat{u}_n = (\beta_1 + \beta_2.n)\lambda_1^n + \beta_3.\lambda_3^n.$$

(iii) Nếu (2) có một nghiệm thực bội 3 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) thì

$$\hat{u}_n = (\beta_1 + \beta_2.n + \beta_3.n^2)\lambda_1^n.$$

(iv) Nếu (2) có một nghiệm thực λ_1 và hai nghiệm phức liên hợp

$$\lambda_{2,3} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

thì

$$\hat{u}_n = \beta_1\lambda_1^n + r^n(\beta_2.\cos n\varphi + \beta_3.\sin n\varphi).$$

b) Gọi u_n^* là một nghiệm riêng của (1).
*Xét f_n là đa thức của n. Ta có
- Nếu $\lambda \neq 1$ thì u_n^* là đa thức cùng bậc với f_n,
- Nếu $\lambda = 1$ (nghiệm đơn) thì $u_n^* = n.g_n$, g_n là đa thức cùng bậc với f_n,
- Nếu $\lambda = 1$ (bội 2) thì $u_n^* = n^2.g_n$, g_n là đa thức cùng bậc với f_n,
- Nếu $\lambda = 1$ (bội 3) thì $u_n^* = n^3.g_n$, g_n là đa thức cùng bậc với f_n.

*Xét $f_n = \nu\mu^n$ (hàm mũ). Ta có
- Nếu $\lambda \neq \mu$ thì $u_n^* = k.n.\mu^n$.
- Nếu nghiệm đơn $\lambda = \mu$ thì $u_n^* = k.\mu^n$.
- Nếu nghiệm bội $\lambda = \mu$ (bội s) thì $u_n^* = k.n^s.\mu^n$.

Bài toán 6. Tìm x_n biết rằng

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 3,\ \ x_n = 7x_{n-1} - 11x_{n-2} + 5x_{n-3},\ \ n \geq 4.$$

Cách giải. Xét phương trình đặc trưng $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$, hay

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0.$$

Phương trình này có ba nghiệm thực

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = 5.$$

Vậy $x_n = c_1 + c_2.n + c_3.5^n$.
Cho $n = 1,\ \ n = 2,\ \ n = 3$ và giải hệ phương trình tạo thành, ta được

$$c_1 = -\frac{1}{16},\ \ c_2 = \frac{3}{4},\ \ c_3 = \frac{1}{16}.$$

Vậy

$$x_n = -\frac{1}{16} + \frac{3}{4}(n-1) + \frac{1}{16}.5^{n-1},$$

hay

$$x_n = \frac{1}{16}(5^{n-1} - 1) + \frac{3}{4}(n - 1).$$

Bài toán 7. Cho dãy số nguyên $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n - a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng tồn tại các hằng số nguyên M sao cho các số $M + 4a_{n+1}a_n$ đều là những số chính phương.

Cách giải. Đặt

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = u_n.$$

Khi đó, từ điều kiện bài ra ta có hệ thức $u_n = u_{n-1} + 2a_n$. Do đó

$$\begin{aligned} u_n^2 &= (u_{n-1} + 2a_n)^2 = u_{n-1}^2 + 4a_nu_{n-1} + 4a_n^2 \\ &= u_{n-1}^2 + 4(a_{n+1} - a_n - a_{n-1})a_n + 4a_n^2 \\ &= u_{n-1}^2 + 4a_na_{n+1} - 4a_na_{n-1}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$u_n^2 - 4a_{n+1}a_n = u_{n-1}^2 - 4a_na_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $u_n^2 - 4a_{n+1}a_n = M$ và khi đó hiển nhiên rằng

$$M + 4a_{n+1}a_n = u_n^2.$$

2.2. Hệ phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng

Trong mục này ta chủ yếu xét hệ phương trình sai phân dạng

$$\begin{cases} x_{n+1} = px_n + qy_n, & x_1 = a, \\ y_{n+1} = rx_n + sy_n, & y_1 = b. \end{cases} \quad (1)$$

Phương pháp giải.

Trong (1), thay n bởi $n+1$, ta nhận được

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= px_{n+1} + qy_{n+1} \\ &= px_{n+1} + q(rx_n + sy_n) = px_{n+1} + qrx_n + s(qy_n) \\ &= px_{n+1} + qrx_n + s(x_{n+1} - px_n). \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_{n+2} - (p+s)x_{n+1} + (ps - qr)x_n = 0, \text{ trong đó } x_1 = a.$$

Từ (1), ta lại có $x_2 = px_1 + qy_1 = pa + qb$. Như vậy ta được phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$x_1 = a,\ x_2 = pa + qb,\ \ x_{n+1} - (p+s)x_n + (ps - qr)x_{n-1} = 0,\ \ n \geq 2.$$

Giải phương trình này ta tìm được x_n. Thay x_n vào (1), ta tìm được y_n.

Bài toán 1. Tìm x_n, y_n, biết

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2y_n, & x_1 = 1, \\ y_{n+1} = x_n + y_n, & y_1 = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Cách giải. Trong (2), thay n bởi $n+1$, ta có

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 4x_{n+1} - 2y_{n+1} = 4x_{n+1} - 2(x_n + y_n) \\ &= 4x_{n+1} - 2x_n - 2y_n = 4x_{n+1} - 2x_n + x_{n+1} - 4x_n. \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0.$$

Từ (2), ta có $x_2 = 4x_1 - 2y_1 = 4.1 - 2.1 = 2$.
Ta thu được phương trình bậc hai thuần nhất

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 0,\ \ n \geq 2.$$

Giải phương trình này, ta được nghiệm $x_n = 2^{n-1}$. Thay x_n vào phương trình thứ nhất của (2), ta có

$$2^n = 4.2^{n-1} - 2y_n \Leftrightarrow 2y_n = 2^n \Leftrightarrow y_n = 2^{n-1}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x_n = 2^{n-1}, \\ y_n = 2^{n-1}. \end{cases}$$