**Ví dụ 9.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải**. Ở bài toán này, quan sát bài toán ta thấy rằng bài toán chứa khá nhiều căn thức và xem chừng chúng không liên quan gì đến nhau nhiều. Với mong muốn thoát căn thì việc nâng lũy thừa thì tính khả thi không cao, còn đặt ẩn phụ thì cũng khó nhìn thấy. Nhưng có một điều chúng ta dễ nhận thấy nhất đó là vế trái của phương trình chứa tích của hai tổng chứa căn, đặc biệt sự xuất hiện đối lập của  và  ở hai tổng và bên vế phải phương trình lại không chứa bất kì một hệ số nào nên điều tự nhiên ta nghĩ ngay đến giá trị  có liên quan gì đến phương trình đã cho không?

Với , ta thấy ngay được phương tình đã cho thỏa.

Mặt khác với hy vọng thoát căn thì rõ ràng ta “gỡ” được căn thức bớt đi bên vế trái bao nhiêu thì ta được lợi bấy nhiêu. Quan sát ta thấy được hai đánh giá sau:





Điều này, giúp ta nghĩ đến liên hợp “kiểu ngang” cho phương trình đã cho hai lần, mỗi lần cho một tổng ta sẽ thu gọn được hết căn thức bên vế trái và bớt ẩn số x cho vế phải. Thật vậy, ta biến đổi như sau:



Tiếp tục liên hợp cho tổng thứ hai, ta thu được:



Với điều kiện của bài toán, ta thu gọn ta có được biến đổi:



Ta thấy ở phương trình (\*) và phương trình ban đầu có tổng hai vế cộng lại bằng 0 và có các số hạng có thể rút gọn với nhau nên ta thực hiện phép cộng ta thu được một biến đổi đơn giản sau:



Đây là một phương trình vô tỷ hoàn toàn có thể nâng lũy thừa giải đơn giản.

Bây giờ, ta cụ thể hóa lại lời giải của bài toán này như sau:

**- Cách 1:** Điều kiện: 

Nhận xét  thỏa phương trình đã cho. Vậy ta chỉ cần xét với .

Với  ta luôn có:  và 

Do đó phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:







Lấy (1) + (2) vế theo vế ta th được phương trình:

 

  

Vậy phương tình đã cho có hai nghiệm:  

Như đã chỉ ra ở phần phân tích hướng giải, chúng tôi có đề cập đến việc đặt ẩn phụ là khó thấy nhưng điều đó không có khả năng là chúng ta không đặt được. Nếu quan sát tinh ý một chút ta thấy rằng các hệ số trong phương trình đã cho sẽ xuất hiện đại lượng  nếu chúng ta chia và sắp xếp đại lượng chia hợp lí. Thật vậy nếu với tổng thứ nhất trong tích ta chia cho  ta sẽ thu được một biến đổi sau: 

Với tổng thứ hai ta chia cho x ta sẽ thu được một biến đổi sau:



Điều này dẫn đến cho ta thuận lợi đó là: khai thác hết đại lượng  ở vế phải và làm xuất hiện được đại lượng .

Với việc khai thác này, ta sẽ chuyển hóa bài toán về ẩn phụ cho hình thức bài toán được đơn giản hóa hình thức của nó. Với  ta sẽ đưa bài toán về phương trình sau:

Lúc này với nhận xét rằng:

 và 

Nên ta có tiếp biến đổi sau: 

Ở phương trình (\*) ta thấy vế trái và vế phải về hình thức có sự giống nhau chỉ khác về biến số nên ta sẽ nghĩ ngay đến việc xét một hàm số đặc trưng để từ đó giải bài toán bằng phương pháp hàm số.

Từ đó ta có tiếp một cách giải sau:

**- Cách 2:** Điều kiện 

Với  phương trình đã cho được nghiệm đúng.

Với  ta chia hai vế phương trình cho  ta thu được phương trình:





Đặt  , ta có phương trình  trở thành phương trình:



Nhận xét với   nên ta có được biến đổi sau:



Xét hàm số  

Ta có:  

Vậy hàm số  luôn nghịch biến với mọi . Do đó từ phương trình (4) ta có:     

Từ đó ta có:  

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm:  

**- Bình luận.** Qua bài toán này, ta thấy cả hai cách giải đều có nét hay riêng. Nhưng rõ ràng ứng với mỗi cách giải ta đã thấy được thêm tầm quan trọng khi đoán hướng giải cho bài toán vô tỷ rất quan trọng. Theo nhận xét chủ quan của chúng tôi thì ở cách 1 lời giải bài toán cho hướng tự nhiên hơn, còn lời giải 2 mang đậm tính chất tư duy và kỉ thuật. Lời giải trong cách hai được xem là một lời giải phối hợp nhiều phương pháp điển hình để giải một bài toán vô tỷ mà độc giải sẽ được thấy hết nét đẹp của nó trong chương tiếp theo mà chúng tôi khai thác các bài toán được giải như cách 2.

**Ví dụ 10.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Đối với phương trình này hình thức đơn giản, nhưng thông qua bài toán này chúng tôi muốn gửi đến độc giả một cách giải phương trình bậc bốn có nghiệm không phải là nghiệm nguyên.

Thật vậy, với hình thức của phương trình để thoát căn ta dùng phép nâng lũy thừa để thu được một phương trình bậc bốn. Cụ thể ta có phương trình được biến đổi thành:

 

Phương trình (\*) là một phương trình có nghiệm mà nghiệm không phải là nghiệm nguyên. Điều này gây khó khăn khá nhiều cho học sinh. Để giải phương trình này, ta sẽ đi tìm hểu một phương pháp giải phương trình bậc bốn theo phương pháp Ferrari, phương pháp này mục đích chính quy về phương trình bậc ba và đưa phương trình bậc bốn về tích hai phương trình bậc hai. Xét bài toán tổng quát: 

Ta biến đổi phương trình trở thành: .

Ta thêm ẩn m vào phương trình mới biến đổi sao cho vế trái là một bình phương như sau: 

Ta sẽ tìm m sao cho vế phải của cũng là một bình phương. Điều đó có nghĩa rằng phương trình bậc hai có nghiệm kép nên:



Giải phương trình này ta sẽ tìm được  và lúc đó phương trình  sẽ được biến đổi thành phương trình:



Áp dụng kết quả này vào phương trình (\*) ta có biến đổi sau:





Ta cần tìm m để:   

Khi đó, ta sẽ có phương trình:

 

Tới đây, ta có hướng giải cụ thể:

**- Cách 1:** Ta có:   

  

Tuy nhiên, nếu chúng ta nghĩ một cách tự nhiên theo lối khác rằng phương trình chứa duy nhất một căn thức mà khi dùng nâng lũy thừa sẽ gặp chướng ngại phương trình bậc bốn thì ta có thể thoát căn thức bằng cách sử dụng đặt ẩn phụ. Cụ thể ta đặt:  khi đó . Nhưng lúc này, trong phương trình không có chứa  nên ta cần phải thêm bớt, nếu thêm bớt như thế thì rõ ràng ẩn x ban đầu không khử triệt để được bằng ẩn phụ t nên khi đó ta sẽ có một phương trình hai ẩn.

Như thế chúng ta sẽ cảm thấy khó khăn, tuy vậy lúc này cả ẩn x và t đều có bậc cao nhất là bậc 2 nên hoàn toàn có thể tham số phương trình để đưa về tích thông qua biệt thức  là một số chính phương. Và như thế ta đẩy bài toán về phương pháp giải gọi là đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Muốn đạt được điều đó ta cần phân tích:



Khi đó phương trình đã cho được biến đổi thành:



Phương trình (\*) có biệt thức : 

Ta cần tìm a sao cho là một bình phương tức là ta cần tìm a sao cho phương trình bậc hai theo x có biệt thức bằng 0. Điều đó có nghĩa là ta có:



Giải phương trình này ta tìm được  Tới đây, ta đưa ra lời giải khác cho bài toán như sau:

**- Cách 2:** Điều kiện:   

Phương trình được biến đổi thành phương trình:





Đặt  . Khi đó  Lúc đó phương trình (1) trở thành: 

Xem phương trình (2) là phương trình bậc hai theo t thì ta có biệt thức

Suy ra phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

 

Với:   

Với :   

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm của phương trình: 

**- Bình luận.** Bài toán chúng ta đang xét về hình thức thì thực sự không cồng kềnh nhưng chất chứa bên trong là những bài hoặc tư duy đánh giá cần có là những kỉ năng hết sức chú ý. Ở cách 1 tuy chỉ áp dụng phương pháp rất đơn giản đó là nâng lũy thừa nhưng lại có sự khó khăn khi giả phương trình bậc bốn không có nghiệm nguyên và chúng ta nên nhớ rằng, đối với bài thi đại học thì thường khi gặp phương trình bậc bốn chúng ta chỉ có hai khả năng là phương trình đó vô nghiệm hoặc có nghiệm phải tường minh (nghiệm nguyên, nghiệm vô tỷ) chứ không bao giờ gặp nghiệm dưới dạng tổng quát hay lượng giác. Về cách khắc phục thì bài toán tổng quát ở cách 1 là chìa khóa vô cũng quan trọng để đạt được hiệu quả. Ở cách 2, tuy cũng sử dụng phương pháp ẩn phụ đơn giản nhưng lại khó khăn trong việc không khai thác hết được ẩn ban đầu theo ẩn phụ thì lúc đó ta sẽ nghĩ ngay đến sự đồng bậc giữa hai biến hoặc xem chừng như đó là một phương tình thường gặp (bậc 2, bậc 3, bậc 4) ở định dạng có thể phân tích nhân tử. nếu bậc hai ta dùng biệt thức có số chính phương, bậc 3 (bậc 4) ta tách nhân tử dựa trên đoán nghiệm đặc biệt. Cái khó ở cách hai là việc chọn hệ số để tách cho được đại lượng đặt ẩn phụ và kéo theo là một phương trình bậc hai có biệt thức là số chính phương một cách logic không sử dụng mò mẫm, cụ thể như trong bài toán chúng tôi đã nêu ra hướng phân tích và việc vì sao chúng tôi chọn được hệ số  Trên thực tế ở cách 2 chúng ta có tìm được 4 giá trị a trong đó có  (chính là trường hợp giải theo cách 1) và còn hai giá trị a không đẹp nên không được ưu tiên sử dụng. Vậy qua bài toán này, một lần nữa giúp các độc giả khắc sâu thêm đường lối các phương pháp trong chương I và hình thức áp dụng nó được thì ta cần tư duy và sắp xếp thế nào cho chính xác.

**Ví dụ 11.** Giải phương trình  

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán đưa ra có hình thức khá lạ và đặc biệt, để giải quyết với phương trình này ta sẽ đặt ra một chiều hướng điều kiện không đơn thuần có nghĩa nữa mà sẽ là một điều kiện mạnh hơn đó chính là điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm luôn. Với hình thức đặc biệt của phương trình này, trước khi giải quyết ta sẽ cố gắng đi tìm nghiệm của phương trình trước để từ đó có thể tư duy xem liệu hướng giải quyết nào là thuận lợi. Không quá khó, bằng máy tính hoặc trực giác cho ta có nghiệm  là nghiệm duy nhất của phương trình. Từ đó ta có thể đưa ra hai hướng tư duy là dùng phương pháp liên hợp để tách nhân tử  hoặc dùng hàm số chỉ rõ sự đơn điệu để kết luận nghiệm của phương trình. Với hướng tách nhân tử  ta dùng phương pháp liên hợp ta đưa ra các đánh giá sau:

- Với đại lượng  để có nhân tử  ta cần thêm đại lượng như sau:

 cho  

- Với đại lượng  để có nhân tử  ta cần thêm đại lượng như sau:

 cho  

- Tuy nhiên do ta có: nên khi thêm bớt hai đại lượng ;  ta cần phải biến đổi như sau: 

- Khi đó, phương trình đã cho được biến đổi thành:



Từ đó, ta có hướng giải như sau:

**- Cách 1:** Điều kiện để phương trình có nghiệm là:  

Với điều kiện đó ta luôn có:  

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:









Với phương trình (\*) ta chú ý rằng với  ta luôn có:



 



Từ đó ta có:  Do đó (\*) vô nghiệm. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

Tuy nhiên, nếu ta tinh tế hơn một chút trong phép biến đổi về đại lượng cần liên hợp ta có thể đưa bài toán về đánh giá đơn giản hơn như phép biến đổi sau:

**- Cách 2:** Điều kiện để phương trình có nghiệm là:  

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:



Với điều kiện  ta luôn có:  

Do đó 

Ta có:  

Nên:  là nghiệm duy nhất thỏa phương trình.

Từ hai cách biến đổi trên cộng với việc phương trình đã cho có nghiệm duy nhất nên ta có thể dùng hàm số để giải quyết bài toán này. Từ đó ta có cách giải sau:

**- Cách 3:** Điều kiện để phương trình có nghiệm là : 

Xét hàm số  

Ta có: 

Lại có:  

Suy ra: . Vậy hàm số  liên tục và luôn nghịch biến với 

Do đó phương trình  có tối đa một nghiệm.

Mà:  nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Bài toán trên là một bài toán khá hay, về đường lối đi thì chúng ta đã thấy như phân tích. Tuy nhiên, qua bài toán này, chúng ta thấy được tính chất quan trọng của bài toán dùng phương pháp liên hợp nó cũng có cái hay riêng, nếu biến đổi khéo ta sẽ được một lời giải gọn nhẹ hơn nếu ta biến đổi không khéo lắm thì chúng ta có chút vấn đề ở phần đánh giá. Ngoài ra khi gặp phương trình có nghiệm duy nhất và hình thức phương trình có thể gợi tả một hàm số mà khi xét tính đơn điệu của nó có sự khả thi thì việc ứng dụng nó vào đường lối giải cũng là một lối đi đẹp. Tuy vậy, nếu chúng ta dùng hàm số để giải quyết một bài toán ta cần để ý tính liên tục của hàm số nếu không chúng ta sẽ phạm sai lầm. Cụ thể ta có thể xét ví dụ sau để hiểu rõ hơn.

**Ví dụ 12.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này, về hình thức có thể nghĩ ngay đến việc đặt ẩn phụ để giải quyết hoặc hàm số để giải quyết. Thật vậy, ta có thể biến đổi phương trình về phương trình sau với điều kiện của bài toán là  

Tới đây, rất nhiều học sinh sẽ kết luận một số điều tưởng chừng như có lý sau:

Ta có vế trái phương trình là một hàm số đồng biến, vế phải của phương trình là một hàm số nghịch biến.

Do đó phương trình đã cho nếu có một nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. Nhẩm thấy  thỏa phương trình.

Vậy  là nghiệm duy nhất của phương trình.

Lời giải trên đã có một sai lầm nghiêm trọng vì ta không thể kết luận được vế phải của phương trình là một hàm số nghịch biến với  vì hàm số bị gián đoạn tại  vẫn nằm trong điều kiện cho phép của bài toán.

Điều đó dẫn đến lời giải trên sai hoàn toàn.

Để giải tốt bài toán này, ta cần phân định rõ giới hạn cho phép để khi xét hàm số phải bảo đảm tính liên tục thì khi đó ta mới có thể kết luận được nghiệm của phương trình đã cho. Cụ thể ta đi vào lời giải bằng hàm số cho phương trình trên như sau:

Điều kiện: 

Do  không thỏa phương trình đã cho nên với  ta biến đổi phương trình về phương trình: 

Đặt:  

Ta có:  

Mặt khác  không thỏa phương trình nên ta xét hai trường hợp:

- Với  thì ta có:    

Do đó trên khoảng  ta có  là hàm số liên tục và đồng biến,  là hàm số liên tục và nghịch biến.

Từ đó ta có:  nếu có nghiệm thì có tối đa một nghiệm.

Nhận thấy:  nên từ (1) ta có  là nghiệm của phương trình.

- Với  thì ta có:    

Do đó trên khoảng  ta có  là hàm số liên tục và đồng biến,  là hàm số liên tục và nghịch biến.

Từ đó ta có:  nếu có nghiệm thì có tối đa một nghiệm.

Nhận thấy:  nên từ (1) ta có  là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  