

Câu I: (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$.

2) Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ và $a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = -2$.

Tính giá trị biểu thức: $Q = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Câu II: (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2 + 5x + 1 = (x+5)\sqrt{x^2+1}$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Câu III: (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $7(x+y) = 3(x^2 - xy + y^2)$.

2) Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn: $5(m+n)^2 + 22mn$ chia hết cho 441. Chứng minh rằng mn chia hết cho 441.

Câu IV: (6,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O) . Từ M vẽ hai tiếp tuyến MA và MB đến đường tròn (O) , (A, B là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính BOC của đường tròn (O) , MC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D (D khác C), MO cắt AB tại H .

a) Chứng minh rằng: $MO \parallel AC$ và $\angle MHD = \angle MCO$.

b) Tiếp tuyến của (O) tại C cắt BA tại E . Hạ $AK \perp BC$ ($K \in BC$). Gọi I là giao điểm của AK và MC , F là giao điểm của MA và CE . Chứng minh rằng: $HI \parallel BC$ và ba điểm B, I, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng: $OE \perp MC$.

Câu V: (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 1$.

Chứng minh:
$$\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \right)$$

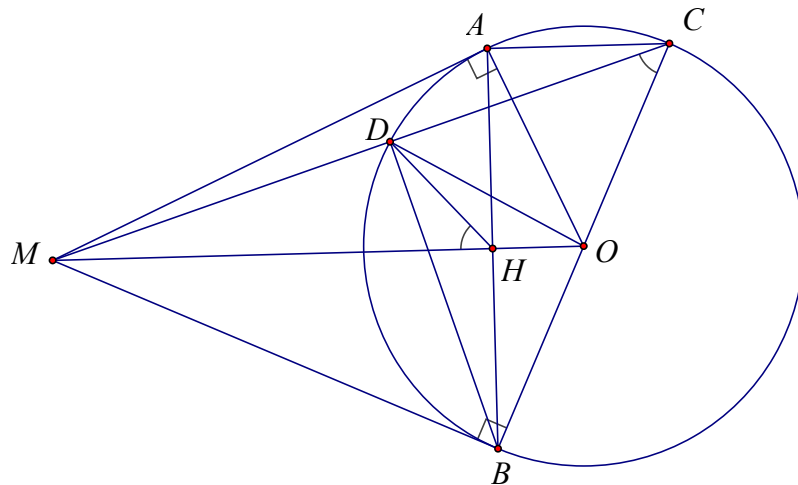
-----HẾT-----

LỜI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
I (4,0 đ)	1) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$.	2,0
	ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 3, x \neq 4$.	0,25
	$A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$	
	$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) + \sqrt{x}+1 + 2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$	0,5
	$A = \frac{\sqrt{x}-1 + (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3x-3\sqrt{x}-6+3\sqrt{x}-3}$	0,5
	$A = \frac{x+\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{3x-9} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}.$	0,5
	Vậy với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 3, x \neq 4$ thì $A = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}.$	0,25
	2) Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 1 \text{ và } a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -2.$	2,0
	Tính giá trị biểu thức: $Q = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$	
	Ta có: $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -2$ $\Leftrightarrow \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{abc} = -2$ $\Rightarrow a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 2abc = 0$ $\Leftrightarrow ab(a+b) + c(a+b)^2 + c^2(a+b) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b)(ab+ac+bc+c^2) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0.$	0,5
	• TH1: $a = -b$. Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow c = 1$. Suy ra: $Q = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.	
	• TH2: $b = -c$. Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow a = 1$. Suy ra: $Q = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.	0,5
	• TH3: $c = -a$. Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow b = 1$. Suy ra: $Q = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.	
	Vậy: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.	0,5

II (4,0 đ)	1) Giải phương trình: $x^2 + 5x + 1 = (x + 5)\sqrt{x^2 + 1}$.	2,0
	$x^2 + 5x + 1 = (x + 5)\sqrt{x^2 + 1}$ $\Leftrightarrow x^2 + 1 + 5x - x\sqrt{x^2 + 1} - 5\sqrt{x^2 + 1} = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} - x) - 5(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} - 5) = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x = 0 \text{ hoặc } \sqrt{x^2 + 1} - 5 = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = x \text{ hoặc } \sqrt{x^2 + 1} = 5$ $\Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2 \text{ hoặc } x^2 + 1 = 25$ $\Leftrightarrow 1 = 0 \text{ (vô lý) hoặc } x = \pm\sqrt{24}$ $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{24}.$ Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\sqrt{24}$.	0,5
		0,5
		0,5
		0,5
		0,5
		0,5
		0,5
		0,5
		0,5
	2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2 y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$.	2,0
	Nhận xét: $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình $\Rightarrow y \neq 0$.	0,25
	Chia cả hai vế của mỗi phương trình lần lượt cho y và y^2 ta được:	
	$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2 y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{cases}.$	0,5
	Đặt $a = x + \frac{1}{y}$, $b = \frac{x}{y}$, ta có: $\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 - a \\ a^2 + a - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -5 \\ b = 12 \end{cases}.$	0,5
	• Trường hợp 1: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 3y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$ • Trường hợp 2: $\begin{cases} a = -5 \\ b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = -5 \\ \frac{x}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12y \\ 12y^2 + 5y + 1 = 0 \end{cases} \text{ (hệ vô nghiệm).}$	0,25
	Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) \in \left\{ \left(1; \frac{1}{3}\right), (3; 1) \right\}.$	0,25
III (4,0 đ)	1) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $7(x + y) = 3(x^2 - xy + y^2)$.	2,0
	Ta có: $7(x + y) = 3(x^2 - xy + y^2) \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$ và $x + y : 3$. Áp dụng Bất đẳng thức $xy \leq \frac{(x + y)^2}{2}$ (dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$), lại có:	0,25

	$x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy \geq (x+y)^2 - \frac{3}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2$ $\Rightarrow 7(x+y) = 3(x^2 - xy + y^2) \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow x+y \leq \frac{28}{3} \Rightarrow x+y \in \{0; 3; 6; 9\}.$ TH1: $x+y=0 \Rightarrow x^2 - xy + y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. TH2: $x+y=3 \Rightarrow 3x^2 - 9x + 2 = 0$ (loại). TH3: $x+y=6 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 22 = 0$ (loại). TH4: $x+y=9 \Rightarrow (x; y) = (4; 5)$ hoặc $(5; 4)$. Kết luận.	0,5 0,5 0,25 0,25 0,25
	2) Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn: $5(m+n)^2 + 22mn$ chia hết cho 441. Chứng minh rằng mn chia hết cho 441.	2,0
	$5(m+n)^2 + 22mn : 441 \Rightarrow 5(m-n)^2 + 42mn : 441 \Rightarrow 5(m-n)^2 + 42mn : 21.$ Do $(5; 21) = 1 \Rightarrow (m-n)^2 : 21 \Rightarrow m-n : 21$ $\Rightarrow 5(m-n)^2 : 441$ $\Rightarrow 42mn : 441$ $\Rightarrow mn : 21$ $\Rightarrow n(m-n) + n^2 : 21$ $\Rightarrow n^2 : 21 \Rightarrow n : 21.$ Tương tự ta có $m : 21$. Suy ra $mn : 441$.	0,5 0,5 0,5 0,5
IV (6,0 đ)	Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M vẽ hai tiếp tuyến MA và MB đến đường tròn (O), (A, B là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính BOC của đường tròn (O), MC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D (D khác C), MO cắt AB tại H.	6,0



a) Chứng minh rằng: $MO \parallel AC$ và $\widehat{MHD} = \widehat{MCO}$.

2,0

Chứng minh được: $MO \perp AB$ tại H . (1)

0,5

Chứng minh được $AC \perp AB$ tại C . (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AC \parallel MO$.

0,5

Nối BD . Tam giác MBC vuông tại B có BD là đường cao nên: $MB^2 = MD \cdot MC$.

Tam giác MBO vuông tại B có BH là đường cao nên: $MB^2 = MH \cdot MO$.

0,5

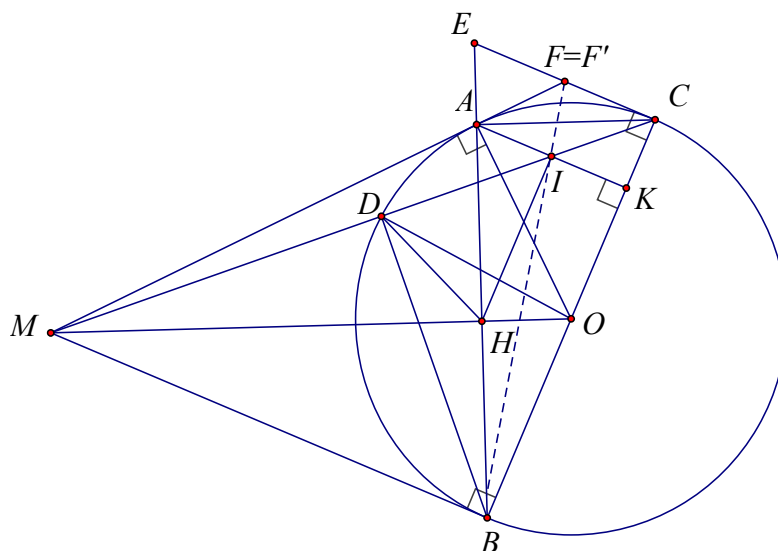
Suy ra: $MD.MC = MH.MO$

$$\Rightarrow \Delta MHD \sim \Delta MCO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \boxed{MHD} = \boxed{MCO}.$$

0,5

b) Tiếp tuyến của (O) tại C cắt BA tại E . Hạ $AK \perp BC$ ($K \in BC$). Gọi I là giao điểm của AK và MC , F là giao điểm của MA và CE . Chứng minh rằng: $HI \parallel BC$ và ba điểm B, I, F thẳng hàng.

2,0



Ta có: $AK \parallel CE$ (do cùng vuông góc với BC) nên $AI \parallel FC$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MF} = \frac{MI}{MC} \text{ (theo định lý Ta-lét)}$$

Lại có: $FA = FC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OC$ nên FO là đường trung trực của $AC \Rightarrow FO \perp AC$. Mà $AH \perp AC \Rightarrow FO \parallel AH$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MF} = \frac{MH}{MO} \text{ (theo định lý Ta-lét)}$$

0.5

	Do x, y, z là các số thực dương, áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{xy}{2\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{xy}{z} + z \right).$ Chứng minh tương tự: $\frac{yz}{y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{yz}{x} + x \right); \frac{zx}{z+x} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{zx}{y} + y \right).$ Suy ra: $\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{1}{4} \left(x+y+z + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \right)$ $\Rightarrow \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \right)$ (do $x+y+z=1$).	0,5 0,5 0,5 0,5
--	---	---