

LÝ THUYẾT**CHỦ ĐỀ 2: LOGARIT****1. Định nghĩa**

- Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và được kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết như sau: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.
- Một số chú ý:
Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^\alpha > 0, \forall a$.
Cơ số của logarit phải dương và khác 1 ($a \neq 1$).
Một số công thức logarit theo định nghĩa:

$$\oplus \log_a 1 = 0;$$

$$\oplus \log_a a = 1;$$

$$\oplus \log_a a^b = b, \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\oplus a^{\log_a b} = b, \forall b \in \mathbb{R}, b > 0$$

2. Các tính chất của logarit

- So sánh hai logarit cùng cơ số**
Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c
 - Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$
 - Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$
 - Ta có $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$
- Logarit của một tích:** $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- Logarit của một thương:**
 - $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
 - Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ thì $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.
- Logarit của một lũy thừa**
 - $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$
 - Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
- Công thức đổi cơ số**
 - $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
 - Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b (\alpha \neq 0)$

3. Logarit tự nhiên và logarit thập phân

- Logarit tự nhiên** (hay còn được gọi là **logarit Nepe**) là logarit cơ số e , được viết là: $\log_e b = \ln b$
- Logarit thập phân** là logarit cơ số 10, được viết là: $\log_{10} b = \log b = \lg b$.

DẠNG 2

Biến đổi Logarit

Câu 1: Cho các số thực dương a, b, x thỏa mãn $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $x = 4a + 7b$. B. $x = 4a - 7b$. C. $x = a^4 b^7$. D. $x = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{7}}$.

Câu 2: Cho $a > 1, a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) + a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_2 x = 4^a$. B. $\log_2 x = a + 1$. C. $\log_2 x = 2^{a+1}$. D. $\log_2 x = 4^{a+1}$.

Câu 3: Cho $\log_a bc = x, \log_b ca = y$ và $\log_c ab = \frac{mx + ny + 2}{pxy - 1}$, với m, n, p là các số nguyên. Tính

$$S = m + 2n + 3p$$

- A. $S = 6$. B. $S = 9$. C. $S = 0$. D. $S = 3$.

Câu 4: Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_2 a = \frac{b}{4}, \log_a b = \frac{16}{b}$. Tính ab ?

- A. $ab = 256$. B. $ab = 16$. C. $ab = 32$. D. $ab = 64$.

Câu 5: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x + y)$. Tính $\frac{y}{x}$?

- A. $\frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{y}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{y}{x} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho $\log_a(bc) = 2, \log_b(ca) = 3$. Tính $S = \log_c(ab)$.

- A. $S = \frac{7}{5}$. B. $S = \frac{7}{6}$. C. $S = \frac{5}{7}$. D. $S = \frac{6}{7}$.

Câu 7: Gọi a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3(1 + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}) > 2\log_2 \sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $P = \log_2(2018a)$.

- A. 14. B. 22. C. 19. D. 16.

Câu 8: Cho các số thực dương a, b khác 1 và số thực dương x thỏa mãn $\log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\log_a x = b^{\frac{\log_b(\log_a b)}{a}}$. B. $\log_a x = a^{\frac{\log_b(\log_a b)}{a}}$. C. $\log_a x = b^{\frac{\log_a(\log_b b)}{b}}$. D. $\log_a x = a^{\frac{\log_a(\log_b b)}{b}}$.

Câu 9: Cho các số thực dương x, y, z, t, a, b, c thỏa mãn $\frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t$ và $x \cdot y = z^2 \cdot t^2$. Tính

$$S = a + b - 2c$$

- A. $S = 4$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = -2$. D. $S = 2$.

Câu 10: Cho $0 < a \neq 1$ tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008 \cdot 2017^2 \log_a 2019$

- A. $n = 2016$. B. $n = 2019$. C. $n = 2017$. D. $n = 2020$.

Câu 11: Xét số nguyên dương a và số thực $b > 0$ thỏa mãn $\log_2 \left(\log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{a+b} \right) \right) \right) = 0$. Tìm số a biết rằng $\log_2 \left(\frac{a+b}{ab} \right) \in [2016; 2017]$.

- A. $a = 2016$. B. $a = 2017$. C. $a = 2027$. D. $a = 2026$.

Câu 12: Cho các số thực dương a, x, y, z thỏa mãn $4z \geq y^2, a > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + x^2z) + \sqrt{4z - y^2}$.

- A. -4 . B. $-\frac{25}{16}$. C. $-\frac{25}{4}$. D. $-\frac{9}{4}$.

Câu 13: Với a là số dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng:

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$. C. $\ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Câu 14: Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) + \ln\left(\frac{3}{a}\right)$ bằng:

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln 15$. C. $\ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Câu 15: Cho ba số thực dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a + b + c = 64$. Giá trị của biểu thức $P = 3\log_2(ab + bc + ca) - \log_2(abc)$ bằng:

- A. 18. B. 6. C. 24. D. 8

Câu 16: Cho 3 số $2017 + \log_2 a$; $2018 + \log_3 a$; $2019 + \log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Công sai của cấp số cộng này bằng:

- A. 1. B. 12. C. 9. D. 20.

Câu 17: cho các số thực dương a, b, c lớn hơn 1, đặt $x = \log_a b + \log_b a, y = \log_b c + \log_c b$ và $z = \log_c a + \log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_x + \log_y \geq \log(x + 2y^3)$. Giá trị nhỏ nhất của: $\log_2 x - \log_3 y$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 19: Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $\log_3(3^{a+1} - 1) = 2a + \log_{\frac{1}{3}} 2$ và $\log_3(3^{b+1} - 1) = 2b + \log_{\frac{1}{3}} 2$. Tính tổng $S = 27^a + 27^b$.

- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 45$. C. $S = 204$. D. $S = 180$.

Câu 20: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{120}{\log_3 x}$ với $0 < x \neq 1$

- A. $n = 15$. B. $n = 20$. C. $n = 12$. D. $n = 10$.

- Câu 21:** Với mỗi số thực dương x , khi viết x dưới dạng thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $\lceil \log x \rceil + 1$. Cho biết $\log 2 = 0,30103$. Hỏi số 2^{2017} khi viết trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số? (Kí hiệu $\lceil x \rceil$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).
- A. 607. B. 606. C. 609. D. 608.
- Câu 22:** Tập hợp các số thực x để hàm số $f(x) = \sqrt{1 - \log_m^2(nx)}$ ($m > 1, n > 0$) xác định là một đoạn có độ dài bằng $L = \frac{1}{2016}$. Giá trị của $\log_{2016} \frac{m^2 - 1}{mn}$ là?
- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 23:** Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $2\log_x(2y) = 2\log_{2x}(4z) = \log_{2x^4}(8yz) = 2$. Giá trị của xy^5z được viết dưới dạng $2^{-\frac{p}{q}}$ trong đó p, q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $p + q$ bằng?
- A. 49. B. 48. C. 50. D. 52.
- Câu 24:** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_5 - 2\log u_2 = 2\left(1 + \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1}\right)$ và $u_n = 3u_{n-1}$, với mọi $n \geq 2$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n < 10^{100}$ là
- A. 225. B. 226. C. 224. D. 227.
- Câu 25:** Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .
- A. 1. B. Vô số. C. 2. D. 0.
- Câu 26:** Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn $\log_2 \left[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) \right] = \log_3 \left[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y) \right] = \log_5 \left[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z) \right] = a > 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $z < x < y$. B. $x < y < z$. C. $y < z < x$. D. $z < y < x$.
- Câu 27:** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 10^{81}$ và $(\log_{10} x) \cdot (\log_{10} yz) + (\log_{10} y) \cdot (\log_{10} z) = 468$. Tính giá trị của biểu thức $S = \sqrt{(\log_{10} x)^2 + (\log_{10} y)^2 + (\log_{10} z)^2}$.
- A. 75. B. 936. C. 625. D. 25.
- Câu 28:** Cho hai số thực dương $x, y \neq 1$ thỏa mãn $\log_x y = \log_y x$ và $\log_x(x-y) = \log_y(x+y)$. Tính giá trị biểu thức $S = x^4 - x^2 + 1$.
- A. $S = 2$. B. $S = 3$. C. $S = 4$. D. $S = 5$.
- Câu 29:** Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực $(x; y; z)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện dưới đây $2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128$ và $(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2$.
- A. 8. B. 4. C. 3. D. 2.

- Câu 30:** Cho $a > 0; b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ bằng
- A. $\frac{3}{2}$. B. 5. C. 4. D. $\frac{15}{4}$.
- Câu 31:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn $\log_a b + 6\log_b a = 5$ và $2 \leq a; b \leq 2005$.
- A. 54. B. 43. C. 53. D. 44.
- Câu 32:** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $3\log_x(3y) = 3\log_{3x}(9z) = \log_{3x^4}(27yz) \neq 0$. Biết $xy^4z = 3^{-\frac{a}{b}}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $a + b$ bằng
- A. 54. B. 43. C. 53. D. 36.
- Câu 33:** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}}(2y) = \log_{\sqrt{2x}}(4z) = \log_{2x^4}(8yz) \neq 0$. Giá trị của biểu thức $\log x + 5\log y + \log z$ bằng
- A. $-\frac{35\log 2}{6}$. B. $-\frac{35\log 2}{12}$. C. $-\frac{43\log 2}{6}$. D. $-\frac{43\log 2}{12}$.
- Câu 34:** Gọi S là tập hợp tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử $(x; y)$ thuộc S . Xác suất để phần tử chọn ra thỏa mãn $\left[\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ và $\left[\log_5\left(\frac{1}{y}\right)\right]$ đều là các số nguyên chẵn bằng
- A. $\frac{5}{36}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{5}{12}$.
- Câu 35:** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $\log^2 a + (4\sin b + 2)\log a + 4\sin b + 5 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a + b$ bằng:
- A. $\frac{1}{1000} + \frac{\pi}{2}$. B. $\frac{1}{1000} + \frac{3\pi}{2}$. C. $10 + \frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{1}{10} + \frac{\pi}{2}$.
- Câu 36:** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $16^a - (2\sin b + 1)2^{2a+1} + 4\sin b + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $a + b$ bằng:
- A. $\log_3 4 + \frac{\pi}{2}$. B. $\log_4 3 + \frac{3\pi}{2}$. C. $\log_3 4 + \frac{3\pi}{2}$. D. $\log_4 3 + \frac{\pi}{2}$.
- Câu 37:** Có hai cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{225} x + \log_{64} y = 4$ và $\log_x 225 - \log_y 64 = 1$ là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Giá trị biểu thức $\log_{30}(x_1 y_1 x_2 y_2)$ bằng:
- A. 12. B. 15. C. 8. D. 36.
- Câu 38:** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = a$ và công bội $q = b$. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\log_8 u_1 + \log_8 u_2 + \dots + \log_8 u_{12} = 2006$.
- A. 46. B. 91. C. 45. D. 90.
- Câu 39:** Tìm tập hợp tất cả các số thực m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) = 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

- A. $\{\pm 5\}$. B. $\{\pm 7, \pm 5, \pm 1\}$. C. $\{\pm 5, \pm 1\}$. D. $\{\pm 1\}$.

Câu 40: Giá trị của tham số thực m để tồn tại duy nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{2019}(x+y) \leq 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1$ là

- A. $m = \frac{-1}{2}$. B. $m = 0$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{-1}{3}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = \log_2 \frac{mx}{2-x}$ với m là số thực dương. Tìm giá trị thực của m , biết rằng với mọi số thực $a, b \in (0; 2)$ thỏa mãn $a+b=2$ ta luôn có $f(a)+f(b)=3$.

- A. $m = 3$. B. $m = 8$. C. $m = 2\sqrt{2}$. D. $m = 9$.

Câu 42: Với mỗi cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(2x+y) = \log_4(x^2+xy+7y^2)$ có bao nhiêu số thực z thỏa mãn $\log_3(3x+y) = \log_9(3x^2+4xy+zy^2)$.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.A	5.A	6.A	7.B	8.A	9.D	10.A
11.C	12.B	13.C	14.B	15.A	16.A	17.D	18.C	19.D	20.A

21.D	22.A	23.A	24.A	25.C	26.C	27.A	28.A	29.B	30.D
31.A	32.D	33.C	34.B	35.A	36.D	37.A	38.A	39.C	40.A
41.C	42.A								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Ta có: $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 (a^4 b^7) \Leftrightarrow x = a^4 b^7$.

Câu 2: Chọn D

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow \log_4 x = \frac{1}{2}t$. Ta có: $\log_2 \left(\frac{1}{2}t\right) = \log_4 t + a \Leftrightarrow \log_2 t = 2a + 2 \Leftrightarrow t = 4^{a+1}$.

Vậy: $\log_2 x = 4^{a+1}$.

Câu 3: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} x = \log_a bc \\ y = \log_b ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\log_c bc}{\log_c a} \\ y = \frac{\log_c ca}{\log_c b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \log_c a - \log_c b = 1 \\ \log_c a - y \log_c b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_c a = \frac{y+1}{xy-1} \\ \log_c b = \frac{x+1}{xy-1} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác, } \log_c ab = \log_c a + \log_c b = \frac{x+y+2}{xy-1}. \text{ Do đó } \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ p=1 \end{cases} \Rightarrow S = m + 2n + 3p = 6.$$

Câu 4: Chọn A

$$\text{Ta có: } \log_2 a \cdot \log_a b = \frac{b}{4} \cdot \frac{16}{b} \Leftrightarrow \log_2 b = 4 \Leftrightarrow b = 2^4 \Leftrightarrow b = 16$$

$$\Rightarrow \log_2 a = 4 \Leftrightarrow a = 16 \Rightarrow a \cdot b = 16^2 \Leftrightarrow ab = 256.$$

Câu 5: Chọn A

Đặt $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16} (x+y) = t$. Khi đó, ta có hệ sau :

$$\begin{cases} x = 9^t \\ y = 12^t \\ x + y = 16^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 12^t = 16^t \quad (1)$$

Xét phương trình (1) chia hai vế cho $9^t > 0$ ta được:

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t = \left(\frac{4}{3}\right)^{2t} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2t} - \left(\frac{4}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (N) \\ \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} (L) \end{cases}. \text{ Ta có } \frac{y}{x} = \frac{12^t}{9^t} = \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Câu 6: Chọn A

$$\text{Đặt } x = \log_c a, y = \log_c b.$$

$$\text{Ta có } \log_a(bc) = 2 \Leftrightarrow \log_a b + \log_a c = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_c b}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c a} = 2 \Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = 2.$$

$$\log_b(ca) = 3 \Leftrightarrow \log_b c + \log_b a = 3 \Leftrightarrow \frac{\log_c a}{\log_c b} + \frac{1}{\log_c b} = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 3.$$

$$\text{Do đó ta có hệ } \begin{cases} \frac{y+1}{x} = 2 \\ \frac{x+1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = 2x \\ x+1 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Thay vào } S = \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b = \frac{7}{5}.$$

Câu 7: Chọn B

Đặt $2\log_2 \sqrt{a} = t \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow a = 2^t$. Khi đó bất phương trình trở thành

$$3\log_3 \left(1 + 2^{\frac{t}{2}} + 2^{\frac{t}{3}} \right) > t \Leftrightarrow 1 + 2^{\frac{t}{2}} + 2^{\frac{t}{3}} > 3^{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^t + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t > 1 \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^t + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t, t \in \mathbb{R}.$$

Ta có $f'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^t \ln \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t \ln \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} < 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Nhận thấy $f(12) = 1$ nên ta có:

$$(1) \Leftrightarrow f(t) > f(12) \Leftrightarrow t < 12 \Rightarrow 2\log_2 \sqrt{a} < 12 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 2^6 \Leftrightarrow a < 2^{12}.$$

Do đó số a nguyên dương lớn nhất là $2^{12} - 1$.

Suy ra $P = \log_2 [2018(2^{12} - 1)] \approx 22,9783$. Vậy phần nguyên của P là 22.

Câu 8: Chọn A

$$\text{Ta có } \log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x) = k \Leftrightarrow \begin{cases} \log_b x = a^k \\ \log_a x = b^k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b^{a^k} \\ x = a^{b^k} \end{cases} \Rightarrow b^{a^k} = a^{b^k} = a^k \log_a b \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a} \right)^k = \log_a b \Leftrightarrow k = \log_{\frac{b}{a}}(\log_a b) \Rightarrow \log_a x = b^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$$

Câu 9: Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \ln x = \ln t^a \Leftrightarrow x = t^a \\ \ln y = \ln t^b \Leftrightarrow y = t^b \\ \ln z = \ln t^c \Leftrightarrow z = t^c \end{cases}$$

$$\text{Do đó } xy = z^2 t^2 \Leftrightarrow t^a t^b = (t^c t)^2 \Leftrightarrow t^{a+b} = t^{2(c+1)} \Leftrightarrow a+b = 2(c+1) \Rightarrow S = 2$$

Câu 10: Chọn A

$$\begin{aligned} \log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + 3^3 \log_a 2019 + \dots + n^3 \log_a 2019 &= 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \\ \Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \log_a 2019 &= 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = 1008^2 \cdot 2017^2 \Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = 1008^2 \cdot 2017^2 \Leftrightarrow n = 2016$$

Câu 11: Chọn C

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{a+b} \right) \right) \right) &= 0 \Leftrightarrow \log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{a+b} \right) \right) = 1 \Leftrightarrow \log_{2^b} \left(2^{a+b} \right) = 2^a \Leftrightarrow 2^{a+b} = \left(2^b \right)^{2^a} \\ \Leftrightarrow 2^{a+b} &= 2^{b \cdot 2^a} \Leftrightarrow a+b = b \cdot 2^a. \text{ Do đó :} \\ \log_2 \left(\frac{a+b}{ab} \right) &\in [2016; 2017] \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{a+b}{ab} \right) \in [2016; 2017] \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{b \cdot 2^a}{ab} \right) \in [2016; 2017] \\ \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{b \cdot 2^a}{ab} \right) &\in [2016; 2017] \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2^a}{a} \right) \in [2016; 2017] \end{aligned}$$

Câu 12: Chọn B

$$\text{Ta có: } 4z \geq y^2 \Leftrightarrow z \geq \frac{y^2}{4} \Rightarrow x^3 y^3 + x^2 z \geq x^3 y^3 + \frac{x^2 y^2}{4} \geq 2 \sqrt{x^3 y^3 \cdot \frac{x^2 y^2}{4}} = (xy)^{\frac{5}{2}}.$$

$$\text{Do đó } S \geq \log_a^2(xy) + \log_a(xy)^{\frac{5}{2}} \geq \log_a^2(xy) + \frac{5}{2} \log_a(xy) = \left(\log_a(xy) + \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \geq -\frac{25}{16}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 4z = y^2 \\ x^3 y^3 = \frac{x^2 y^2}{4} \\ \log_a(xy) = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z = y^2 \\ xy = \frac{1}{4} \\ \log_a\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó với } \begin{cases} z = 1 \\ y = 2 \\ x = \frac{1}{8} \\ a = 4^{\frac{4}{5}} \end{cases} \text{ thì } S = -\frac{25}{16}. \text{ Vậy } \min S = -\frac{25}{16}.$$

Câu 13: Chọn C

$$\text{Ta có } \ln(5a) - \ln(3a) = \ln \frac{5a}{3a} = \ln \frac{5}{3}.$$

Câu 14: Chọn B

$$\ln(5a) + \ln\left(\frac{3}{a}\right) = \ln\left(5a \cdot \frac{3}{a}\right) = \ln 15.$$

Câu 15: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} ac = b^2 \\ abc = b^3 \\ ab + bc + ca = b(a+c) + ca = b(64-b) + b^2 = 64b \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } P = 3 \log_2(64b) - \log_2 b^3 = 3 \log_2 64 = 3 \cdot 6 = 18.$$

Câu 16: Chọn A

Do 3 số $2017 + \log_2 a$; $2018 + \log_3 a$; $2019 + \log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Suy ra

$$2017 + \log_2 a + 2019 + \log_4 a = 2(2018 + \log_3 a)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 a = 2 \log_3 a \Leftrightarrow 3 \log_2 a = 4 \log_3 a \Leftrightarrow \log_2 a (3 - 4 \log_3 2) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy công sai $d = \log_3 a - \log_2 a + 1 = 1$.

Câu 17: Chọn D

Ta có: $xyz = (\log_c b + \log_b c)(\log_a c + \log_c a)(\log_b a + \log_a b)$

$$= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 2 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\log_c b + \log_b c)^2 + (\log_a c + \log_c a)^2 + (\log_b a + \log_a b)^2$$

$$= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4$.

Câu 18: Chọn C

Ta có $\log_x + \log_y \geq \log(x + 2y^3) \Leftrightarrow \log(xy) \geq \log(x + 2y^3) \Leftrightarrow xy \geq x + 2y^3$

$$\Leftrightarrow x(y-1) \geq 2y^3 > 0 \Rightarrow y-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{2y^3}{y-1} \Rightarrow \frac{x}{y} \geq \frac{2y^2}{y-1} - 2y + 2 + \frac{2}{y-1} - 2(y-1) + \frac{2}{y-1} + 4$$

$$\geq 2\sqrt{2(y-1) \cdot \frac{2}{y-1}} + 4 = 8 \Rightarrow \log_2 x - \log_2 y = \log_2 \frac{x}{y} \geq \log_2 8 = 3.$$

Câu 19: Chọn D

$$\log_3(3^{a+1} - 1) = 2a + \log_{\frac{1}{3}} 2 \Leftrightarrow \log_3 2(3^{a+1} - 1) = 2a \Leftrightarrow 2(3^{a+1} - 1) = 3^{2a} \Leftrightarrow 3^{2a} - 6 \cdot 3^a + 2 = 0.$$

Tương tự: $3^{2b} - 6 \cdot 3^b + 2 = 0$.

Suy ra 3^a và 3^b là hai nghiệm phân biệt (vì a, b phân biệt) của phương trình: $X^2 - 6X + 2 = 0$.

Khi đó $S = 27^a + 27^b = X_1^3 + X_2^3 = (X_1 + X_2)^3 - 3X_1X_2(X_1 + X_2)$, với $X_1 + X_2 = 6$, $X_1 \cdot X_2 = 2$.

Vậy $S = 6^3 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180$.

Câu 20: Chọn A

Do $0 < x \neq 1$ nên ta có:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \log_x(3 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 3^n) = \log_x 3^{1+2+\dots+n} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \log_x 3$$

$$\text{Vậy ta có: } \frac{n(n+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow n = 15$$

Câu 21: Chọn D

Số các chữ số của 2^{2017} là

$$\lceil \log(2^{2017}) \rceil + 1 = \lceil 2017 \times \log 2 \rceil + 1 = \lceil 2017 \times 0,30103 \rceil + 1 = \lceil 607,17751 \rceil + 1 = 608.$$

Câu 22: Chọn A

Hàm số $f(x) = \sqrt{1 - \log_m^2(nx)}$ ($m > 1, n > 0$) xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log_m^2(nx) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \log_m(nx) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{m} \leq nx \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{mn} \leq x \leq \frac{m}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{mn} \leq x \leq \frac{m}{n}.$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{m^2 - 1}{mn} = \frac{1}{2016}$$

Do đó $\log_{2016} \frac{m^2 - 1}{mn} = \log_{2016} \frac{1}{2016} = -1.$

Câu 23: Chọn A

Ta có

$$2\log_x(2y) = 2\log_{2x}(4z) = \log_{2x^4}(8yz) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x \\ 4z = 2x \\ 8yz = 4x^8 \end{cases} \Rightarrow 4x^8 = 2x^2 \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{6}} \Rightarrow y = z = 2^{\frac{7}{6}}$$

Ta được: $xy^5z = 2^{\frac{43}{6}} \Rightarrow \begin{cases} p = 43 \\ q = 6 \end{cases}$. Vậy $p + q = 49$.

Câu 24: Chọn A

Đặt $t = \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1}, t \geq 0$.

Thế vào phương trình $\log u_5 - 2\log u_2 = 2(1 + \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1})$ ta có

$$t^2 - 1 = 2(t + 1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3 (t \geq 0).$$

Do $t = 3$ nên $\sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1} = 3 \Leftrightarrow \log \frac{10u_5}{u_2^2} = 9 \Leftrightarrow \frac{10u_1 \cdot 3^4}{u_1^2 \cdot 3^2} = 10^9 \Leftrightarrow u_1 = \frac{9}{10^8}.$

$$u_n < 10^{100} \Leftrightarrow \frac{9}{10^8} \cdot 3^{n-1} < 10^{100} \Leftrightarrow 3^{n+1} < 10^{108} \Leftrightarrow n < 108 \log_3 10 - 1 \approx 225,357.$$

Câu 25: Chọn C

Dựa vào việc khảo sát hàm số $f(t) = e^{t-1} - t, t \in \mathbb{R}$. Ta thấy $e^{t-1} \geq t, t \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$. Do đó $e^{x+y-1} \leq x + y \Leftrightarrow e^{x+y-1} = x + y \Leftrightarrow x + y = 1$.

Khi đó $f(x) + f(y) = 1 \Leftrightarrow f(x) + f(1-x) = 1 \Leftrightarrow \frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + m^2} = 1$

$$\Leftrightarrow 9^x \left(\frac{m^4}{4} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{3} \Rightarrow S\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}.$$

Câu 26: Chọn D.

$$\log_2 \left[\log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x) \right] = \log_3 \left[\log_{\frac{1}{3}} (\log_3 y) \right] = \log_5 \left[\log_{\frac{1}{5}} (\log_5 z) \right] = p > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x) = 2^a \\ \log_{\frac{1}{3}} (\log_3 y) = 3^a \\ \log_{\frac{1}{5}} (\log_5 z) = 5^a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 2^{-2a} \\ \log y = 3^{-3a} \\ \log_5 z = 5^{-5a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{2^{-2a}} \\ y = 3^{3^{-3a}} \\ z = 5^{5^{-5a}} \end{cases}$$

Với $x \geq 2, a > 1$, xét hàm số $y = x^{x^{-x^a}} \Rightarrow \ln y = x^{-x^a} \ln x \Rightarrow \ln(\ln y) = \ln(\ln x) - x^a \ln x$.

Lấy đạo hàm hai vế, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\ln y} &= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} - x^{a-1} - ax^{a-1} \ln x = \frac{1}{x \ln x} - x^{a-1} (1 + a \ln x) < \frac{1}{x \ln x} - 1 - \ln x \\ &= \frac{1 - x \ln x - x (\ln x)^2}{x \ln x} < 0, \forall x > 2, a > 1 \Rightarrow y' < 0, \forall x > 2, a > 1. \end{aligned}$$

Do đó $y(2) > y(3) > y(5) \Rightarrow x > y > z$.

Câu 27: Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \log_{10} x \\ b = \log_{10} y \\ c = \log_{10} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^a \\ y = 10^b \\ z = 10^c \end{cases} \Rightarrow xyz = 10^{a+b+c}.$$

$$\text{Theo bài ta có: } \begin{cases} xyz = 10^{81} \\ (\log_{10} x) \cdot (\log_{10} yz) + (\log_{10} y)(\log_{10} z) = 468 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 81 \\ ab + ac + bc = 468 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Vậy thay (1) vào ta có } S = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)} = \sqrt{81^2 - 2 \cdot 468} = 75.$$

Câu 28: Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x, y \neq 1 \\ x > y > 0 \end{cases}$. Ta có:

$$\log_x y = \log_y x \Leftrightarrow \log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow (\log_x y)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = 1 \text{ (L)} \\ \log_x y = -1 \text{ (TM)} \end{cases} \Leftrightarrow y = x^{-1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ta có: } \log_x (x - y) = \log_y (x + y) \Leftrightarrow \log_x \left(x - \frac{1}{x} \right) = -\log_x \left(x + \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow \log_x \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0. \text{ Vậy } S = x^4 - x^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Câu 29: Chọn B

$$\text{Ta có } 2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2}} = 2^7 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2} = 7.$$

Từ điều kiện thứ hai suy ra

$$x^2 y^4 + 2x y^2 z^4 + z^8 = 4 + x^2 y^4 - 2x y^2 z^4 + z^8 \Leftrightarrow x y^2 z^4 = 1.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM- GM cho 7 số thực dương ta có

$$\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2} \geq 7\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{y^2})^2 \cdot (\sqrt[3]{z^2})^4} = 7\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^2 y^4 z^8}} = 7\sqrt[7]{\sqrt[3]{(x y^2 z^4)^2}} = 7.$$

$$\text{Do đó dấu bằng phải xảy ra, tức } \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{z^2} \\ x y^2 z^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y, z \in \{-1; 1\}.$$

Vậy có tất cả 4 bộ số thỏa mãn.

Câu 30: Chọn D

Ta có $a > 0; b > 0$, suy ra

$$4a^2 + b^2 + 1 \geq 4ab + 1 \Rightarrow \log_{2a+2b+1} (4a^2 + b^2 + 1) \geq \log_{2a+2b+1} (4ab + 1)$$

$$\Rightarrow 2 = \log_{2a+2b+1} (4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1) \geq \log_{2a+2b+1} (4ab + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1)$$

$$\text{Mà } \log_{2a+2b+1}(4ab+1) + \log_{4ab+1}(2a+2b+1) = \log_{2a+2b+1}(4ab+1) + \frac{1}{\log_{2a+2b+1}(4ab+1)} \geq 2$$

$$\text{Khi đó: } \log_{2a+2b+1}(4a^2+b^2+1) + \log_{4ab+1}(2a+2b+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{2a+2b+1}(4ab+1) = 1 \\ 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+1 = 4ab+1 \\ 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a+2b = \frac{15}{4}.$$

Câu 31: Chọn A

$$\log_a b + 6\log_b a = 5 \Leftrightarrow \log_a b + \frac{6}{\log_a b} = 5 \Leftrightarrow \log_a^2 b - 5\log_a b + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = 2 \\ \log_a b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 \\ b = a^3 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $b = a^2$

$$2 \leq b \leq 2005 \Leftrightarrow 2 \leq a^2 \leq 2005 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2005}$$

Vì $a; b \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{2; 3; 4; \dots; 44\}$. Do đó có 43 cặp số $(a; b)$.

Trường hợp 2: $b = a^3$

$$2 \leq b \leq 2005 \Leftrightarrow 2 \leq a^3 \leq 2005 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} \leq a \leq \sqrt[3]{2005}$$

Vì $a; b \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{2; 3; 4; \dots; 12\}$. Do đó có 11 cặp số $(a; b)$.

Vậy có 54 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Chọn D

$$\text{Đặt } 3\log_x(3y) = 3\log_{3x}(9z) = \log_{3x^4}(27yz) = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = x^{\frac{t}{3}} \\ 9z = (3x)^{\frac{t}{3}} = 3^{\frac{t}{3}} \cdot x^{\frac{t}{3}} \\ 27yz = (3x^4)^t = 3^t \cdot x^{4t} \end{cases} \Rightarrow 3y \cdot 9z \cdot 27yz = 3^{\frac{4t}{3}} \cdot x^{\frac{14t}{3}} \Leftrightarrow (yz)^2 = 3^{\frac{4t-18}{3}} \cdot x^{\frac{14t}{3}} \Leftrightarrow yz = 3^{\frac{2t-9}{3}} \cdot x^{\frac{7t}{3}} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } xy^3 = x \cdot 3^{-3} \cdot x^t = 3^{-3} \cdot x^{t+1} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra: } xy^4z = x^{\frac{10t+3}{3}} \cdot 3^{\frac{2t-18}{3}}$$

$$\text{Vì } xy^4z = 3^{\frac{a}{b}} \text{ nên } \frac{10t+3}{3} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{10} \text{ nên } \frac{2t-18}{3} = -\frac{31}{5}. \text{ Vậy } \frac{a}{b} = \frac{31}{5} \Rightarrow a+b = 36$$

Câu 33: Chọn C

$$\text{Đặt } \log x = a \neq 0, \log y = b, \log z = c$$

Khi đó

$$\log_{\sqrt{x}}(2y) = \log_{\sqrt{2x}}(4z) = \log_{2x^4}(8yz)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \frac{\log 2 + b}{a} = 2 \cdot \frac{2\log 2 + c}{\log 2 + a} \\ 2 \cdot \frac{\log 2 + b}{a} = \frac{3\log 2 + b + c}{\log 2 + 4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log^2 2 + (a+b)\log 2 + ab = 2a\log 2 + ac & (1) \\ 2\log^2 2 + (8a+2b)\log 2 + 8ab = 3a\log 2 + ab + ac & (2) \end{cases}$$

(2) - 2.(1) ta được:

$$6a\log 2 + 6ab = -a\log 2 + ab - ac \Leftrightarrow 7a\log 2 = -5ab - ac$$

$$\Leftrightarrow 5b + c = -7\log 2 \Leftrightarrow 5\log y + \log z = -7\log 2$$

(2) – (1) ta được:

$$\log^2 2 + (6a + b)\log 2 + 6ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log 2 = -6a \\ \log 2 = -b \end{cases}. \text{ Do đó } \log x = a = -\frac{1}{6}\log 2$$

$$\text{Vậy } \log x + 5\log y + \log z = -\frac{1}{6}\log 2 - 7\log 2 = -\frac{43\log 2}{6}.$$

Câu 34: Chọn B

$$\text{Với } 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1 \text{ suy ra } \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \Rightarrow \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \right\rceil \geq 0; \left\lceil \log_5\left(\frac{1}{y}\right) \right\rceil \geq 0.$$

Khi đó

$$\left\lceil \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \right\rceil = 2k (k \geq 0, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2k \leq \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2k + 1 \Leftrightarrow 2^{2k} \leq \frac{1}{x} < 2^{2k+1} \Leftrightarrow 2^{-2k-1} < x \leq 2^{-2k}$$

Vậy $x \in (2^{-2k-1}; 2^{-2k}]$, $k = 0, 1, \dots$ độ dài của tập này bằng

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (2^{-2k} - 2^{-2k-1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-2k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Tương tự } \left\lceil \log_5\left(\frac{1}{y}\right) \right\rceil = 2k (k \geq 0, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2k \leq \log_5\left(\frac{1}{y}\right) \leq 2k + 1$$

$$\Leftrightarrow 5^{2k} \leq \frac{1}{y} < 5^{2k+1} \Leftrightarrow 5^{-2k-1} < y \leq 5^{-2k}$$

Vậy $y \in (5^{-2k-1}; 5^{-2k}]$, $k = 0, 1, \dots$ độ dài của tập này bằng $\sum_{k=0}^{+\infty} (5^{-2k} - 5^{-2k-1})$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 4 \cdot 5^{-2k-1} = 4 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{125} + \frac{1}{3125} + \dots \right) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{6}. \text{ Vậy xác suất cần tìm bằng } \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}.$$

Câu 35: Chọn A

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(\log^2 a + 2(2\sin b + 1)\log a + (2\sin b + 1)^2) + (4\sin b + 5 - (2\sin b + 1)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log a + 2\sin b + 1)^2 + 4(1 - \sin^2 b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log a + 2\sin b + 1)^2 + 4\cos^2 b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log a + 2\sin b + 1 = 0 \\ \cos b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin b = 1 \\ \log a + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{1000} \\ b = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow (a+b)_{\min} = \frac{1}{1000} + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \sin b = -1 \\ \log a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 36: Chọn D

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(4^a - (2\sin b + 1)\right)^2 + \left(4\sin b + 5 - (2\sin b + 1)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(4^a - (2\sin b + 1)\right)^2 + 4(1 - \sin^2 b) = 0$$

$$\left(4^a - (2\sin b + 1)\right)^2 + 4\cos^2 b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos b = 0 \\ 4^a - 2\sin b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^a - 3 = 0 \\ \sin b = 1 \\ 4^a + 1 = 0 \\ \sin b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \log_4 3 \\ b = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \cdot \text{Vậy } (a+b)_{\min} = \log_4 3 + \frac{\pi}{2}$$

Câu 37: Chọn A

Theo bài ra: $\log_x 225 - \log_y 64 = 1$. Đặt $\begin{cases} X = \log_{225} x \\ Y = \log_{64} y \end{cases}$ ta được hệ:

$$\begin{cases} X + Y = 4 \\ \frac{1}{X} - \frac{1}{Y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{X} - \frac{1}{4-X} = 1 \Leftrightarrow 4 - 2X = X(4-X) \Leftrightarrow X^2 - 6X + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow Y = 1 - \sqrt{5} \\ X = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow Y = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} X = 3 + \sqrt{5} \\ Y = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 225^{3+\sqrt{5}} \\ y_1 = 64^{1-\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{Với } \begin{cases} X = 3 - \sqrt{5} \\ Y = 1 + \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 225^{3-\sqrt{5}} \\ y_2 = 64^{1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \log_{30}(x_1 y_1 x_2 y_2) = \log_{30}(225^6 \cdot 64^2) = 12$$

Câu 38: Chọn A

Có $u_n = b^{n-1} u_1 = b^{n-1} a$, vậy ta có:

$$\begin{aligned} \log_8 u_1 + \log_8 u_2 + \dots + \log_8 u_{12} &= \log_8(a) + \log_8(ab) + \dots + \log_8(ab^{11}) \\ &= \log_8(a \cdot ab \cdot ab^2 \dots ab^{11}) = \log_8(a^{12} b^{66}). \end{aligned}$$

$$\text{Và } \log_8(a^{12} b^{66}) = 2006 \Leftrightarrow a^{12} b^{66} = 8^{2006} \Leftrightarrow (a^2 b^{11})^6 = (2^{1003})^6 \Leftrightarrow a^2 b^{11} = 2^{1003}.$$

Vì vậy: $a = 2^x$, $b = 2^y$ ($x, y \in \mathbb{Z}^+$) và

$$2^{2x} b^{11y} = 2^{1003} \Leftrightarrow 2x + 11y = 1003 \Leftrightarrow y = \frac{1003 - 2x}{11} = 91 - \frac{2(x-1)}{11}.$$

$$\text{Do đó: } x-1 = 11k \Leftrightarrow x = 11k+1 \Leftrightarrow y = 92-2k.$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $k \in \{0, \dots, 45\}$. Vậy có 46 cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn.

Câu 39: Chọn C

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ 4x + 4y - 6 + m^2 = x^2 + y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad (1) \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = m^2 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1; 2)$, bán kính $R_1 = 2$

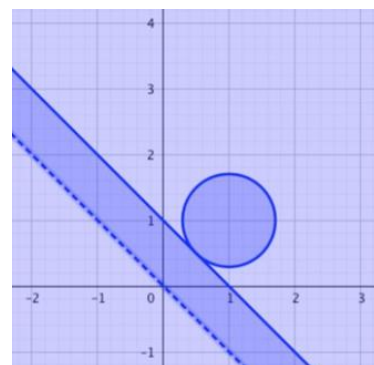
và phương trình (2) là phương trình đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2; 2)$ và bán kính $R_2 = |m|$

Cặp số thực $(x; y)$ tồn tại duy nhất khi và chỉ khi $(C_1), (C_2)$ tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong

$$(R_1 = R_2) \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 I_2 = R_1 + R_2 \\ I_1 I_2 = |R_1 - R_2| \\ R_1 \neq R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = |m| + 2 \\ 3 = ||m| - 2| \\ |m| \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 5 \end{cases}$$

Câu 40: Chọn A

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \log_{2019}(x+y) \leq 0 \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 1 \\ \sqrt{2xy+m} \geq 1-(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 1 \\ 2xy+m \geq (1-(x+y))^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 1 \\ x^2+y^2-2x-2y+1-m \leq 0 \end{cases} \\ \text{Theo đề} & \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ x+y-1 \leq 0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \leq m+1 \end{cases} \\ \text{YCBT} & \Leftrightarrow d(I; d) = R \Leftrightarrow \frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$



Câu 41: Chọn C

$$\text{Ta có: } f(x) = \log_2 \frac{mx}{2-x} = \log_2 m + \log_2 \frac{x}{2-x}$$

$$\text{Do đó } f(a) + f(b) = f(a) + f(2-a) = \log_2 m + \log_2 \frac{a}{2-a} + \log_2 m + \log_2 \frac{2-a}{a} = 2\log_2 m$$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } f(a) + f(b) = 3 \text{ nên } 2\log_2 m = 3 \Leftrightarrow m = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 42: Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \begin{cases} \log_2(2x+y) = \log_4(x^2+xy+7y^2) \\ \log_3(3x+y) = \log_9(3x^2+4xy+zy^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y > 0, 3x+y > 0 \\ \log_2(2x+y)^2 = \log_2(x^2+xy+7y^2) \\ \log_3(3x+y)^2 = \log_3(3x^2+4xy+zy^2) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y > 0, 3x+y > 0 \\ (2x+y)^2 = x^2+xy+7y^2 \\ (3x+y)^2 = 3x^2+4xy+zy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y > 0, 3x+y > 0 \\ 3x^2+3xy-6y^2=0 \\ z = \frac{6x^2+2xy+y^2}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1; \frac{x}{y} = -2 \\ z = 9; z = 21 \end{cases} \end{aligned}$$

