

Câu 11. Một hình hộp chữ nhật được ghép bởi 42 hình lập phương cạnh 1 cm. Biết chu vi đáy của hình hộp chữ nhật là 18 cm. Độ dài cạnh lớn nhất của hình hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. 6 cm. B. 7 cm. C. 3 cm. D. 9 cm.

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai cạnh AB, AC sao cho $MN \parallel BC$. Biết $AB = 9$ cm, $AM = 3$ cm, $AN = 4$ cm. Độ dài đoạn BC bằng

- A. 15 cm. B. 12 cm. C. 10 cm. D. 16 cm.

Câu 13. Cho tam giác ABC đều có diện tích bằng $8 + 4\sqrt{3}$ cm². Gọi M là trung điểm của BC , phân giác của góc MAB cắt BM tại N . Diện tích của tam giác ABN bằng

- A. 2 cm². B. 3 cm². C. 4 cm². D. 1 cm².

Câu 14. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10$. Dây cung CD vuông góc với AB tại $E, AE = 1$. Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở K . Độ dài đoạn BK bằng

- A. 9. B. 15. C. 6. D. 8.

Câu 15. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn cắt nhau tại M . Biết rằng $\widehat{BAC} = 2\widehat{BMC}$. Số đo góc $\widehat{BAC}$ bằng

- A. 75°. B. 90°. C. 80°. D. 72°.

Câu 16. Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50 ngàn đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1 ngàn đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30 ngàn đồng.

- A. 45 ngàn đồng. B. 40 ngàn đồng. C. 42 ngàn đồng. D. 50 ngàn đồng.

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm).

1) Tìm nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $(x - 4)y^2 = x^2$.

2) Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Câu 2 (4,0 điểm).

1) Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số). Biết rằng $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{P(12) + P(-8)}{10} + 25$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 3} = y + \sqrt{y^2 + 3} \\ x^3 - y^3 = 3x - 3y + 4 \end{cases}$$

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC . Đường tròn (O) tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L . Tiếp tuyến của (O) tại điểm E thuộc cung nhỏ KL cắt đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N . Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q .

1) Chứng minh rằng $\angle MON = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$.

2) Chứng minh rằng đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

3) Chứng minh $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh $ab + bc + ca \leq abc + 2$.

HẾT

- Họ và tên thí sinh: SBD:
 - Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
 - Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	C	B	D	B	A	A	D	D
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	A	C	B	A	C	B	D	C

II. PHẦN TỰ LUẬN

Lưu ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm (HDC) dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với HDC mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của HDC.
- Điểm bài thi là tổng điểm các bài không làm tròn số.

Hướng dẫn chấm tự luận

Câu 1 (3,0 điểm).

1) Tìm nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $(x - 4)y^2 = x^2$ (1)

2) Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Ý	Đáp án	Điểm																																												
Câu 1.1 (1,5 điểm)	Với $x = 4$ thì (1) trở thành: $0.y^2 = 16$ (vô lý) $\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.	0,25																																												
	Với $x \neq 4$ thì $y^2 = \frac{x^2}{x - 4} = \frac{x^2 - 16 + 16}{x - 4} = x + 4 + \frac{16}{x - 4}$.	0,25																																												
	Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{16}{x - 4} \in \mathbb{Z}$.	0,25																																												
	Do đó $x - 4$ là ước của 16 $\Rightarrow x - 4 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16\}$.																																													
	<table><tr><td>$x - 4$</td><td>- 16</td><td>- 8</td><td>- 4</td><td>- 2</td><td>- 1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td></tr><tr><td>x</td><td>- 12</td><td>- 4</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>12</td><td>20</td></tr><tr><td>y^2</td><td>- 9</td><td>- 2</td><td>0</td><td>- 2</td><td>- 9</td><td>25</td><td>18</td><td>16</td><td>18</td><td>25</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td>± 5</td><td>$\pm 3\sqrt{2}$ (loại)</td><td>± 4</td><td>$\pm 3\sqrt{2}$ (loại)</td><td>± 5</td></tr></table>	$x - 4$	- 16	- 8	- 4	- 2	- 1	1	2	4	8	16	x	- 12	- 4	0	2	3	5	6	8	12	20	y^2	- 9	- 2	0	- 2	- 9	25	18	16	18	25	y			0			± 5	$\pm 3\sqrt{2}$ (loại)	± 4	$\pm 3\sqrt{2}$ (loại)	± 5	0,5
	$x - 4$	- 16	- 8	- 4	- 2	- 1	1	2	4	8	16																																			
x	- 12	- 4	0	2	3	5	6	8	12	20																																				
y^2	- 9	- 2	0	- 2	- 9	25	18	16	18	25																																				
y			0			± 5	$\pm 3\sqrt{2}$ (loại)	± 4	$\pm 3\sqrt{2}$ (loại)	± 5																																				
Kết luận: Phương trình có các nghiệm nguyên là: $(5; 5), (5; - 5), (4; 4), (4; - 4), (- 4; 0), (20; 5), (20; - 5)$.																																														
		0,25																																												
1.2 (1,5 điểm)	Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Dirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.	0,5																																												
	Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ra được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2 . Khi đó ta có $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.	0,5																																												
	+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a, b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a - b$ là số chẵn và $a + b$ cũng là số chẵn $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) : 4$ (đpcm).	0,5																																												

--	--	--

Câu 2 (4,0 điểm).

1) Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số). Biết rằng $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{P(12) + P(-8)}{10} + 25$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 3} = y + \sqrt{y^2 + 3} & (1) \\ x^3 - y^3 = 3x - 3y + 4 & (2) \end{cases}$$

Ý	Đáp án	Điểm
Câu 2.1 (2,0 điểm)	Đặt $Q(x) = P(x) - 10x$ Có $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$	0,5
	Giả sử $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$	0,5
	Khi đó $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r) + 10x$	0,5
	Từ đó tính được $\frac{P(12) + P(-8)}{10} + 25 = 2009$.	0,5
Câu 2.2 (2,0 điểm)	Điều kiện: $ x \geq \sqrt{3}$.	0,25
	Đặt $\begin{cases} u = x + \sqrt{x^2 - 3} \\ v = y + \sqrt{y^2 + 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \geq x, v \geq y \\ x = \frac{u^2 + 3}{2u} \\ y = \frac{v^2 - 3}{2v} \end{cases}$	0,25
	Từ phương trình (1) $\Rightarrow u = v \Rightarrow y = \frac{u^2 - 3}{2u} \Rightarrow x - y = \frac{3}{u}$.	0,25
	Phương trình (2) $\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy) = 3(x - y) + 4$ $\Leftrightarrow (x - y)[(x - y)^2 + 3xy - 3] = 4$	0,25
	Biến đổi sang ẩn phụ ta được phương trình mới $\frac{3}{u} \left(\frac{9}{u^2} + 3 \cdot \frac{u^2 + 3}{2u} \cdot \frac{u^2 - 3}{2u} - 3 \right) = 4 \Leftrightarrow 9u^4 - 16u^3 - 36u^2 + 27 = 0$ $\Leftrightarrow (u - 3)(9u^3 + 11u^2 - 3u - 9) = 0$ (*)	0,25
	Nếu $x \leq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 3} < x + x = x - x = 0$ Mặt khác $y + \sqrt{y^2 + 3} > y + y \geq 0$ do đó (1) vô nghiệm. Vậy $x > 0$, kết hợp điều kiện $ x \geq \sqrt{3} \Rightarrow x \geq \sqrt{3} \Rightarrow u \geq \sqrt{3} > 1$	0,25
	Khi đó $9u^3 + 11u^2 - 3u - 9 > 9 \cdot 1^3 + 3u(u - 1) + 8u^2 - 9 > 0$.	
	Do đó (*) $\Leftrightarrow u = 3 \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 3} = 3 \\ y + \sqrt{y^2 + 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.	0,25
	Đối chiếu điều kiện kết luận nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; 1)$.	0,25

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC . Đường tròn (O) tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L . Tiếp tuyến của (O) tại điểm E thuộc cung nhỏ KL cắt đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N . Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q .

- 1) Chứng minh rằng $\angle MON = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$.
- 2) Chứng minh rằng đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.
- 3) Chứng minh $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$.

Ý	Đáp án	Điểm
3.1 (1,5 điểm)		
	1) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $\angle MOL = \angle MOE; \angle NOE = \angle NOK$ (1)	0,25
	Tứ giác $ALOK$ có $\angle AKO + \angle ALO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle BAC + \angle KOL = 180^\circ$	0,25
	$\Rightarrow \angle BAC + \angle MOL + \angle MOE + \angle EON + \angle NOK = 180^\circ$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}(\angle MOL + \angle MOE + \angle EON + \angle NOK) = 90^\circ$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}\angle BAC + (\angle MOE + \angle EON) = 90^\circ$	0,25
	Hay $\frac{1}{2}\angle BAC + \angle MON = 90^\circ \Rightarrow \angle MON = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ (ĐPCM)	0,25
3.2 (1,5 điểm)	2) Từ giả thiết và 1) suy ra $\angle EPK = \angle LKQ$ (3)	0,25
	Do tam giác OKL cân tại O nên $\angle OKL = \angle LKQ$ (4). Từ (3) và (4) suy ra tứ giác $OKEP$ nội tiếp. Mặt khác do tứ giác $OKNE$ nội tiếp đường tròn đường kính ON	0,25
	Từ đó suy ra 5 điểm O, K, N, E, P cùng thuộc đường tròn đường kính ON	0,25
	$\Rightarrow \angle NPO = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow NP \perp OM$ (5)	0,25
	Chứng minh tương tự cũng có $MQ \perp ON$ (6) mà $OE \perp MN$ (7)	0,25
	Từ (5), (6), (7) $\Rightarrow$ ba đường cao MQ, NP và OE của tam giác OMN đồng quy (ĐPCM)	0,25
3.3 (1,0)	3) Từ giả thiết và câu 1) ta có $QK = QE, PE = PL$ (8)	0,25
	Theo phần 2) tứ giác $ONEP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ONE = \angle EPM$ (9)	0,25

điểm)	tứ giác $OMEQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NQE} = \widehat{PME}$ (10)	
	Từ (9) và (10) suy ra $\Delta NQE \sim \Delta PME (g.g) \Rightarrow \frac{NE}{EP} = \frac{EQ}{EM} \Rightarrow EM.EN = EQ.EP$ (11)	0,25
	Từ (1) và (11) suy ra $KQ.PL = EM.EN$ (đpcm)	0,25

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh $ab + bc + ca \leq abc + 2$ (*)

Ý	Đáp án	Điểm
4 (1,0 điểm)	Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, ta suy ra: trong ba số a, b, c có ít nhất một trong ba số bé hơn hoặc bằng 1. Thật vậy nếu $a > 1, b > 1, c > 1$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$ (mâu thuẫn)	0,25
	Nếu cả ba số a, b, c đều ≤ 1 hoặc ≥ 1 thì $a^2 + b^2 + c^2 + abc \leq 4$, hoặc $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$. Theo giả thiết thì dấu bằng xảy ra nên $a = b = c = 1$. Bất đẳng thức (*) đã được chứng minh	0,25
	Trường hợp còn lại, tồn tại chỉ hai trong ba số a, b, c cùng ≤ 1 hoặc cùng ≥ 1 . Không mất tính tổng quát giả sử 2 số đó là a và c thì ta có $(a-1)(c-1) \geq 0 \Leftrightarrow ac + 1 \geq a + c \Leftrightarrow abc + b \geq ab + bc \Leftrightarrow abc \geq ab + bc - b \Leftrightarrow 2 + abc \geq 2 + ab + bc - b$.	0,25
	Ta cần chứng minh $2 + ab + bc - b \geq ab + bc + ca$ hay $2 - b \geq ac$ Theo giả thiết ta có: $4 = abc + a^2 + b^2 + c^2 \geq (a^2 + c^2) + b(b + ac) \geq 2ac + b(b + ac)$ Suy ra $(b+2)(b+ac-2) \leq 0 \Leftrightarrow b+ac \leq 2$ (do $b+2 > 0$). Vậy ta đã chứng minh được (*). Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.	0,25

-----HẾT-----