

DẠNG 3: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Xét bài toán: Cho biểu thức $P(x)$

a) Rút gọn $P(x)$

b) Tìm giá trị của x sao cho $P(x) > m$ (m là hằng số) hoặc $P(x) > Q(x)$

2. Giải bài toán

a) Rút gọn

- Đặt điều kiện để $P(x)$ có nghĩa

- Thực hiện rút gọn $P(x)$

b) Tìm x : Giải bất phương trình

- Kiểm tra điều kiện và kết luận

B. Bài tập

Bài 1:

Cho biểu thức
$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-3}{x+2\sqrt{x}+4} - \frac{7\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-8} \right) : \frac{\sqrt{x}+7}{x+2\sqrt{x}+4}$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x sao cho $A < 2$

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Đặt $A = B : C$

$$B = \frac{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+4) - (x-3)(\sqrt{x}-2) - (7\sqrt{x}+10)}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} = \frac{x\sqrt{x}+2x+4\sqrt{x} - x\sqrt{x}+2x+3\sqrt{x}-6-7\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}$$

$$B = \frac{4x-16}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{x+2\sqrt{x}+4}$$

$$\Rightarrow A = B : C = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+7}$$

b) $A < 2 \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+7} < 2 \Leftrightarrow 4(\sqrt{x}+2) < 2(\sqrt{x}+7) \Leftrightarrow 2(\sqrt{x}+2) < \sqrt{x}+7 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < 9. \text{ Vậy } \begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Bài 2:

Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$$

Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm m để có x thỏa mãn $(1+\sqrt{x}).P > \sqrt{x} + m$

Lời giải

a) Ta có
$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) = \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

Điều kiện:
$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$P = \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = 1 - \sqrt{x}$$

b) $(1+\sqrt{x}).P = (1+\sqrt{x}).(1-\sqrt{x}) = 1-x$

Theo đầu bài $1-x > \sqrt{x} + m \Leftrightarrow x + \sqrt{x} < 1-m$

Nhận thấy $x > 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} > 0 \Rightarrow 1-m > 0 \Rightarrow m < 1$

Ngược lại với $m < 1$ thì
$$x + \sqrt{x} < 1-m \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{5}{4} - m \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5}{4} - m} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{\frac{5}{4} - m} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \left(\sqrt{\frac{5}{4} - m} - \frac{1}{2} \right)^2$$

Vậy $m < 1$ là các giá trị cần tìm

Bài 3: Học sinh giỏi huyện Triệu Phong, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức
$$B = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y} \right)$$

a) Rút gọn biểu thức B

b) So sánh B và $\sqrt{B}$

Lời giải

a) Điều kiện $x, y > 0; x \neq y$

Ta có
$$B = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} \cdot \left[\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right]$$
$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{x + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x - \sqrt{xy} - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$
$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y}$$

b) Vì $x, y > 0 \Rightarrow \sqrt{xy} > 0$ và
$$x - \sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2} \right)^2 + \frac{3y}{4} > 0, \forall x, y > 0$$

nên $B > 0$ với mọi x, y thỏa mãn điều kiện đã cho

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - \sqrt{xy} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = 1$$

Lại có:

Dấu “=” không xảy ra vì $x \neq y$

Vậy $0 < B < 1 \Rightarrow \sqrt{B} > B$

Bài 4: Học sinh giỏi huyện Thường Tín, năm học 2019 - 2020

$$P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right)$$

Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh $P > 1$

Lời giải

a) Điều kiện P có nghĩa $x > 0; x \neq 1$

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)} \right)$$

Ta có

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x} + x} \right) = \frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} : \frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)} = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} - 1 = 1$$

b) (bất đẳng thức Côsi)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Vì đẳng thức xảy ra (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy $P > 1$

Bài 5: Học sinh giỏi huyện Ba Vì, năm học 2019 - 2020

$$P = 1 + \frac{x + 3}{x^2 + 5x + 6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3 - 8x^2} - \frac{3x}{3x^2 - 12} - \frac{1}{x + 2} \right)$$

Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P = 0; P = 1$

c) Tìm các giá trị của x để $P > 0$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \neq -2; x \neq -3; x \neq 0; x \neq 2$

$$P = \frac{x + 4}{6}$$

Rút gọn được

b) $P = 0 \Leftrightarrow x = -4$ (thỏa mãn)

$P = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (không thỏa mãn điều kiện)

c) $P > 0 \Leftrightarrow x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$ và $x \neq -2; x \neq -3; x \neq 0; x \neq 2$

Bài 6: Học sinh giỏi huyện Ba Thước, năm học 2019 - 2020

$$P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right) \quad (x > 4; x \neq 0)$$

Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{x-1} < 0$

Lời giải

a) Ta có

$$P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right) = \left[\frac{2x+1}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right] \left(\frac{x\sqrt{x}-2x-x+4}{\sqrt{x}-2} \right)$$

$$P = \left[\frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{x(\sqrt{x}-2)-(x-4)}{\sqrt{x}-2} \right]$$

$$P = \left[\frac{x-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{x(\sqrt{x}-2)-(x-4)}{\sqrt{x}-2} \right]$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(x-\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x}-2$$

$$P\sqrt{x-1} < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)\sqrt{x-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2 < 0 \\ \sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1 \end{cases}$$

b) Ta có

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn bài toán.

Bài 7: Chuyên Cao Bằng vòng 2, năm học 2019 - 2020

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right), \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P \geq 1$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}; 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{x+1}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy

$$b) P \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \geq 0$$

$$- \text{ TH1: } \begin{cases} 2-\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq 2 \\ \sqrt{x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 4$$

$$\text{- TH2: } \begin{cases} 2 - \sqrt{x} \leq 0 \\ \sqrt{x} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 2 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x < 1 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Vậy các giá trị x cần tìm là $1 < x \leq 4$

Bài 8: Chuyên Toán Ninh Bình, năm học 2019 - 2020

Với $x > 0$, xét hai biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 9}{x + 3\sqrt{x}}$. Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} > \frac{5}{3}$.

Lời giải

$$B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 9}{x + 3\sqrt{x}} = \frac{x - 9 + 2\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x}(x + 3\sqrt{x})} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \text{Với } x > 0, \text{ ta có } \frac{A}{B} > \frac{5}{3} &\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x} + 9 > 5\sqrt{x} \quad (\text{vì } 3\sqrt{x} > 0, \forall x > 0) \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 9 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{81}{4}. \end{aligned}$$

Bài 9: HSG Tỉnh Yên Bái, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : \left[\left(\frac{1-\sqrt{x^3}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \right]$. Với $x \geq 0; x \neq 1$. Chứng minh rằng $M = x \cdot \left(B - \frac{1}{2} \right) \leq 0$

Lời giải

2) Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : \left[\left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}-x)}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \right]$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : \left[(1+\sqrt{x}+x+\sqrt{x}) \cdot (1-\sqrt{x}+x-\sqrt{x}) \right]$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : \left[(1+\sqrt{x})^2 \cdot (1-\sqrt{x})^2 \right]$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : (1-x)^2$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

* Chứng minh rằng $M = x \cdot \left(B - \frac{1}{2} \right) \leq 0$ (Với $x \geq 0; x \neq 1$)

$$M = x \cdot \left(B - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow M = x \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow M = x \cdot \frac{2\sqrt{x} - 1 - x}{2(1+x)} \Rightarrow M = \frac{-x(\sqrt{x} - 1)^2}{2(1+x)}$$

Ta có:

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có:
$$\begin{cases} -x \leq 0 \\ (\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \Rightarrow \frac{-x(\sqrt{x} - 1)^2}{2(1+x)} \leq 0 \\ 2(x+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow M \leq 0$$

Vậy: Với $x \geq 0, x \neq 1$ thì $M \leq 0$

Bài 10: HSG Huyện Hoài Đức, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức $P = \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$, với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P với $x = 2^4 \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - 2^4 \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

c) Với giá trị nào của x thì $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$

Lời giải

a) Với $x > 0; x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 1$ thì $P = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 x &= 2\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - 2\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} \Leftrightarrow x = 2\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2}} - 2\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2}} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \\
 &\Leftrightarrow x = 2\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}} - 2\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - 2\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \Leftrightarrow x = 2(\sqrt{2}+1) - 2(\sqrt{2}-1) \\
 &\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow x = 4
 \end{aligned}$$

Thay $x=4$ (thỏa mãn ĐK) vào biểu thức P ta được $P = \frac{\sqrt{4}+1}{2\sqrt{4}} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

Vậy với $x = 2\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - 2\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$ thì $P = \frac{3}{4}$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} &\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} - 1 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{16\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} - 1 - 8\sqrt{x} - 8}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x + 6\sqrt{x} - 9}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \leq 0
 \end{aligned}$$

Với $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow 8(\sqrt{x}+1) > 0$ và $(\sqrt{x}-3)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0$

$$\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \leq 0$$

à

m

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$ (tmđk). Vậy để $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$ thì $x=9$

Bài 11: HSG Tân Kỳ, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định của A

b) Tính giá trị của A khi $\frac{x}{9} = \frac{2\sqrt{27+7\sqrt{5}}}{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}$

c) Cho $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot A$. Tìm x để $P < 0$

Lời giải

a) ĐKXD $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$

$$A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

$$A = \left[\frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(\sqrt{x} + 7)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \right] : \left(\frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

$$A = \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - x + 1 - x - 10\sqrt{x} - 21}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{2\sqrt{x} - 2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$A = \frac{x - 6\sqrt{x} - 27}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 9)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2}$$

b) Ta thấy

$$\frac{x}{9} = \frac{2\sqrt{27 + 7\sqrt{5}}}{\sqrt{10} + 7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{54 + 14\sqrt{5}}}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + 7)} = \frac{\sqrt{49 + 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{5} + 5}}{7 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(7 + \sqrt{5})^2}}{7 + \sqrt{5}} = 1$$

$\Leftrightarrow x = 9$ (Thỏa mãn ĐKXD)

Thay $x = 9$ vào biểu thức A , ta tính được $A = \frac{\sqrt{9} - 9}{\sqrt{9} - 2} = \frac{3 - 9}{3 - 2} = -6$.

c) ĐKXD $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$

$$P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} + 2}$$

Ta có:

$$P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} + 2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 9 < 0 \quad (\text{vì } \sqrt{x} + 2 > 0) \Rightarrow 0 \leq x < 81$$

Kết hợp với ĐKXD ta được $0 \leq x < 81$; $x \neq 1$; $x \neq 4$ thì $P < 0$

BÀI 4: RÚT GỌN VÀ TÌM GIÁ TRỊ NGUYÊN CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp:

+ Đối với các biểu thức $P = A + \frac{B}{C}$ với A, B là số nguyên, C nhận giá trị nguyên hoặc vô tỷ thì P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi C là số nguyên và C là ước của số B .

+ Đối với các biểu thức $P = A + \frac{B}{C}$ với A, B là số hữu tỷ, C nhận giá trị thực. Ta thường tìm cách đánh giá P , tức là chặn P theo kiểu $M \leq P \leq N$ từ đó suy ra các giá trị có thể của P . Hoặc tìm ra điều kiện của P để tồn tại biến $x, y, \dots$ thỏa mãn yêu cầu bài toán từ đó suy ra các giá trị nguyên có thể của P .

- Đối với các bài toán tổng hợp học sinh cần chú ý điều kiện ban đầu để loại các giá trị không thỏa mãn

Bài 1: Học sinh giỏi huyện Đan Phượng, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ với $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=100$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = A:B$ có giá trị nguyên

Lời giải

a) Điều kiện $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

Khi $x=100$ (thỏa mãn điều kiện) thì $A = \frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

b) $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - x - 9\sqrt{x}}{x-9} = \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

c) Ta có $M = A:B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$

Để M nguyên thì $\sqrt{x} - 2 \in U(5)$ và $\sqrt{x} - 2 > -2$
 $\Rightarrow \sqrt{x} - 2 \in \{-1; 1; 5\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{1; 3; 7\} \Leftrightarrow x \in \{1; 9; 49\}$

Bài 2: Học sinh giỏi Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2017 - 2018

Cho biểu thức $P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$, với $x > 0; x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên

Lời giải

$$P = \frac{\sqrt{x}(x - 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + 2x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}$$

a) Ta có

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}$$

Ta có điều kiện $x > 0; x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1 \Rightarrow 0 < P = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} < \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} < 2$

Do P nguyên nên $\Rightarrow P = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)

Vậy không có giá trị nào của x để P nguyên.

Bài 3: Học sinh giỏi Tỉnh Điện Biên, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) - 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $Q = \sqrt{x} - P$ nhận giá trị nguyên

Lời giải

$$x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow P = \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1$$

a) Điều kiện

$$= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{x-1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1 = \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

$$Q = \sqrt{x} - P = \sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Để $Q \in \mathbb{Z}$ thì $\sqrt{x} + 1$ là ước của 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = 1 \\ \sqrt{x} + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (tm) \\ \sqrt{x} = -2 (loại) \end{cases}$

Vậy $x=0$ thì $Q \in \mathbb{Z}$.

Bài 4: Chuyên Điện Biên, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức
$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}} - \frac{3x+4\sqrt{x}-5}{x-4\sqrt{x}-5}, (x \geq 0; x \neq 25)$$

a) Rút gọn biểu thức P . Tìm các số thực x để $P > -2$

b) Tìm các số tự nhiên x là số chính phương sao cho P là số nguyên.

Lời giải

a) Ta có
$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}} - \frac{3x+4\sqrt{x}-5}{x-4\sqrt{x}-5} = -\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$$

$$P > -2 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} > -2 \Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 5 \\ \sqrt{x} > 12 \end{cases}$$

- Với $\sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow 0 \leq x < 25$

- Với $\sqrt{x} > 12 \Leftrightarrow x > 144$

b) Ta có x là số chính phương nên $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ và $\sqrt{x}-5 \geq -5$

$$\text{Khi đó } P = -\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = -1 - \frac{7}{\sqrt{x}-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-5 \in \{-1; 1; 7\} \Rightarrow x \in \{16; 36; 144\}$$

Bài 5: Chuyên Bắc Giang, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức
$$A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) (x > 0; x \neq 1)$$

a) Rút gọn biểu thức A

$$A \geq \frac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$$

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{(\sqrt{x}-1)} : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} (x > 0; x \neq 1)$$

$$\text{b) } A \geq \frac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{2018} \Rightarrow 0 < x \leq 2018$$

Vì $x > 0; x \neq 1$ và x nguyên nên $x \in \{2; 3; 4; \dots; 2018\}$

Vậy có 2017 giá trị nguyên của x thỏa mãn bài toán.

Bài 6: Chuyên Toán Cần Thơ, năm học 2018 - 2019

$$A = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right), \text{ trong đó } x > 1; x \neq 2$$

Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị biểu thức A là số nguyên

Lời giải

$$A = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{|\sqrt{x-1}-1| + 1 + \sqrt{x-1}}{|x-2|} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

a) Ta có

$$1 < x < 2 \Rightarrow A = \frac{2}{1-x}$$

- Nếu

$$x > 2 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

- Nếu

b)

- Nếu $1 < x < 2$ thì không có giá trị nguyên.

$$A = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

- Nếu $x > 2$ thì

$$+ \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại)}$$

$$+ \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 7: Học sinh giỏi Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2016 - 2017

$$P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})} \text{ với } x > 0; x \neq 1$$

Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn $P = 2$

Lời giải

$$P = \frac{(x-y) + (x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})}$$

a) Ta có

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + 1) + y(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{1 - \sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(1 - \sqrt{y})}{1 - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}$$

$$b) P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2, \text{ với } x \geq 0; y \geq 0; y \neq 1; x + y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - (1 + \sqrt{y}) = 1 \Leftrightarrow (1 + \sqrt{y})(\sqrt{x} - 1) = 1$$

$$\text{Ta có } 1 + \sqrt{y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 0; 1; 2; 3; 4$$

Thay vào P ta có các cặp giá trị $(4;0);(2;2)$ thỏa mãn.

Bài 8: Học sinh giỏi huyện Chương Mỹ, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x}$

a) Tìm x để $A < 1$

b) Biết $A = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}) - 1$, hãy tính giá trị của $B = \frac{\sqrt{x}+3}{2-x} : (2A)$

c) Tìm giá trị x nguyên để P nhận giá trị nguyên, khi $P = A : \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}$

d) Tìm x để $A(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x + 4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$

Rút gọn được $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$, do $A < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp với điều kiện ta được: $0 \leq x < 4$

b) Tính được $A = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

Thay vào biểu thức $B = \frac{-6}{7} : 6 = \frac{-1}{7}$

c) Ta có $P = A : \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = -1 + \frac{3}{3-\sqrt{x}}$

Để P nhận giá trị nguyên thì $\frac{3}{3-\sqrt{x}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 4; 16; 36\}$, kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{0; 16; 36\}$

d) $A(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x} = x + 4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x} \Leftrightarrow 5 - (\sqrt{x}-3)^2 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$

Ta có $VT \leq 5; VP \geq 5$ với mọi x thuộc điều kiện xác định
 $\Rightarrow$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 9$

Bài 9: HSG Tỉnh Lào Cai, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}} - \frac{9x+\sqrt{x}+1}{3x-\sqrt{x}-2} \right) : \frac{3\sqrt{x}+1}{7x-7\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm x sao cho P nhận giá trị là một số nguyên

Lời giải

a) Ta có $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}} - \frac{9x+\sqrt{x}+1}{3x-\sqrt{x}-2} \right) : \frac{3\sqrt{x}+1}{7x-7\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\sqrt{x}(3\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-1) - 9x - \sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{7\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{3\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{3\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+2} \cdot \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2}
\end{aligned}$$

b) $\forall x > 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow P = \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2} > 0$

$$P = \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2} = \frac{7}{3} - \frac{14}{3(3\sqrt{x}+2)} < \frac{7}{3} \Rightarrow 0 < P < \frac{7}{3}, \forall x > 0, x \neq 1$$

P nhận giá trị là một số nguyên $\Rightarrow P \in \{1; 2\}$

$$P = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (tmđk)}$$

$$P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (tmđk)}$$

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{4}; 16\right\}$ thì P nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 10: HSG Tỉnh Bắc Giang, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức
$$A = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1.

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}} \Rightarrow A = \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 2)^2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\
\Rightarrow A &= \frac{x - \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \Rightarrow A = \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}.
\end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 1$ thì $A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$.

b) Ta có
$$A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x} - 1}.$$

Với $x \in \mathbb{Z}$, để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(\sqrt{x} - 1)$ là ước của 2.

Suy ra $\sqrt{x} - 1 \in \{\pm 2; \pm 1\}$.

Lập bảng

$\sqrt{x} - 1$	- 2	2	- 1	1
$\sqrt{x}$	- 1 (loại)	3	0	2
x		9	0	4

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$ thì $x \in [0; 4; 9]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 11: HSG Tỉnh Quảng Ninh, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức $A = \frac{5\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của x để $\frac{A}{2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \frac{5\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

$$= \frac{(5\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1) + (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) - (2\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{5x - 6\sqrt{x} + 1 + 2x + 3\sqrt{x} - 2 - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{7x - 5\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(7\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{7\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

Vậy $A = \frac{7\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$

b) Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Ta có $\frac{A}{2} = \frac{7\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x} + 4} > 0$

Để $\frac{A}{2}$ nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow A : 2$ và $A \in \mathbb{Z}$

$$A = \frac{7\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{7(\sqrt{x} + 2) - 12}{\sqrt{x} + 2} = 7 - \frac{12}{\sqrt{x} + 2} < 7$$

Ta có

Mà $0 < A < 7, A : 2, A \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow A \in \{2; 4; 6\}$$

$$\text{Với } A=2 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=2 \Rightarrow 7\sqrt{x}+2=2\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow 5\sqrt{x}=2 \Rightarrow x=\frac{4}{25} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } A=4 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=4 \Rightarrow 7\sqrt{x}+2=4\sqrt{x}+8 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}=6 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } A=6 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=6 \Rightarrow 7\sqrt{x}+2=6\sqrt{x}+12 \Leftrightarrow \sqrt{x}=10 \Rightarrow x=100 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \left\{\frac{4}{25}; 4; 100\right\}$ thì $\frac{A}{2}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 12: HSG Tỉnh Đồng Tháp, năm học 2020 - 2021

$$A = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} - 2}{\sqrt{1 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}}} \quad (4 < x \leq 8)$$

Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $4 < x \leq 8$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}} - 2}{\sqrt{\left(1 - \frac{4}{x}\right)^2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} - 2}{\sqrt{\left(1 - \frac{4}{x}\right)^2}} \\ &= \frac{|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| - 2}{\left|1 - \frac{4}{x}\right|} = \frac{\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}-2}{\frac{x-4}{x}} \end{aligned}$$

do $\sqrt{x-4}-2 \leq 0$ và $1 - \frac{4}{x} > 0 = \frac{2x}{x-4}$

b) Với $4 < x \leq 8$ ta có

$$A = \frac{2x}{x-4} = 2 + \frac{8}{x-4}$$

A nguyên khi và chỉ khi $x-4$ là ước của 8

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x-4 = \pm 1 \\ x-4 = \pm 2 \\ x-4 = \pm 4 \\ x-4 = \pm 8 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta có: } \begin{cases} x=5 \\ x=6 \\ x=8 \end{cases}$$

Bài 13: HSG Tỉnh Sơn La, năm học 2020 - 2021

$$A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x} \quad \text{và} \quad B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 9$$

Cho hai biểu thức

$$x = \frac{2}{5(45 - \sqrt{2021})} + \frac{2}{5(45 + \sqrt{2021})}$$

a) Tính giá trị của A tại

b) Rút gọn A

c) Tìm tất cả các số nguyên x để $P = A \cdot B$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có:

$$x = \frac{2}{5(45 - \sqrt{2021})} + \frac{2}{5(45 + \sqrt{2021})} = \frac{2(45 + \sqrt{2021}) + 2(45 - \sqrt{2021})}{5(45 - \sqrt{2021})(45 + \sqrt{2021})} = \frac{90 + 2\sqrt{2021} + 90 - 2\sqrt{2021}}{5(2025 - 2021)} = \frac{180}{20} = 9$$

Thay $x = 9$ vào biểu thức B ta được:

$$B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{9} - 3}{\sqrt{9} + 1} = \frac{3 - 3}{3 + 1} = 0$$

$$\begin{aligned} b) \quad A &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3 - 11\sqrt{x}}{9 - x} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3) + 11\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3 + 11\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3x + 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } P = A \cdot B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{3(\sqrt{x} + 1) - 3}{\sqrt{x} + 1} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$$

c)

$$\Rightarrow P \text{ là số nguyên} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \text{ là số nguyên} \Leftrightarrow 3 : (\sqrt{x} + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1) \in \tilde{O}(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$\text{mà } \sqrt{x} + 1 \geq 1 \text{ với } x \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 1 \in \{1; 3\} \Rightarrow x \in \{0; 4\}$$

Bài 14: HSG Quận Tây Hồ, năm học 2020 - 2021

$$P = \left(\frac{\sqrt{x-2}}{3+\sqrt{x-2}} + \frac{x+7}{11-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x-2}+1}{x-3\sqrt{x-2}-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) \text{ với } x \geq 2; x \neq 11$$

Cho hai biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P

c) Tìm tất cả các số thực x để biểu thức P đạt giá trị nguyên.

Lời giải

1) Rút gọn biểu thức P .

Điều kiện xác định: $x \geq 2; x \neq 11$

$$\text{Đặt } \sqrt{x-2} = a, \quad a > 0; a \neq 3$$

$$P = \left(\frac{a}{3+a} + \frac{a^2+9}{9-a^2} \right) : \left(\frac{3a+1}{a^2-3a} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow P = \left[\frac{a(3-a)}{(3+a)(3-a)} + \frac{a^2+9}{9-a^2} \right] : \left[\frac{3a+1}{a(a-3)} - \frac{(a-3)}{a(a-3)} \right]$$

$$\Rightarrow P = \frac{3(a+3)}{(3+a)(3-a)} : \frac{2(a+2)}{a(a-3)} \Rightarrow P = -\frac{3a}{2(a+2)}$$

$$P = -\frac{3\sqrt{x-2}}{2(\sqrt{x-2}+2)}$$

Thay $\sqrt{x-2}=a$ vào P ta được:

b) Tìm các số thực x để biểu thức P đạt giá trị nguyên.

$$P = \frac{-3\sqrt{x-2}}{2(\sqrt{x-2}+2)} \Rightarrow \sqrt{x-2}(2P+3) = -4P$$

P nguyên nên $2P+3 \neq 0$.

$$\text{Từ đó } \sqrt{x-2} = \frac{-4P}{2P+3}$$

$$\text{Do } \sqrt{x-2} \geq 0 \text{ nên } \frac{-4P}{2P+3} \geq 0. \text{ Suy ra } \frac{-3}{2} < P \leq 0$$

Do P nguyên nên $P \in \{-1; 0\}$

$$\text{Với } P = -1 \text{ thì } \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 18$$

$$\text{Với } P = 0 \text{ thì } \sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 15: HSG Huyện Ba Vì, năm học 2020 - 2021

$$P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}.$$

Cho hai biểu thức

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh rằng $P > 4$

c) Với những giá trị nào của x thì biểu thức $\frac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P .

Điều kiện $x > 0; x \neq 1$.

$$\text{Ta có } \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}} = \frac{(x-1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(1-x)} = \frac{-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Thay vào } P \text{ ta được: } P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + 2.$$

b) Chứng minh rằng $P > 4$.

Ta có với $x > 0; x \neq 1$ thì $(\sqrt{x} - 1)^2 > 0$.

Suy ra $x + 1 > 2\sqrt{x}$.

Do đó, $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + 2 > \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 2$.

Suy ra $P > 4$.

c) Với những giá trị nào của x thì biểu thức $\frac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên?

Ta có $P > 4 \Rightarrow 0 < \frac{6}{P} < \frac{3}{2}$.

Do đó $\frac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên bằng 1.

Khi đó $P = 6 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}} + 2 = 6 \Leftrightarrow \frac{x - 4\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = 0$.

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 + \sqrt{3} \\ \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

Vậy với $\begin{cases} x = 7 + 4\sqrt{3} \\ x = 7 - 4\sqrt{3} \end{cases}$ thì $\frac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 16: HSG Huyện Mỹ Đức, năm học 2020 - 2021

Cho hai biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{10x + 5\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt{13 + \sqrt{12}} - \sqrt{28 + 16\sqrt{3}} + 6$

c) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x} - 2}{x + 2\sqrt{x}}$. Tìm x để $M = P.B$ có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{10x + 5\sqrt{x}}$ Với $x > 0, x \neq 4$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{4\sqrt{x}+2+3\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} - \frac{5\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)} \\
&= \left(\frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}
\end{aligned}$$

b) Ta có: $x = \sqrt{13+2\sqrt{3}} - \sqrt{(4+2\sqrt{3})^2} + 6$

$$\Rightarrow x = \sqrt{13+2\sqrt{3}} - 4 - 2\sqrt{3} + 6 = \sqrt{9} + 6 = 9 \text{ (TM)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{5\sqrt{9}}{\sqrt{9}-2} = 15$$

$$M = P.B = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{5}{\sqrt{x}+2}$$

c)

Với $x > 0, x \neq 4$ ta có $\sqrt{x}+2 > 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow M = \frac{5}{\sqrt{x}+2} < \frac{5}{2}$$

Mà dễ thấy $M > 0 \Rightarrow 0 < M < \frac{5}{2}$

Nên với $M \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \in \{1; 2\}$

+ Với $M = 1 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = 5 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (TM)}$

+ Với $M = 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (TM)}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{4}; 9 \right\}$

Bài 17: HSG Huyện Hưng Hà, năm học 2019 - 2020

Cho hai biểu thức $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ (với $0 < x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P và chứng minh rằng $P > 4$

b) Với những giá trị nào của x thì biểu thức $Q = \frac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) Với $0 < x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1+x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy với $0 < x \neq 1$, ta có

$$P = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$$

Ta có:

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0; \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

Vì . Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \geq 4$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Dấu “=” xảy ra khi:

Vì $0 < x \neq 1$ do đó $P > 4$

b) Ta có: $Q = \frac{6}{P}$ xác định khi $0 < x \neq 1$

$$Q = \frac{6}{P} > 0$$

Chỉ ra $P > 0$ suy ra

$$P > 4 \Rightarrow Q = \frac{6}{P} < \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 0 < Q = \frac{6}{P} < \frac{3}{2}$$

Vì

$$\text{Mà } Q \in \mathbb{Z} \Rightarrow Q = 1 \Rightarrow P = 6 \Rightarrow P = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 6 \Rightarrow x+2\sqrt{x}+1 = 6\sqrt{x} \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 = 3 \Leftrightarrow |\sqrt{x}-2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2 = \sqrt{3} \\ \sqrt{x}-2 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (2+\sqrt{3})^2 \\ x = (2-\sqrt{3})^2 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy $x \in \{(2-\sqrt{3})^2; (2+\sqrt{3})^2\}$.

