

Người làm: Mai Xuân

Zalo: Mai Xuân - số đt zalo: 0834831388

Email: xuanmai5656@gmail.com

CD4: CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

Dạng 1. Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 72 , các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với $2; 3; 4$.

Lời giải

Gọi ba chữ số của số cần tìm là a, b, c

Điều kiện: $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $0 < a < b < c \leq 9$

Theo bài ra: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 .

Ta có số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 nên nó chia hết cho 9 và 8

Số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 9

Suy ra $(a+b+c):9$ (dấu hiệu chia hết cho 9) mà $0 < a+b+c < 27$ (Do a, b, c là các chữ số)

nên $a+b+c \in \{9; 18\}$

Từ $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4}$

+) Nếu $a+b+c=9 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow a=2.1=2; b=3.1=3; c=4.1=4$

Ta được các số $234, 324, 342, 243, 423, 432$. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8

nên chỉ có số 432 chia hết cho 72 (1)

+) Nếu $a+b+c=18 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow a=4.2=8; b=3.2=6; c=4.2=8$

Ta được các số $468, 486, 648, 684, 864, 846$. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8

nên chỉ có số $648; 864$ chia hết cho 72 (2)

Từ (1) và (2) ta được các số cần tìm là: $432; 648; 864$

Câu 2. (HSG 7 huyện Mỹ Đức Hà Nội năm 2022 - 2023)

C đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 5 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5 .

Lời giải

Vì $Q(x):5$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Với $x=0$, ta có $Q(0) = d : 5$

Với $x=1$, ta có $Q(1) = (a+b+c+d):5$ mà $d:5 \Rightarrow (a+b+c):5$ (1)

Với $x=-1$, ta có $Q(-1) = (-a+b-c+d):5$

$$\text{mà } d : 5 \Rightarrow (-a + b - c) : 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$Q(1) + Q(-1) = (2b + 2d) : 5 \quad \text{lại có } d : 5 \Rightarrow 2d : 5 \quad \text{mà } 5 \text{ và } 2 \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau nên } b : 5$$

$$Q(1) - Q(-1) = 2(a + c) : 5 \quad \text{mà } 5 \text{ và } 2 \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau nên } (a + c) : 5 \quad (3)$$

$$\text{Với } x = 2, \text{ ta có } Q(2) = (8a + 4b + 2c + d) : 5 \text{ hay } [6a + 2(a + c) + 4b + d] : 5$$

$$\text{Mà } d : 5, (a + c) : 5, b : 5 \text{ nên } 6a : 5 \text{ mà } 5 \text{ và } 6 \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau nên } a : 5$$

Từ (3) suy ra $c : 5$.

$$\text{Vậy } a : 5; b : 5; c : 5; d : 5$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Nông Công, 2022 - 2023)

Cho số nguyên n ($n > 1$) thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5.

Lời giải

Với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư $0; 1$ hoặc 4 .

$$+ \text{ Nếu } n^2 \text{ chia } 5 \text{ dư } 1 \text{ thì } n^2 = 5k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 1 + 4 = (5k + 5) : 5$$

Do đó nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

$$+ \text{ Nếu } n^2 \text{ chia } 5 \text{ dư } 4 \text{ thì } n^2 = 5k + 4 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^2 + 16 = (5k + 20) : 5$$

Do đó $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

$$\text{Vậy } n^2 : 5 \text{ suy ra } n : 5$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho $m; n$ là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $mn - m - n + 1$ chia hết cho 192.

Lời giải

Ta có: $192 = 16 \cdot 12$

Do $m; n$ là hai số chính phương lẻ liên tiếp nên ta có:

$$m = (2k - 1)^2 \text{ và } n = (2k + 1)^2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Khi đó: } mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1)$$

$$= [(2k - 1)^2 - 1][(2k + 1)^2 - 1] = (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k)$$

$$= 16k^2(k - 1)(k + 1) : 16 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } k(k - 1)(k + 1) : 3 \text{ và } k(k - 1)k(k + 1) : 4$$

$$\text{Mà } (3, 4) = 1 \text{ nên } k^2(k - 1)(k + 1) : 12$$

$$\Rightarrow mn - m - n + 1 = 16k^2(k - 1)(k + 1) : 12$$

Từ (1) và (2) suy ra: $mn - m - n + 1 : 192$ (đpcm)

Câu 5. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hóa, trường 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Lời giải

Ta có $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$ khi và chỉ khi $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$

Mà $(3c^3 - 15d^3); 3$ nên $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3); 3$ (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{-1; 0; 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{-1; 0; 1\}$ hay $a \equiv a^3 \pmod{3}$

Tương tự ta có:

$b \equiv b^3 \pmod{3}, c \equiv c^3 \pmod{3}, d \equiv d^3 \pmod{3}$

Suy ra $a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3}$ (2)

Vậy $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Dạng 2.1. Tìm chữ số tận cùng

Dạng 2.2. Tìm hai chữ số tận cùng

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Thế, 2022 - 2023)

Cho hàm số $f(x) = x + \frac{1}{2}$ và

$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) + f(1)$

Tìm hai chữ số tận cùng của S^{2023} .

Lời giải

Ta có $f(x) = x + \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) + f(1-x) = x + \frac{1}{2} + 1 - x + \frac{1}{2} = 2$

$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) + f(1)$

$= [f(0) + f(1)] + \left[f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2001}\right) + f\left(\frac{1999}{2001}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1000}{2001}\right) + f\left(\frac{1001}{2001}\right) \right]$

$= 2 + 2 + 2 + \dots + 2 = 2002$

$\Rightarrow S^{2023} = 2002^{2023}$

\Rightarrow Hai chữ số tận cùng của S bằng 2 chữ số tận cùng của 2^{2023} .

Ta có $2^{2023} = (2^{20})^{101} \cdot 2^3 = \overline{76}^{101} \cdot 8 = \overline{\dots 76} \cdot 8 = \overline{\dots 608}$

Vậy hai chữ số tận cùng của S là 08.

Dạng 2.3. Tìm ba chữ số tận cùng trở lên Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com <https://www.vnteach.com>