Đề 60

ĐỀ HSG TOÁN 9 HẢI DƯƠNG NĂM 2023-2024

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=4$.

   Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{a+5}+\frac{\sqrt{b}}{b+5}+\frac{\sqrt{c}}{c+5}=\frac{10}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$

2) Cho $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$A=f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+...+f\left(\frac{2022}{2022}\right)+f\left(\frac{2021}{2022}\right).$$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $3x^2+6x-3=\sqrt{\frac{x+7}{3}}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên $x;y$ thỏa mãn đẳng thức: $8x^2y^2+x^2+y^2=10xy$.

2) Cho $p;x;y$ là các số tự nhiên thỏa mãn $px^2+x=(p+1)y^2+y$. Chứng minh rằng $px+py+1$ là số chính phương.

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Điểm A nằm bên ngoài đường tròn tâm O . Qua A vẽ hai tiếp tuyến AB , AC với đường tròn (B , C là các tiếp điểm). Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , AC ; H là giao điểm của AO với BC . Lấy điểm E bất kì trên đường tròn (E khác B và C). Qua E vẽ tiếp tuyến với đường tròn tâm O , tiếp tuyến này cắt đường thẳng MN tại K.

   a) Chứng minh rằng: $MN^2=AH.HO$;

   b) Chứng minh rằng: $KA=KE$.

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi D,E,F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC,BO với AC,CO với AB.

   Chứng minh rằng: $AD+BE+CF\geq\frac{9R}{2}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab}+\frac{a^2+c^2+2}{a+c-ac}+\frac{c^2+b^2+2}{c+b-cb}$.

---Hết---

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c =6 và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=4$.

   Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{a+5}+\frac{\sqrt{b}}{b+5}+\frac{\sqrt{c}}{c+5}=\frac{10}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$

2) Cho $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau:

   A= $f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+\ ....+f\left(\frac{2020}{2022}\right)+f\left(\frac{2021}{2022}\right)$.

1) Từ giả thiết ta có

   $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2=16 \Rightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ = 5

   Suy ra a + 5 = a + $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ =$(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}+\sqrt{c}\ )$

   Tương tự ta có:

   - b + 5= $b+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ =$(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{a}\ )$
   - c+ 5= $c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ =$(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{b}\ )$

   Do đó:

   $$\frac{\sqrt{a}}{a+5}+\frac{\sqrt{b}}{b+5}+\frac{\sqrt{c}}{c+5}=\frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})}+\frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}+\frac{\sqrt{c}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{b})}$$

   $$¿\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})+\sqrt{b}(\sqrt{c}+\sqrt{a})+\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\frac{2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$$

   $$¿\frac{10}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$$

Vậy $\frac{\sqrt{a}}{a+5}+\frac{\sqrt{b}}{b+5}+\frac{\sqrt{c}}{c+5}=\frac{10}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$.

2) Trước hết, ta chứng minh được: Nếu $x + y$= 1 thì $f\ (x)\ +f\ (y)$ =1.

   Thật vậy $f(x)$ =$\frac{x^3}{1-3x+3x^2}$ $\Rightarrow f(y) = f(1-x)=\frac{(1-x)^3}{x^3+(1-x)^3}$)

   Suy ra $f(x) + f(y) = f(x) + f(1-x) = \frac{x^3}{1-3x+3x^2}+\frac{(1-x)^3}{x^3+(1-x)^3}=1$ và $f\left(\frac{1011}{2022}\right)=$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

   Ta có A=$\left[f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2021}{2022}\right)\right]+...+\left[f\left(\frac{1010}{2022}\right)+f\left(\frac{1012}{2022}\right)\right]+f\left(\frac{1011}{2022}\right)$

   (biểu thức trên có 1010 dấu ngoặc vuông, mỗi biểu thức trong ngoặc vuông có giá trị bằng 1)

Vậy A= 1010 +$f\left(\frac{1}{2}\right)=1010,5$.

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Điều kiện xác định: $-7\le x\le -1-\sqrt{2}$ hoặc $x\ge -1+\sqrt{2}$.

$3x^2+6x-3=\sqrt{\frac{x+7}{3}}\ \Leftrightarrow 3(x+1)^2=\sqrt{\frac{x+7}{3}}+6$ (2)

Đặt $y+1=\sqrt{\frac{x+7}{3}}\ge 0\Rightarrow 3(y+1)^2=x+7$. Từ (2) suy ra $3(x+1)^2=y+7$

Ta có: $\begin{cases}3(x+1)^2=y+7\\3(y+1)^2=x+7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+6x-y-4=0\\3y^2+6y-x-4=0\end{cases}$

$$3(x^2-y^2)+7(x-y)=0\Leftrightarrow(x-y)(3x+3y+7)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\y=\frac{-7}{3}-x\end{array}\right.$$

$\text{TH1}: y=x\Rightarrow\sqrt{\frac{x+7}{3}}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\3x^2+5x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{73}-5}{6}$ (thỏa mãn)

$TH2: y=\frac{-7}{3}-x\Rightarrow\sqrt{\frac{x+7}{3}}=\frac{-4}{3}-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{-4}{3}\\9x^2+21x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{69}-7}{6}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là S=$\left\{\frac{-\sqrt{73}-5}{6};\frac{-\sqrt{69}-7}{6}\right\}$.

2) Nhận xét: y = 0 không thoả mãn hệ ⇒ y≠0.

Chia cả hai vế của mỗi phương trình cho y ta được:

$$\begin{cases}xy+x+1=7y\\x^2y^2+xy+1=13y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}=7\\x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{x}{y}=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}=7\\\left(x+\frac{1}{y}\right)^2-\frac{x}{y}=13\end{cases}$$

$Đặt\begin{cases}a=x+\frac{1}{y}\\b=\frac{x}{y}\end{cases}, ta\ có:\begin{cases}a+b=7\\a^2-b=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=7-a\\a^2+a-20=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\\\begin{cases}a=-5\\b=12\end{cases}\end{array}\right.$

- $Trường\ hợp\ 1:\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{y}=4\\\frac{x}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\\3y^2-4y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow y=\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

- *Trường hợp 2*: $\begin{cases} a=-5 \\ b=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-5 \\ \dfrac{x}{y}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12y \\ 12y^2+5y+1=0 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) \in \left\{\left(1;\dfrac{1}{3}\right),(3;1)\right\}$

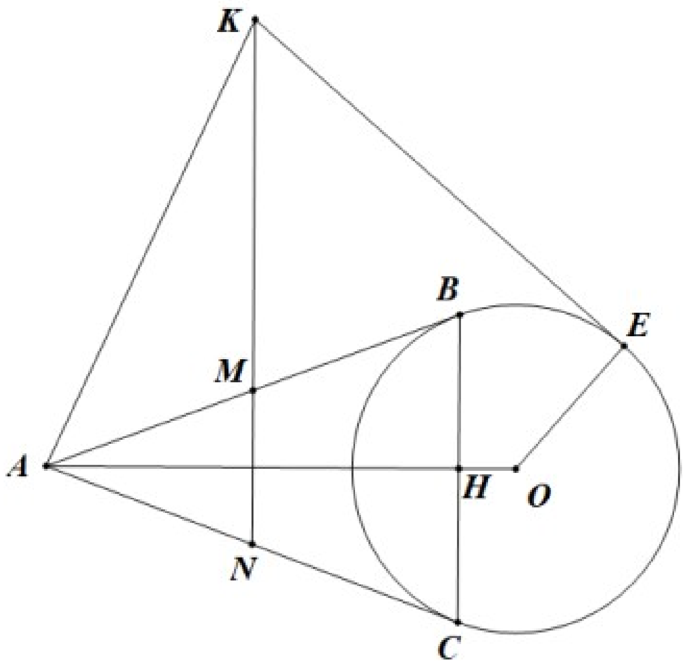
Câu 3 (2,0 điểm)

1) Ta có: $8x^2y^2+x^2+y^2=10xy \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy=8xy-8x^2y \Leftrightarrow (x-y)^2=8xy(1-xy)$.
Do $(x-y)^2 \geq 0$ *với mọi* x, y *nên* $8xy(1-xy) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq xy \leq 1$.
Mặt khác do *x ; y* nguyên nên *xy* = 0 hoặc *xy* = 1.
   - *Trường hợp 1: Nếu* $xy=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ y=0 \Rightarrow x=0 \end{array}\right.$
   - *Trường hợp 2: Nếu* $xy=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$

   Vậy, các cặp số nguyên (x ; y) thỏa mãn bài toán là (0;0); (−1; −1) ; (1;1).

2) *Ta có*: $px^2+x=(p+1)y^2+y \Leftrightarrow p(x^2-y^2)+x-y=y^2 \Leftrightarrow (x-y)(px+py+1)=y^2$
Đặt $d=(x-y;px+py+1)$ (*với* $d \in N^{¿}$) $\Rightarrow \begin{cases} (x-y) \vdots d \\ (px+py+1) \vdots d \end{cases}$
Vì $(x-y)(px+py+1)=y^2 \Rightarrow y^2 \vdots d \Rightarrow y \vdots d$. *Mà* $(x-y) \vdots d \Rightarrow x \vdots d \Rightarrow (px+py) \vdots d$
Ta có $\begin{cases} (px+py) \vdots d \\ (px+py+1) \vdots d \end{cases} \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1.$
Vậy $x-y$ và $px+py+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau, mà $(x-y)(px+py+1)$ là số chính phương nên $px+py+1$ là số chính phương.

Câu 4 (3,0 điểm)



1) Ta có ΔABC cân tại A suy ra AB = AC

ΔOBC cân tại O suy ra OB = OC

Suy ra AO là đường trung trực của BC suy ra AO ⊥ BC tại trung điểm H của BC .

Xét ΔABO vuông tại B có đường cao BH nên AH. HO=BH

$AH.BO=BH^2=\left(\frac{BC}{2}\right)^2=\frac{BC^2}{4}.$

Vì MN là đường trung bình của ΔABC nên MN=

$\frac{BC}{2}\Rightarrow MN^2=\frac{BC^2}{4}\Rightarrow MN^2=AH.HO.$

Chứng minh KA =KE

ΔKEO vuông tại E , ta có

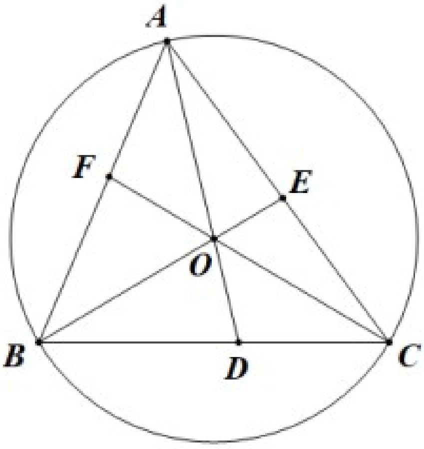
$KE^2=KO^2-OE^2=KO^2-R^2(1)$

Do MN // BC , M là trung điểm của AB ⇒ I là trung điểm của AH

$\Rightarrow AI=IH\Rightarrow OI-AI=OI-IH=OH\Rightarrow KA^2=KO^2-OA.OH=KO^2-OB^2=KO^2-R^2(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $KE^2=KA^2\Rightarrow KE=KA.$

2)



$Ta\ có: \frac{OA}{AD} = \frac{S_{AOC}}{S_{ABD}} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABD}} = \frac{S_{AOB} + S_{AOC}}{S_{ABC}}$

$Tương\ tự: \frac{OB}{BE} = \frac{S_{AOB} + S_{AOC}}{S_{ABC}}; \frac{OC}{CF} = \frac{S_{AOC} + S_{OBC}}{S_{ABC}}$

$\Rightarrow \frac{OA}{AD} + ¿ \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2 \Rightarrow R\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right) = 2$

$\Rightarrow 2(AD + BE + CF) = R.(AD + BE + CF).\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right)$

$Theo\ bất\ đẳng\ thức\ AM - GM, ta\ có: AD + BE + CF \geq 3\sqrt[3]{AD \cdot BE \cdot CF}$ và

$\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}}$

$\Rightarrow 2(AD + BE + CF) \geq 9R \Rightarrow AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

Câu 5 (1,0 điểm)

$Ta\ có: \frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b - ab} = \frac{a^2 + 1 + b^2 + 1}{(a + b)(a + b + c) - ab} = \frac{a^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + ac + bc} + \frac{b^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + ac + bc}$

$Chứng\ minh\ tương\ tự:$

$\frac{a^2 + c^2 + 2}{a + c - ac} = \frac{a^2 + 1}{a^2 + c^2 + ab + ac + bc} + \frac{c^2 + 1}{a^2 + c^2 + ab + ac + bc};$

$\frac{b^2 + c^2 + 2}{b + c - bc} = \frac{b^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + ac + bc} + \frac{c^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + ac + bc};$

$\frac{b^2 + c^2 + 2}{b + c - ac} = \frac{b^2 + 1}{b + c^2 + ab + ac + bc} + \frac{c^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + ac + bc}.$

$Gọi\ x=\frac{a^2+1}{a^2+b^2+ab+ac+bc}+\frac{a^2+1}{a^2+c^2+ab+ac+bc}$

$\Rightarrow x=\left(a^2+1\right).\left(\frac{1}{a^2+b^2+ab+ac+bc}+\frac{1}{a^2+c^2+ab+ac+bc}\right)$

$Áp\ dụng\ bất\ đẳng\ thức\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}, \forall x;y>0.\ Ta\ có:$

$\frac{1}{a^2+b^2+ab+ac+bc}+\frac{1}{a^2+c^2+ab+ac+bc}\geq\frac{4}{2a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$

$\Rightarrow\frac{1}{a^2+b^2+ab+ac+bc}+\frac{1}{a^2+c^2+ab+ac+bc}\geq\frac{4}{a^2+\left(a+b+c\right)^2}=\frac{4}{a^2+1}$

$\Rightarrow x=\frac{a^2+1}{a^2+b^2+ab+ac+bc}+\frac{a^2+1}{a^2+c^2+ab+ac+bc}\geq\frac{4\left(a^2+1\right)}{a^2+1}=4$

Chứng minh tương tự, ta có:

$y=\frac{b^2+1}{a^2+b^2+ab+ac+bc}+\frac{b^2+1}{b^2+c^2+ab+ac+bc}\geq 4$

$z=\frac{c^2+1}{a^2+c^2+ab+ac+bc}+\frac{c^2+1}{b^2+c^2+ab+ac+bc}\geq 4$

$Suy\ ra\ S=x+y+z\geq 12.\ Dấu\ bằng\ xảy\ ra\ khi\ a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 12 khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.