

Người làm: Trần Quý Dương

Zalo: Bao lam (Trần Quý Dương)

- số đt zalo: 0905430798

Email: tranduong080773@gmail.com

**CD10: BẤT ĐẲNG THỨC, TÌM GTLN, GTNN****Dạng 1. Tìm GTLN, GTNN.****Câu 1. (HSG 7 Trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A$ , biết  $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$ .

**Lời giải**

Ta có  $|7x - 5y| \geq 0$ ;  $|2z - 3x| \geq 0$  và  $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

$$\begin{cases} 7x = 5y \\ 2z = 3x \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi

Dùng phương pháp thế, tìm được :  $x = 20$  ;  $y = 28$  ;  $z = 30$  hoặc  $x = -20$  ;  $y = -28$  ;  $z = -30$

Vậy  $A_{\min} = 0$ . Dấu "=" xảy ra khi  $x = 20$  ;  $y = 28$  ;  $z = 30$  hoặc  $x = -20$  ;  $y = -28$  ;  $z = -30$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh Bình Định 2017 - 2018)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = |x - 2| + |2x - 3| + |3x - 4|$ .

**Lời giải**

$$|x - 2| + |3x - 4| = |2 - x| + |3x - 4| \geq |2 - x + 3x - 4| = |2x - 2|$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \text{"="} & \quad (2 - x)(3x - 4) \geq 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ \text{Dấu} & \quad \text{xảy ra khi} \end{aligned}$$

$$|2x - 3| + |2x - 2| = |3 - 2x| + |2x - 2| \geq |3 - 2x + 2x - 2| = 1$$

$$\begin{aligned} \text{"="} & \quad \Leftrightarrow (2x - 3)(2x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \text{Dấu} & \quad \text{xảy ra} \end{aligned}$$

$$A = |x - 2| + |2x - 3| + |3x - 4| \geq 1$$

Do đó

$$\begin{aligned} \text{"="} & \quad \begin{cases} \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \text{Dấu} & \quad \text{xảy ra khi} \end{aligned}$$

Vậy GTNN của  $A$  là 1 khi  $\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$ .

**Câu 3. (HSG 7 trường Sương Bình 2017 - 2018)**

$$A = |x - 2006| + |2007 - x|$$

Tìm GTNN của biểu thức :

**Lời giải**

$$A = |x - 2006| + |2007 - x| \geq |x - 2006 + 2007 - x| = 1$$

Ta có

$$" = " \quad (x - 2006)(2007 - x) \geq 0 \Rightarrow 2006 \leq x \leq 2007$$

Dấu xảy ra khi

$$A_{\min} = 1 \quad 2006 \leq x \leq 2007$$

Vậy khi .

**Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Dương, Vĩnh phúc 2017 - 2018)**

$$Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} \quad x \in \mathbb{Z}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức (với

**Lời giải**

$$Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x} \quad Q \quad \frac{3}{12 - x}$$

Ta có: , suy ra lớn nhất khi lớn nhất

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{3}{12 - x} < 0 \\ * \text{ Nếu } x > 12 \text{ thì } 12 - x < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{3}{12 - x} > 0 \\ * \text{ Nếu } x < 12 \text{ thì } 12 - x > 0 \end{aligned}$$

Từ hai trường hợp trên suy ra  $\frac{3}{12 - x}$  lớn nhất khi  $12 - x > 0$

Vì phân số  $\frac{3}{12 - x}$  có tử và mẫu là các số nguyên dương, tử không đổi nên phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu là số nguyên dương nhỏ nhất

$$12 - x = 1 \Rightarrow x = 11$$

Hay

Suy ra  $A$  có giá trị lớn nhất là 5 khi  $x = 11$ .

**Câu 5. (HSG 7 trường THCS Hùng Thư 2017 - 2018)**

$$A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

Tìm GTNN của biểu thức .

**Lời giải**

$$A = (|-x + 2013| + |x - 2015|) + |x - 2014|$$

$$A \geq |-x + 2013 + x - 2015| + |x - 2014| = 2 + |x - 2014| \geq 2$$

$$A = 2 \quad \text{ khi và chỉ khi } \quad (-x + 2013)(x - 2015) \geq 0 \quad \text{ và } \quad x - 2014 = 0$$

$$\Rightarrow 2013 \leq x \leq 2015 \quad \text{ và } \quad x = 2014$$

$$\Rightarrow x = 2014$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 2 \quad \text{ khi } \quad x = 2014$$

**Câu 6. (HSG 7 trường THCS Ngô Gia Tự, huyện Phù Cát 2017 - 2018)**

$$B = |x - 2| + |x - 8|$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

**Lời giải**

$$B = |x - 2| + |x - 8| = |x - 2| + |8 - x| \geq |x - 2 + 8 - x| = 6$$

Ta có:

$$" = " \quad \text{ xảy ra khi } \quad (x - 2)(8 - x) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8$$

Dấu " = " xảy ra khi

$$B_{\min} = 6 \quad \text{ khi } \quad 2 \leq x \leq 8$$

Vậy

**Câu 7. (HSG 7 trường THCS Kim An 2017 - 2018)**

$$A = \frac{x+2}{|x|}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức với  $x$  là số nguyên.

**Lời giải**

Xét các trường hợp:

$$x \leq -2 \Rightarrow A \leq 0$$

+)

$$x = -1 \Rightarrow A = 1$$

+)

$$x \geq 1 \Rightarrow A = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

+) , suy ra A lớn nhất thì  $\frac{2}{x}$  lớn nhất

Vì  $x$  là số nguyên dương, nên  $\frac{2}{x}$  lớn nhất  $\Rightarrow x$  nhỏ nhất, tức là  $x = 1$ , khi đó  $A = 3$ .

Vậy giá trị lớn nhất của  $A = 3$  khi  $x = 1$ .

**Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Dương, Vĩnh phúc 2016 - 2017)**

1. Cho  $\frac{x}{3x-2z}, \frac{y}{3x-2z}, \frac{z}{3x-2z}$  là các số thực thỏa mãn:  $2x=3y=5z$  và  $|x-2y|=5$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $\frac{x}{3x-2z}$ .
2. Tìm giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2}$  có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

1. Ta có:  $\frac{x}{3} = \frac{2y}{4} = \frac{x-2y}{-1} = 3y = 5z$
- Nếu  $x-2y=5 \Rightarrow x=-15, y=-10, z=-6$ . Khi đó  $3x-2z = -45+12 = -33$
- Nếu  $x-2y=-5 \Rightarrow x=15, y=10, z=6$ . Khi đó  $3x-2z = 45-12 = 33$
- Vậy giá trị lớn nhất của  $\frac{x}{3x-2z}$  là  $\frac{33}{33} = 1$  khi  $x=15, y=10, z=6$ .

$$M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2} = \frac{672 \cdot (3x + 2) - 2016 - 1344}{3x + 2} = 672 - \frac{3360}{3x + 2}$$

2.

$$M \Rightarrow \frac{3360}{3x + 2}$$

nhỏ nhất lớn nhất.

\* Xét  $3x + 2 < 0$  thì  $\frac{3360}{3x + 2} < 0$  (1)

\* Xét  $3x + 2 > 0$  thì  $\frac{3360}{3x + 2} > 0$

$\frac{3360}{3x + 2}$  lớn nhất khi  $3x + 2$  nhỏ nhất. Mà  $x$  nguyên,  $3x + 2$  dương và  $3x + 2$  chia 3 dư 2

$3x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0$

nên

$$\frac{3360}{3x + 2} = \frac{3360}{3 \cdot 0 + 2} = 1680 \quad (2)$$

Khi đó

So sánh (1) và (2) thì  $\frac{3360}{3x + 2}$  có giá trị lớn nhất bằng 1680

$$M_{\min} = -1008 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy

**Câu 9. (HSG 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến. 2016 - 2017)**

$$g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức

**Lời giải**

$$g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$$

Với mọi giá trị của  $x$  ta có:

$$(4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$$

Vậy  $g(x)_{\min} = 9$  khi  $4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2}$ .

**Câu 10. (HSG 7 huyện Nam Sách, Hải Dương 2017 – 2018, huyện Tân Lạc, Hòa Bình 2015-2016)**

$$A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

**Lời giải**

$$|2015 - x| \geq 0$$

Vì nên:

$$A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $x = 2015$  (1)

$$|2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$$

Ta có:

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $(x - 2014)(2016 - x) \geq 0$  , suy ra:  $2014 \leq x \leq 2016$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $A \geq 2$  . Dấu "=" xảy ra khi  $x = 2015$

Vậy  $A$  nhỏ nhất bằng 2 khi  $x = 2015$ .

**Dạng 2.1. Bất đẳng thức về chứng minh tổng hai phân số. (không có)**

**Dạng 2.2. Bất đẳng thức về chứng minh tổng các lũy thừa.(không có)**

**Dạng 2.3. Bất đẳng thức về chứng minh tích dãy số.(không có)**

**Dạng 4. Bất đẳng thức dạng chữ.**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, tỉnh Phú Thọ 2017 - 2018)**

Cho  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  là các số thực dương thỏa mãn  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  . Hãy so sánh  $\frac{a}{b}$  với  $\frac{a+c}{b+d}$  .

**Lời giải**

Vì  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  là các số thực dương thỏa mãn  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  nên  $ad < bc$  (1)

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)}$$

Mặt khác: (2)

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)} \quad (3)$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Phù Yên, tỉnh Sơn La, trường THCS Võ Thị Sáu 2017 - 2018)**

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9 \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Chứng minh rằng: Nếu thì .

**Lời giải**

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$$

Ta có: nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

$$(1) \quad (2) \quad (3)$$

Cộng vế với vế của , và ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0 \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Vì nên ta được: .

**Câu 3. (HSG 7 huyện Trà Lý 2017 - 2018)**

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15} \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Cho các số . Chứng minh rằng: .

**Lời giải**

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

Ta có:

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$$

Suy ra

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Vậy .

**Câu 4. (HSG 7 huyện... 2017 - 2018- đề 283)**

$$M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$$

Cho biểu thức

với  $x, y, z, t$  là các số tự nhiên

khác 0. Chứng minh  $M^{10} < 1025$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}; \quad \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}; \quad \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}; \quad \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left( \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left( \frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right) \Rightarrow M < 2$$

$$M^{10} = 2^{10} = 1024 < 1025$$

Có

$$M^{10} < 1025$$

Vậy .

**Câu 5. (HSG 7 huyện Anh Sơn, Nghệ An 2015 - 2016)**

Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:  $2(ab+bc+ca) > a^2 + b^2 + c^2$

**Lời giải**

Vì  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác nên ta có:

$$a+b > c \Rightarrow ac+bc > c^2 \quad (1)$$

$$b+c > a \Rightarrow ab+ac > a^2 \quad (2)$$

$$c+a > b \Rightarrow bc+ab > b^2 \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) và ta được:  $2(ab+bc+ca) > a^2 + b^2 + c^2$  (đpcm)

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com  
<https://www.vn teach.com>