

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HOÀN

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH PHI
TUYẾN
VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HOÀN

**GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN
VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ**

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS Tạ Duy Phụng

THÁI NGUYÊN - 2007

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu.....	2-3
 Chương 1. Giải gần đúng phương trình phi tuyến trên máy tính điện tử.....	4
Đ1. Giải gần đúng phương trình $f(x) = 0$	4
Đ2. Các phương pháp tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 0$	10
Đ3. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 0$ trên máy tính điện tử.....	24
 Chương 2. Giải gần đúng nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường trên máy tính điện tử	48
Đ1. Phương pháp giải gần đúng bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường.....	48
Đ2. Phương pháp Euler	52
Đ3. Phương pháp Runge-Kutta	57
Đ4. Giải bài toán Cauchy cho phương trình vi phân trên máy tính điện tử	64
 Kết luận.....	82
 Tài liệu tham khảo.....	83

LỜI NÓI ĐẦU

Các bài toán thực tế (trong thiên văn, đo đạc ruộng đất,...) dẫn đến việc cần phải giải các phương trình phi tuyến (phương trình đại số hoặc phương trình vi phân), tuy nhiên, các phương trình này thường phức tạp, do đó nói chung khó có thể giải được (đưa được về các phương trình cơ bản) bằng các biến đổi đại số. Hơn nữa, vì các công thức nghiệm (của phương trình phi tuyến hoặc phương trình vi phân) thường phức tạp, cồng kềnh, nên cho dù có công thức nghiệm, việc khảo sát các tính chất nghiệm qua công thức cũng vẫn gặp phải rất nhiều khó khăn. Vì vậy, ngay từ thời Archimedes, các phương pháp giải gần đúng đã được xây dựng. Nhiều phương pháp (phương pháp Newton-Raphson giải gần đúng phương trình phi tuyến, phương pháp Euler và phương pháp Runge-Kutta giải phương trình vi phân) đã trở thành kinh điển và được sử dụng rộng rãi trong thực tế.

Với sự phát triển của công cụ tin học, các phương pháp giải gần đúng lại càng có ý nghĩa thực tế lớn. Để giải một phương trình bằng tay trên giấy, có khi phải mất hàng ngày với những sai sót dễ xảy ra, thì với máy tính điện tử, thậm chí với máy tính điện tử bỏ túi, chỉ cần vài phút. Tuy nhiên, việc thực hiện các tính toán toán học trên máy một cách dễ dàng càng đòi hỏi người sử dụng có hiểu biết sâu sắc hơn về lý thuyết toán học. Mặt khác, nhiều vấn đề lý thuyết (sự hội tụ, tốc độ hội tụ, độ chính xác, độ phức tạp tính toán,...) sẽ được soi sáng hơn trong thực hành tính toán cụ thể. Vì vậy, việc sử dụng thành thạo công cụ tính toán là cần thiết cho mọi học sinh, sinh viên. Công cụ tính toán sẽ hỗ trợ đắc lực cho việc tiếp thu các kiến thức lý thuyết, giảng dạy lý thuyết gắn với thực hành tính toán, sẽ giúp học sinh, sinh viên không chỉ tiếp thu tốt hơn các kiến thức khoa học, mà còn tiếp cận tốt hơn với các phương pháp và công cụ tính toán hiện đại.

Nói chung, trong các trường phổ thông và đại học hiện nay, việc gắn giảng dạy lý thuyết với tính toán thực hành còn chưa được đẩy mạnh. Điều này hoàn toàn không phải vì thiếu công cụ tính toán, mà có lẽ là vì việc phổ biến cách sử dụng các công cụ tính toán còn ít được quan tâm.

Với mục đích minh họa khả năng sử dụng máy tính điện tử trong dạy và học môn Giải tích số, chúng tôi chọn đề tài luận văn *Giải gần đúng phương trình phi*

tuyến và phương trình vi phân trên máy tính điện tử. Luận văn gồm hai chương: Chương 1 trình bày ngắn gọn các phương pháp giải gần đúng phương trình phi tuyến và đặc biệt, minh họa và so sánh các phương pháp giải gần đúng phương trình thông qua các thao tác thực hành cụ thể trên máy tính điện tử khoa học *Casio fx-570 ES*. Chương 2 trình bày phương pháp Euler, phương pháp Euler cải tiến và phương pháp Runge-Kutta giải phương trình vi phân thường. Các phương pháp này được so sánh và minh họa qua thực hành tính toán trên máy tính *Casio fx-570 ES* và trên chương trình *Maple*.

Có thể coi các qui trình và chương trình trong luận văn là các chương trình mẫu để giải bất kì phương trình phi tuyến hoặc phương trình vi phân nào (chỉ cần khai báo lại phương trình cần giải). Điều này đã được chúng tôi thực hiện trên rất nhiều phương trình cụ thể.

Tác giả xin chân thành cảm ơn TS. Tạ Duy Phương (Viện Toán học), người Thầy đã hướng dẫn tác giả hoàn thành luận văn này. Xin được cảm ơn Trường Đại học Sư phạm (Đại học Thái Nguyên), nơi tác giả đã hoàn thành chương trình cao học dưới sự giảng dạy nhiệt tình của các Thầy. Xin được cảm ơn Phòng Giáo dục Phổ Yên (Thái Nguyên), nơi tác giả công tác, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành khóa học và luận văn. Cuối cùng, xin được cảm ơn Gia đình đã động viên, giúp đỡ và chia sẻ những khó khăn với tác giả trong thời gian học tập.

Thái Nguyên, 20.9.2007

Trần Thị Hoàn

CHƯƠNG I

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ

Đ1. GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$

Phương trình $f(x) = 0$ thường gặp nhiều trong thực tế. Tuy nhiên, ngoài một số lớp phương trình đơn giản như phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai, phương trình bậc ba và bậc bốn là các phương trình có công thức nghiệm biểu diễn qua các hệ số, và một vài lớp phương trình được giải nhờ các kỹ thuật của đại số (phân tích ra thừa số, đặt ẩn phụ,...) để đưa về các phương trình bậc nhất hoặc bậc hai, hầu hết các phương trình phi tuyến là không giải được chính xác (không có công thức biểu diễn nghiệm qua các hệ số của phương trình), vì vậy người ta thường tìm cách tìm nghiệm gần đúng của phương trình. Và ngay cả khi biết công thức nghiệm, do tính phức tạp của công thức, giá trị sử dụng của công thức nhiều khi cũng không cao. Thí dụ, ngay cả với lớp phương trình đơn giản là phương trình đa thức bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, mặc dù có công thức Cardano để giải, nhưng vì công thức này chứa nhiều căn thức khá cồng kềnh (xem, thí dụ:

Eric W. Weisstein: *CRS Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRS Press, New York, 1999, mục *Cubic Equation*, trang 362-365),

nên thực chất chúng ta cũng chỉ có thể tìm được nghiệm gần đúng. Hơn nữa, đa số các phương trình, thậm chí những phương trình rất đơn giản về mặt hình thức nhưng lại xuất phát từ các bài toán thực tế, thí dụ, phương trình $x = \cos x$ không có công thức biểu diễn nghiệm thông qua các phép toán cơ bản (cộng, trừ, nhân, chia, khai căn, lũy thừa), nói cách khác, không giải được hoặc rất khó giải bằng các phép biến đổi đại số, nhưng có thể giải gần đúng đến độ chính xác bất kỳ rất dễ dàng nhờ phép lặp $x_{n+1} = \cos x_n$, nhất là trên máy tính điện tử bỏ túi (chỉ cần bấm liên tiếp một phím $\boxed{=}$).

Những phương trình xuất hiện trong các bài toán thực tế (thí dụ, khi đo đạc,...) nói chung có thông tin đầu vào (thể hiện trên các hệ số, trong công thức) chỉ

là gần đúng (sai số trong đo đạc, đánh giá, tính toán sơ bộ,...). Vì vậy việc tìm nghiệm chính xác cũng không có ý nghĩa thực tế lớn, trong khi đó với các phương pháp giải gần đúng phương trình, ta thường có công thức đánh giá độ chính xác của nghiệm gần đúng và có thể tìm nghiệm đến độ chính xác bất kì cho trước, nên phương pháp giải gần đúng phương trình có ý nghĩa rất quan trọng trong giải quyết các bài toán thực tế.

Các phương pháp giải chính xác phương trình chỉ mang tính đơn lẻ (cho từng lớp phương trình), còn các phương pháp giải gần đúng phương trình mang tính phổ dụng: một phương pháp có thể dùng để giải cho những lớp phương trình rất rộng, thí dụ, chỉ đòi hỏi hàm số là liên tục chẳng hạn, vì vậy khả năng ứng dụng của giải gần đúng là rất cao.

Giải gần đúng phương trình liên quan đến nhiều vấn đề quan trọng khác của toán học. Thí dụ, theo điều kiện cần cực trị (Định lí Fermat), điểm x_0 là điểm cực trị (địa phương) của hàm số $y = F(x)$ thì nó phải là điểm dừng, tức là $y'(x_0) = F'(x_0) = 0$. Như vậy, để tìm điểm cực trị, trước tiên ta phải giải phương trình $y' = F'(x) := f(x) = 0$ để tìm điểm dừng (điểm được nghi ngờ là điểm cực trị). Trong thực tế để tìm nghiệm tối ưu, ta thường đi tìm các điểm dừng (nghi ngờ là cực trị) nhờ giải gần đúng phương trình $y' = F'(x) := f(x) = 0$.

Bởi vì một trong những thế mạnh của máy tính điện tử là khả năng lặp lại một công việc với tốc độ cao, mà giải gần đúng phương trình thực chất là việc thực hiện một dãy các bước lặp, nên nhờ máy tính mà việc giải gần đúng phương trình trở nên đơn giản, nhanh chóng và thuận tiện. Không những thế, máy tính còn cho phép, thông qua lập trình, mô phỏng quá trình thực hiện bước lặp giải phương trình, bởi vậy nó là công cụ tốt trợ giúp học sinh và sinh viên tiếp thu các kiến thức toán học nói chung, các phương pháp giải gần đúng phương trình nói riêng. Do đó thực hành giải gần đúng trên máy tính điện tử có một ý nghĩa nhất định trong giảng dạy và học tập bộ môn toán trong các trường phổ thông và đại học.

Trong chương này, để giải gần đúng phương trình, chúng ta luôn giả thiết rằng, $f(x)$ là một hàm xác định và liên tục trên một đoạn nào đó của đường thẳng

thực. Nhiều khi điều kiện này đã là đủ để xây dựng phương pháp giải gần đúng. Trong một số phương pháp, ta sẽ giả thiết rằng $f(x)$ khả vi đến cấp cần thiết (có đạo hàm cấp một hoặc có đạo hàm cấp hai).

Nếu $f(\bar{x}) = 0$ thì điểm $\bar{x}$ được gọi là *ng nghiệm* hoặc *không điểm* của phương trình $f(x) = 0$. Ta cũng giả thiết rằng các nghiệm là cô lập, tức là tồn tại một lân cận của điểm $\bar{x}$ không chứa các nghiệm khác của phương trình. Khoảng lân cận (chứa $\bar{x}$) này được gọi là *khoảng cách li* của nghiệm $\bar{x}$.

Các bước giải gần đúng phương trình

Giải gần đúng phương trình $f(x) = 0$ được tiến hành theo hai bước:

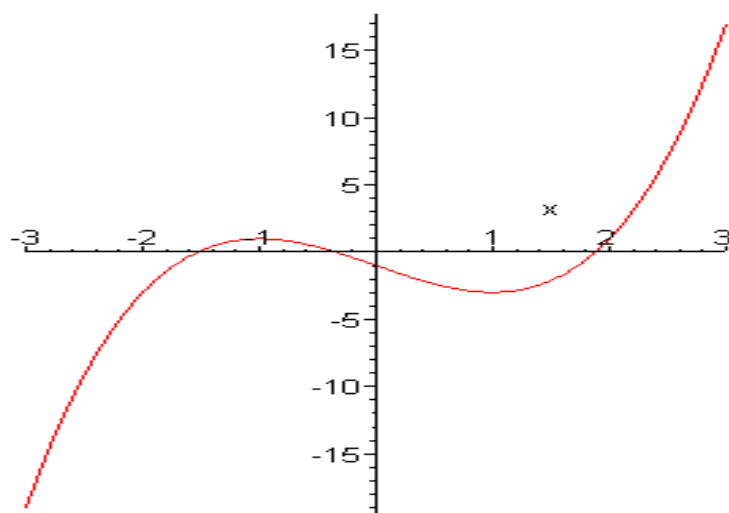
Bước 1. Tìm khoảng chứa nghiệm

Một phương trình nói chung có nhiều nghiệm. Ta cần tìm khoảng chứa nghiệm, tức là khoảng (a, b) trong đó phương trình có nghiệm (có duy nhất nghiệm), bằng một trong các tiêu chuẩn sau.

Định lí 1 (Bolzano-Cauchy) *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng (a, b) .*

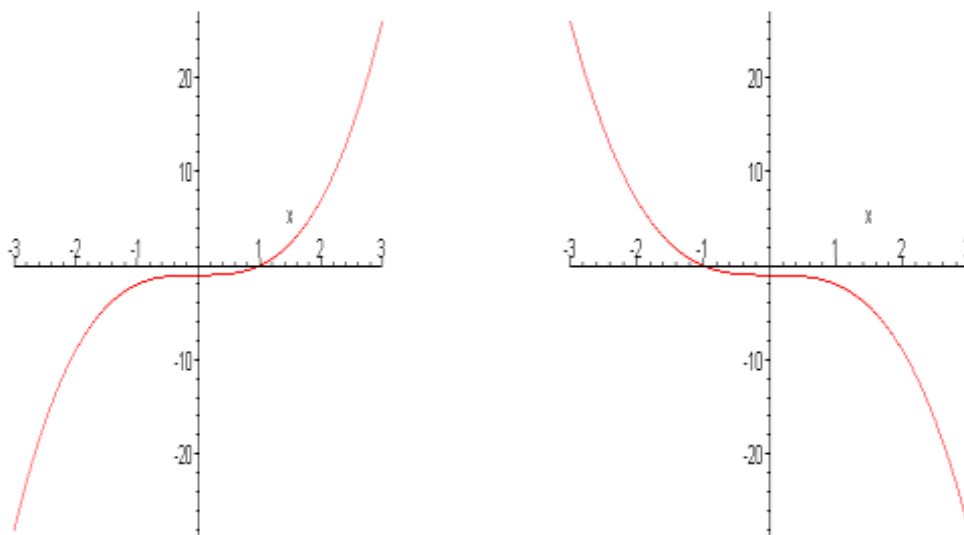
Ý nghĩa hình học của Định lí này khá rõ ràng: Đồ thị của một hàm số liên tục là một đường cong liên tục (liền nét), khi chuyển từ điểm $A(a, f(a))$ sang điểm $B(b, f(b))$ nằm ở hai phía khác nhau của trục hoành, đường cong này phải cắt trục hoành tại *ít nhất* một điểm (có thể tại nhiều điểm).

Thí dụ, hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x - 1$ có $f(-2) = -3$; $f(-1) = 1$; $f(0) = -1$ và $f(2) = 1$ nên phương trình $x^3 - 3x - 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt trong các khoảng $(-3, -1)$; $(-1, 0)$ và $(0, 2)$.



Định lí 2 (Hệ quả của Định lí 1) *Giả sử $f(x)$ là một hàm liên tục và đơn điệu chặt trên đoạn $[a, b]$. Khi ấy nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm trong khoảng (a, b) .*

Ý nghĩa hình học của Định lí này là: Đồ thị của một hàm số liên tục tăng chặt (giảm chặt) là một đường cong liên tục (liền nét) luôn đi lên (đi xuống). Khi di chuyển từ điểm $A(a, f(a))$ sang điểm $B(b, f(b))$ nằm ở hai phía khác nhau của trục hoành thì đồ thị phải cắt và chỉ cắt trục hoành một lần (Hình vẽ).



Hai định lí trên chỉ đòi hỏi tính liên tục mà không đòi hỏi tính khả vi (tồn tại đạo hàm) của $f(x)$. Nếu $f(x)$ có đạo hàm thì có thể dùng tiêu chuẩn dưới đây.

Định lí 3 (Hệ quả của Định lí 2) *Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và đạo hàm $f'(x)$ của nó không đổi dấu (luôn dương hoặc luôn âm) trên đoạn $[a, b]$. Khi ấy nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm trong khoảng (a, b) .*

Từ ba định lí trên, ta đi đến hai phương pháp tìm khoảng cách li nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ (khoảng chứa duy nhất một nghiệm): phương pháp hình học và phương pháp giải tích.

Phương pháp giải tích

Giả sử ta phải tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong khoảng (a, b) . Ta đi tính giá trị $f(a)$, $f(b)$ và các giá trị $f(x_i)$ của hàm số tại một số điểm $x_i \in (a, b)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Nếu hàm $f(x)$ đơn điệu chặt trên khoảng (x_i, x_{i+1}) và điều kiện $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$ được thỏa mãn thì (x_i, x_{i+1}) là một khoảng cách li nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nếu thông tin về hàm $f(x)$ quá ít thì ta thường dùng quy trình chia đoạn thẳng (chia khoảng (a, b) thành 2, 4, 8, ... phần) và thử điều kiện $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$ để tìm khoảng cách li nghiệm.

Một đa thức bậc n có không quá n nghiệm. Vì vậy phương trình đa thức có không quá n khoảng cách li nghiệm.

Khi hàm $f(x)$ đủ tốt (có đạo hàm, có dạng cụ thể, ...), ta có thể khảo sát đồ thị để chia trục số thành các khoảng đổi dấu của đạo hàm (khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số) và xác định khoảng cách li nghiệm.

Phương pháp hình học

Trong trường hợp đồ thị hàm số tương đối dễ vẽ, ta có thể vẽ phác đồ thị để tìm khoảng cách li nghiệm hoặc giá trị thô của nghiệm như là giao điểm (gần đúng) của đồ thị với trục hoành. Cũng có thể dùng các máy tính đồ họa (máy tính có khả năng vẽ hình như *Casio Algebra fx-2.0 Plus* hoặc *Sharp EL-9650*) hoặc các phần

mềm tính toán (*Maple, Matlab,...*) để vẽ đồ thị. Sau đó, nhờ tính toán, ta “tinh chỉnh” để đi đến khoảng cách li nghiệm chính xác hơn.

Bước 2. Giải gần đúng phương trình

Có bốn phương pháp cơ bản giải gần đúng phương trình: phương pháp chia đôi, phương pháp lặp, phương pháp dây cung và phương pháp tiếp tuyến (phương pháp Newton-Raphson). Nhằm làm cơ sở lí thuyết cho các tính toán trong Đ3, trong Đ2 chúng tôi sẽ vắn tắt trình bày nội dung của các phương pháp này, chủ yếu là dựa vào các giáo trình *Giải tích số* [1] - [6].

Đ2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM GẦN ĐÚNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$

1. Phương pháp chia đôi

Nội dung của phương pháp chia đôi rất đơn giản: Giả sử $f(x)$ là một hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi ấy theo Định lí Bolzano-Cauchy, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng (a, b) .

Chia đôi đoạn $[a, b]$ và tính $f(\frac{a+b}{2})$.

Nếu $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ thì $x = \frac{a+b}{2}$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Nếu $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$ thì $f(a)f(\frac{a+b}{2}) < 0$ hoặc $f(\frac{a+b}{2})f(b) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a, \frac{a+b}{2})$ hoặc $(\frac{a+b}{2}, b)$.

Gọi khoảng mới (khoảng nhỏ) chứa nghiệm là (a_1, b_1) .

Lại chia đôi khoảng (a_1, b_1) và tính giá trị tại điểm giữa $x = \frac{a_1 + b_1}{2}$.

Tiếp tục mãi quá trình này ta đi đến:

Hoặc tại bước thứ n nào đó ta có $f(\frac{a_n + b_n}{2}) = 0$, tức là $\bar{x} = \frac{a_n + b_n}{2}$ là nghiệm, hoặc ta được một dãy các đoạn thẳng lồng nhau $[a_n, b_n]$ có các tính chất:

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq \dots < b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b,$$

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \text{ và } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Sự hội tụ của phương pháp chia đôi

Dãy $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu tăng, bị chặn trên bởi b , dãy $\{b_n\}$ là đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi a nên cả hai dãy đều có giới hạn.

Do $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ hay $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \bar{x}$.

Do tính liên tục của hàm số $y = f(x)$, lấy giới hạn trong biểu thức

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \text{ ta được } f^2(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0.$$

Suy ra $f(\bar{x}) = 0$ hay $\bar{x}$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong khoảng (a, b) .

Đánh giá sai số

Tại bước thứ n ta có $a_n < \bar{x} < b_n$ và $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Nếu chọn nghiệm gần đúng là $\tilde{x} = a_n$ thì $|\bar{x} - \tilde{x}| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$;

Nếu chọn nghiệm gần đúng là $\tilde{x} = b_n$ thì $|\tilde{x} - \bar{x}| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$;

Nếu chọn nghiệm gần đúng là $\tilde{x} = \frac{a_n + b_n}{2}$ thì ta có đánh giá:

$$|\tilde{x} - \bar{x}| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Như vậy, sau bước thứ n , nên chọn nghiệm gần đúng là $\tilde{x} = c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, ta sẽ được nghiệm chính xác hơn.

Nếu chọn $\tilde{x}_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ thì $|\bar{x} - \tilde{x}_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$. Do đó với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước (độ chính xác $\varepsilon > 0$ cho trước) ta có $|\bar{x} - \tilde{x}_n| < \varepsilon$ với mọi $n > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$.

Nếu tại mỗi bước n ta đều chọn $\tilde{x}_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ thì ta cũng có

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |(x_{n+1} - \bar{x}) + (\bar{x} - x_n)| \leq \frac{b-a}{2^{n+2}} + \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Do đó khi tính toán (trên máy tính bỏ túi với màn hình hiển thị được 10 chữ số chẳng hạn), ta có thể dừng tính toán khi $x_{n-1} = x_n = x_{n+1} = \dots$ đúng đến số thập phân cần thiết (thí dụ, ta có thể dừng tính toán khi được nghiệm chính xác đến 10 chữ số, tức là $\varepsilon = 10^{-10}$).

2. Phương pháp lặp

Giả sử (a, b) là khoảng cách li nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Giải phương trình $f(x) = 0$ bằng phương pháp lặp gồm các bước sau:

Bước 1. Đưa phương trình $f(x) = 0$ về phương trình tương đương $x = g(x)$.

Bước 2. Chọn $x_0 \in (a, b)$ làm nghiệm gần đúng đầu tiên.

Bước 3. Thay $x = x_0$ vào vế phải của phương trình $x = g(x)$ ta được nghiệm gần đúng thứ nhất $x_1 = g(x_0)$. Lại thay $x_1 = g(x_0)$ vào vế phải của phương trình $x = g(x)$ ta được nghiệm gần đúng thứ hai $x_2 = g(x_1)$. Lặp lại quá trình trên, ta nhận được dãy các nghiệm gần đúng

$$x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), x_4 = g(x_3), \dots, x_n = g(x_{n-1}), \dots$$

Nếu dãy các nghiệm gần đúng $\{x_n\}$, $n=1,2,\dots$ hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ thì (với giả thiết hàm $g(x)$ là liên tục trên đoạn $[a,b]$) ta có:

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n-1}) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = g(\bar{x}).$$

Chúng ta thấy $\bar{x}$ là nghiệm đúng của phương trình $x = g(x)$ (điểm bất động của ánh xạ g) hay $\bar{x}$ là nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$.

Tính hội tụ

Có nhiều phương trình dạng $x = g(x)$ tương đương với phương trình $f(x) = 0$. Phải chọn hàm số $g(x)$ sao cho dãy $\{x_n\}$ xây dựng theo phương pháp lặp là dãy hội tụ và hội tụ nhanh tới nghiệm. Ta có tiêu chuẩn sau.

Định lý 4. Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ và phương trình $x = g(x)$ tương đương với phương trình $f(x) = 0$ trên đoạn $[a,b]$. Nếu $g(x)$ và $g'(x)$ là những hàm số liên tục trên $[a,b]$ sao cho $|g'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in [a,b]$ thì từ mọi vị trí ban đầu $x_0 \in (a,b)$ dãy $\{x_n\}$ xây dựng theo phương pháp lặp $x_n = g(x_{n-1})$ sẽ hội tụ tới nghiệm duy nhất $\bar{x}$ trong khoảng (a,b) của phương trình $f(x) = 0$.

Chứng minh.

Giả sử $x_0 \in (a,b)$ bất kỳ. Vì $\bar{x}$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong khoảng (a,b) nên ta có $\bar{x} = g(\bar{x})$. Mặt khác vì $x_1 = g(x_0)$ nên $x_1 - \bar{x} = g(x_0) - g(\bar{x})$.

Theo định lý Lagrange tồn tại một điểm $c \in (x_0, \bar{x})$ sao cho

$$x_1 - \bar{x} = g(x_0) - g(\bar{x}) = g'(c)(x_0 - \bar{x}).$$

Suy ra

$$|x_1 - \bar{x}| = |g'(c)(x_0 - \bar{x})| \leq q|x_0 - \bar{x}| < |x_0 - \bar{x}|.$$

Chúng ta thấy $x_1 \in (a,b)$.

Tương tự ta có:

$$|x_2 - \bar{x}| \leq q|x_1 - \bar{x}|; |x_3 - \bar{x}| \leq q|x_2 - \bar{x}|; \dots; |x_n - \bar{x}| \leq q|x_{n-1} - \bar{x}|; \dots$$

Từ các bất đẳng thức trên ta suy ra nếu $x_0 \in (a, b)$ thì $x_n \in (a, b)$ với mọi n và

$$|x_n - \bar{x}| \leq q|x_{n-1} - \bar{x}| \leq q^2|x_{n-2} - \bar{x}| \leq \dots \leq q^n|x_0 - \bar{x}|.$$

Do $q < 1$ nên khi $n \rightarrow \infty$ về phải tiến tới 0. Chứng tỏ dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới $\bar{x}$.

Đánh giá sai số

Để đánh giá sai số của nghiệm gần đúng x_n (nhận được bằng phương pháp lặp) và nghiệm chính xác $\bar{x}$ của phương trình $f(x) = 0$ tại bước thứ n ta xét hiệu $|x_n - \bar{x}|$.

Từ chứng minh trên ta có:

$$|x_n - \bar{x}| \leq q|x_{n-1} - \bar{x}| = q|x_{n-1} - x_n + x_n - \bar{x}| \leq q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - \bar{x}|$$

Vậy

$$(1 - q)|x_n - \bar{x}| \leq q|x_{n-1} - x_n|$$

hay

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q}{1 - q}|x_{n-1} - x_n|$$

Mặt khác, áp dụng công thức số gia hữu hạn (công thức Lagrange) ta có:

$$x_n - x_{n-1} = g(x_{n-1}) - g(x_{n-2}) = g'(c_n)(x_{n-1} - x_{n-2})$$

trong đó

$$c_n \in (x_{n-1}, x_{n-2})$$

Suy ra

$$|x_n - x_{n-1}| = |g'(c_n)||x_{n-1} - x_{n-2}| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

Từ bất đẳng thức trên, cho $n=2,3,4,\dots$ ta được:

$$|x_2 - x_1| \leq q|x_1 - x_0|$$

$$|x_3 - x_2| \leq q|x_2 - x_1| \leq q^2|x_1 - x_0|$$

...

$$|x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|.$$

Thay vào bất đẳng thức

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q}{1-q}|x_{n-1} - x_n|$$

ta được:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q}{1-q}|x_{n-1} - x_n| \leq \frac{q}{1-q}q^{n-1}|x_1 - x_0| = \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Công thức trên cho thấy phương pháp lặp hội tụ càng nhanh nếu q càng bé.

Từ công thức trên ta cũng suy ra rằng, để đạt được độ xấp xỉ ε (nghiệm gần đúng sai khác nghiệm đúng không quá ε , $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$), ta phải làm $N(\varepsilon)$ bước, trong đó

$$N(\varepsilon) \geq \left\lceil \frac{\lg \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\lg q} \right\rceil.$$

Từ công thức $|x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|$ ta có kết luận: nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì khi n đủ lớn hai nghiệm gần đúng x_n và x_{n-1} xấp xỉ bằng nhau. Vì vậy khi sử dụng máy tính ta thường dừng quá trình lặp khi các kết quả liên tiếp x_{n-1} , x_n , x_{n+1} , ... đạt độ xấp xỉ yêu cầu (trùng nhau tới số chữ số thập phân sau dấu phẩy cần thiết).

Nhận xét. Vì ta đã coi (a, b) là khoảng cách li nghiệm (chứa nghiệm $\bar{x}$) của phương trình $f(x) = 0$ nên trong Định lý 4 ta đã giả thiết sự tồn tại nghiệm $\bar{x}$. Hơn nữa, ta đã đòi hỏi $g(x)$ phải là một hàm khả vi. Dưới đây là một phiên bản của

Định lý 4 (không đòi hỏi trước tồn tại nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ và chỉ đòi hỏi $g(x)$ là một hàm liên tục Lipschitz).

Định lý 5. Giả sử $g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $[a; b]$ sao cho:

i) $|g(x) - g(y)| \leq q|x - y| \quad \forall x, y \in [a; b]$ ($g(x)$ là Lipschitz trên $[a; b]$).

ii) Tồn tại một số $\alpha \in [a; b]$ sao cho $|g(\alpha) - \alpha| \leq (1 - q)(b - a)$.

Khi ấy với mỗi $x_0 \in [a; b]$, dãy $\{x_n\}$ xây dựng theo phương pháp lặp $x_n = g(x_{n-1})$ sẽ hội tụ tới điểm bất động (tức là $\bar{x} = g(\bar{x})$) duy nhất $\bar{x}$ trong khoảng (a, b) của ánh xạ g .

3. Phương pháp dây cung

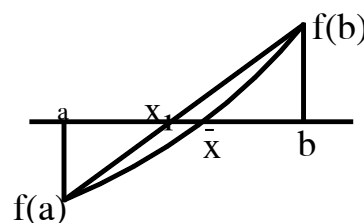
Giả sử (a, b) là khoảng cách li nghiệm. Ta thay cung của đường cong $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ bằng dây trương cung ấy và coi giao điểm của dây cung (đường thẳng) với trục hoành là nghiệm xấp xỉ của phương trình $f(x) = 0$.

Để xây dựng dãy xấp xỉ x_n , ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. $f'(x).f''(x) > 0$.

Để xác định, ta coi $f(a) < 0, f(b) > 0$, và

$f'(x) > 0, f''(x) > 0$ (Hình 1).



Dây cung AB là đường thẳng nối hai điểm

Hình 1

$A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$ có phương trình $\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$.

Hoành độ giao điểm x_1 của đường thẳng AB với trục hoành chính là nghiệm của phương trình trên khi cho $y = 0$.

Suy ra $\frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$ hay $x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$.

Nghiệm $\bar{x}$ bây giờ nằm trong khoảng (x_1, b) (xem Hình 1).

Thay khoảng (a, b) bằng khoảng (x_1, b) , ta đi đến nghiệm $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}$.

Tiếp tục quá trình trên, ta đi đến dãy nghiệm xấp xỉ:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}.$$

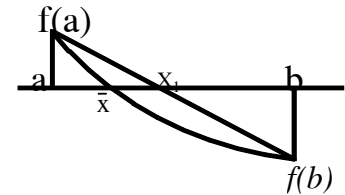
Công thức trên vẫn đúng trong trường hợp

$$f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0.$$

Trường hợp 2. $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

Để xác định, coi

$$f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0 \text{ (Hình 2).}$$



Hình 2

Dây cung AB là đường thẳng nối hai điểm

$A(a, f(a))$ và

$$B(b, f(b)) \text{ có phương trình } \frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a}.$$

Hoành độ giao điểm x_1 của đường thẳng AB với trục hoành chính là nghiệm của phương trình trên khi cho $y = 0$.

$$\text{Suy ra } \frac{-f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - b}{b - a} \text{ hay } x_1 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

Nghiệm $\bar{x}$ bây giờ nằm trong khoảng (a, x_1) .

Thay (a, b) bằng khoảng (a, x_1) , ta đi đến nghiệm xấp xỉ

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)}.$$

Tiếp tục quá trình trên, ta đi đến dãy nghiệm xấp xỉ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}.$$

Công thức trên vẫn đúng trong trường hợp

$$f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0.$$

Ta có thể tổng kết thành một công thức như sau:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)},$$

trong đó $d = b$ nếu $f(b).f''(x) > 0, x_0 = a$;

$d = a$ nếu $f(a).f''(x) > 0, x_0 = b$.

Tính hội tụ

Dãy xấp xỉ liên tiếp là một dãy tăng, bị chặn trên (trường hợp 1):

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \bar{x} < b$$

hoặc là dãy giảm, bị chặn dưới (trường hợp 2):

$$b = x_0 > x_1 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots > \bar{x} > a$$

nên hội tụ. Hơn nữa, chuyển qua giới hạn trong công thức

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)} \text{ ta được } \bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})(\bar{x} - d)}{f(\bar{x}) - f(d)}.$$

Suy ra $f(\bar{x}) = 0$ hay $\bar{x}$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong khoảng (a, b) .

Đánh giá sai số

Giả sử $f'(x)$ không đổi dấu trên (a, b) và $0 < m \leq |f'(x)| \leq M < +\infty$ với mọi $x \in (a, b)$.

Ta có các công thức đánh giá sai số sau đây:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}; \quad |x_n - \bar{x}| \leq \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}|.$$

Chứng minh.

Áp dụng Định lý giá trị trung bình Lagrange (công thức số gia hữu hạn), ta có

$$f(x_n) - f(\bar{x}) = f'(c)(x_n - \bar{x})$$

với $c \in (x_n, \bar{x}) \subset (a, b)$.

Vì $f(\bar{x}) = 0$ và $0 < m \leq |f'(x)|$ nên

$$|f(x_n) - f(\bar{x})| = |f'(c)(x_n - \bar{x})| \geq m|x_n - \bar{x}|.$$

Suy ra $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$.

Như vậy, để đánh giá độ chính xác của nghiệm nhận được bằng phương pháp dây cung, ta có thể sử dụng công thức

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \leq \frac{\max\{|f(x)|, x \in [a, b]\}}{m}.$$

Ngoài ra, nếu biết hai giá trị gần đúng liên tiếp, ta có thể đánh giá sai số như sau.

Từ trên (chứng minh sự hội tụ của phương pháp dây cung) ta có:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - d)}{f(x_{n-1}) - f(d)}.$$

Suy ra $-f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(d)}{x_{n-1} - d}(x_n - x_{n-1})$.

Vì $\bar{x}$ là nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$ nên ta có thể viết:

$$f(\bar{x}) - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(d)}{x_{n-1} - d}(x_n - x_{n-1}).$$

Áp dụng Định lý giá trị trung bình Lagrange, ta có

$$f'(c_1)(\bar{x} - x_{n-1}) = f(\bar{x}) - f(x_{n-1})$$

và

$$f'(c_2)(x_{n-1} - d) = f(x_{n-1}) - f(d),$$

trong đó c_1 nằm giữa $\bar{x}$ và x_{n-1} , c_2 nằm giữa x_{n-1} và d .

Suy ra

$$\begin{aligned} f'(c_1)(\bar{x} - x_{n-1}) &= f(\bar{x}) - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(d)}{x_{n-1} - d}(x_n - x_{n-1}) = \\ &= \frac{f'(c_2)(x_{n-1} - d)}{(x_{n-1} - d)}(x_n - x_{n-1}) = f'(c_2)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Vậy

$$f'(c_1)(\bar{x} - x_n + x_n - x_{n-1}) = f'(c_2)(x_n - x_{n-1})$$

hay

$$f'(c_1)(\bar{x} - x_n) = [f'(c_2) - f'(c_1)](x_n - x_{n-1})$$

và

$$|\bar{x} - x_n| = \frac{|f'(c_2) - f'(c_1)|}{|f'(c_1)|} |x_n - x_{n-1}|.$$

Theo giả thiết ta có:

$$|f'(c_2) - f'(c_1)| \leq |M - m|.$$

Do đó

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}|.$$

Như vậy, ta có hai công thức đánh giá sai số

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \leq \frac{\max\{|f(x)|, x \in [a, b]\}}{m} \quad \text{và} \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}|.$$

4. Phương pháp tiếp tuyến (Phương pháp Newton-Raphson)

Giả sử (a, b) là khoảng cách li nghiệm. Ta thay cung của đường cong $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ bằng tiếp tuyến tại điểm $A(a, f(a))$ hoặc điểm $B(b, f(b))$ và coi giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành là nghiệm xấp xỉ của phương trình $f(x) = 0$.

Để xây dựng dãy xấp xỉ x_n , ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

Để xác định, ta coi

$f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ (Hình 3).

Hình 3

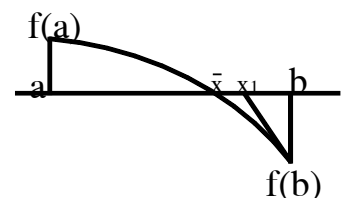
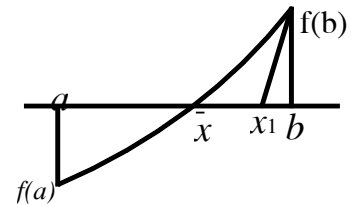
Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $B(b, f(b))$ có dạng: $y - f(b) = f'(b)(x - b)$. Hoành độ giao điểm x_1 của tiếp tuyến với trục hoành chính là nghiệm của phương trình trên khi cho $y = 0$.

Suy ra $0 - f(b) = f'(b)(x - b)$ hay $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$. Nghiệm $\bar{x}$ bây giờ nằm trong

khoảng (a, x_1) (xem Hình 3). Thay khoảng (a, b) bằng khoảng (a, x_1) , ta đi đến

nghiệm xấp xỉ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Tiếp tục quá trình trên, ta đi đến dãy



nghiệm xấp xỉ: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Công thức trên vẫn đúng trong trường hợp

$$f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0 \text{ (Hình 4).}$$

Trường hợp 2. $f'(x).f''(x) < 0$. Để xác định, coi

$$f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0 \text{ (Hình 5).}$$

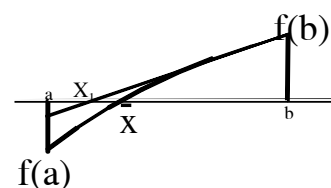
Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(a, f(a))$ có dạng:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Hoành độ giao điểm x_1 của tiếp tuyến

với trục hoành chính là nghiệm của

phương trình trên khi cho $y = 0$.



Hình 5

Suy ra $0 - f(a) = f'(a)(x - a)$ hay $x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

Nghiệm $\bar{x}$ bây giờ nằm trong khoảng (x_1, b) (xem hình 5).

Thay khoảng (a, b) bằng khoảng (x_1, b) , ta đi đến nghiệm $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Tiếp tục quá trình trên, ta đi đến dãy nghiệm xấp xỉ:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Công thức trên vẫn đúng trong trường hợp

$$f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0.$$

Tính hội tụ

Dãy các xấp xỉ liên tiếp là một dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới (trường hợp 1) hoặc đơn điệu tăng và bị chặn trên (trường hợp 2) nên tồn tại giới hạn

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$. Dễ thấy rằng $\tilde{x}$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Thật vậy, chuyển qua giới hạn trong biểu thức $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ta có:

$\tilde{x} = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}$. Suy ra $f(\tilde{x}) = 0$. Do (a, b) là khoảng cách li nghiệm nên $\tilde{x} = \bar{x}$

chính là nghiệm ban đầu.

Đánh giá sai số

Giả sử $0 < m_1 \leq |f'(x)|$ và $|f''(x)| \leq M_1$.

Khi ấy ta có đánh giá sai số:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \frac{\max\{|f(x)|, x \in [a, b]\}}{m_1} \text{ và } |x_n - \bar{x}| \leq \frac{M_1}{2m_1} |x_n - \bar{x}_{n-1}|^2.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý giá trị trung bình Lagrange (công thức số gia hữu hạn), ta có

$$f(x_n) - f(\bar{x}) = f'(c)(x_n - \bar{x})$$

với $c \in (x_n, \bar{x}) \subset (a, b)$.

Vì $f(\bar{x}) = 0$ và $0 < m \leq |f'(x)|$ nên

$$|f(x_n) - f(\bar{x})| = |f'(c)(x_n - \bar{x})| \geq m|x_n - \bar{x}|.$$

Suy ra $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$.

Dùng khai triển Taylor của $f(x)$ tại x_{n-1} :

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(c)(x_n - x_{n-1})^2,$$

trong đó c nằm giữa x_n và x_{n-1} .

Do $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ nên $f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$.

Thay vào đẳng thức trên ta được:

$$|f(x_n)| = \left| \frac{1}{2}f''(c)(x_n - x_{n-1})^2 \right|.$$

Từ công thức trên và công thức $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$ ta suy ra

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \leq \frac{M}{2m} (x_n - x_{n-1})^2.$$

Như vậy, tốc độ hội tụ của phương pháp tiếp tuyến là bậc hai.

Đ3. TÌM NGHIỆM GẦN ĐÚNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$ TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ

Như ta thấy trong Đ2, cả bốn phương pháp giải gần đúng phương trình $f(x) = 0$ trong khoảng cách li nghiệm (a, b) đều dẫn tới thực hiện một dãy lặp $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ và dãy lặp này hội tụ tới nghiệm (duy nhất) $\bar{x}$ của phương trình trong khoảng (a, b) .

Do đã được thiết kế sẵn cho phép thực hiện các thao tác tính toán liên tiếp, việc thực hiện dãy lặp trên các máy tính điện tử khoa học (*Casio fx-500 MS*, *Casio fx-570 MS*, *Sharp 506 WM*, *Casio fx-500 ES*, *Casio fx-570 ES*) là khá đơn giản và thuận tiện. Trong Đ này, chúng tôi trình bày cách sử dụng các loại máy này cho mục đích giải gần đúng phương trình theo các phương pháp đã trình bày ở mục trên. Thực hành giải gần đúng phương trình trên máy tính điện tử khoa học cho phép cảm nhận rõ hơn các vấn đề của giải tích số (sự hội tụ, tốc độ hội tụ, ...) của từng phương pháp.

Để tiện trình bày, chúng tôi chọn máy tính điện tử khoa học *Casio 570 ES*, là loại máy có nhiều ưu điểm trong các tính năng giải toán và được sử dụng tương đối phổ biến hiện nay trong các trường phổ thông và đại học.

Máy tính điện tử khoa học *Casio 570 ES* có một số phím rất tiện dùng trong tính toán. Nó được thiết kế để có thể tính toán đại số (tính toán theo công thức) kết hợp với những ô nhớ (9 ô nhớ). Thiết kế này đặc biệt thích hợp cho thực hiện dãy lặp, do đó đặc biệt thuận tiện cho việc giải gần đúng phương trình.

Bài 1. Giải phương trình đại số bậc cao $x^9 + x - 10 = 0$.

Đây tuy chỉ là một phương trình đa thức, tuy nhiên bậc của nó khá cao nên khó có thể giải được bằng các kỹ thuật của đại số (đặt ẩn phụ, nhóm số hạng,...) để đưa về phương trình bậc thấp hơn.

Đặt $y = f(x) = x^9 + x - 10$.

Do $y' = 9x^8 + 1 > 0$ với mọi x nên hàm số đồng biến trên toàn trục số. Ta dễ dàng tính được $f(1) = -8$ và $f(2) = 504 > 0$. Do đó, phương trình $x^9 + x - 10 = 0$ có duy nhất một nghiệm trong khoảng $(1; 2)$. Để so sánh, ta sẽ tìm nghiệm gần đúng của phương trình này theo cả bốn phương pháp đã trình bày trong Đ2.

Phương pháp chia đôi khoảng chứa nghiệm

Đưa giá trị $x = 1$ vào ô nhớ $\boxed{A}$: 1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{A}$

Đưa giá trị $x = 2$ vào ô nhớ $\boxed{B}$: 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{B}$

Chú ý: Từ nay về sau, để cho tiện, các phím số được viết như là các số, còn các phím chữ trên màn hình được để trong các ô vuông. Thí dụ, phím số 2 ta vẫn viết là số 2, còn phím ô A ta viết là $\boxed{A}$.

Tính $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ và đưa vào ô nhớ $\boxed{C}$:

$$\boxed{\text{ALPHA}}$$
 $\boxed{A}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{B}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{C}$

Khai báo công thức $f(x) = x^9 + x - 10$:

$$\boxed{\text{ALPHA}}$$
 $\boxed{X}$ $\boxed{x^\wedge}$ 9 $\boxed{\triangleright}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{X}$ $\boxed{-}$ 10 (3.1)

Để tính giá trị của biểu thức tại một điểm nào đó ta bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (Calculate-tính): $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hỏi (hiện trên màn hình): X ?

Khai báo $c = \frac{3}{2}$ (đang ở trong ô $\boxed{C}$): $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{C}$ $\boxed{=}$ $(\frac{15331}{512})$

Chú ý: Từ nay về sau, để tiện trong trình bày, ta ghi ngay đáp số của kết quả tính toán hiển thị trên màn hình sau phím $\boxed{=}$ và để ở trong ngoặc. Thí dụ, sau khi khai

báo công thức (3.1) và bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi $X?$, ta khai báo $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{C}$ (tức là giá trị của đối số x cần tìm giá trị của hàm số $f(x) = x^9 + x - 10$ chính bằng giá trị trong ô $\boxed{C}$). Sau khi bấm phím $\boxed{=}$, máy hiện ngay trên màn hình đáp số $\frac{15331}{512}$, tức là $f(\frac{3}{2}) = \frac{15331}{512}$ và ta viết $\boxed{=}(\frac{15331}{512})$.

Như vậy, ta có $f(1) = -8 < 0$ và $f(\frac{3}{2}) = \frac{15331}{512} > 0$. Chứng tỏ nghiệm của phương trình nằm trong khoảng $(a_1, b_1) = (a, c) = (1; \frac{3}{2})$. Ô $\boxed{B}$ được giải phóng (giá trị cũ $x = 2$ trong ô nhớ $\boxed{B}$ không cần dùng nữa).

Chú ý: Vì tại mỗi bước i ta chỉ cần nhớ ba giá trị a_i, b_i hoặc $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ nên ta cũng chỉ cần sử dụng ba ô nhớ $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$ là đủ.

Lại chia đôi khoảng $(a_1, b_1) = (a, c) = (1; \frac{3}{2})$ và gửi $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$ vào ô $\boxed{B}$ (vừa được giải phóng):

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{C} \boxed{=} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$

Sử dụng phím $\boxed{\Delta}$ để đi về dòng công thức (3.1) và dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$ để tính giá trị của hàm số tại $c_1 = 1,25$:

Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (Calculate-tính): $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hỏi: $X?$

Khai báo $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$ (đã được tính và lưu ở trong ô $\boxed{B}$):

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{=}$ (-1.299419403)

Như vậy, ta có $f(c_1) = f(\frac{5}{4}) = -1,299419403$ và $f(b_1) = f(\frac{3}{2}) = \frac{15331}{512} > 0$.

Chú ý: Để tiện trình bày, ta thường viết dấu bằng = thay cho dấu gần đúng $\approx$, thí dụ $f(\frac{5}{4}) = -1,299419403$, mặc dù chính xác hơn, phải viết là:

$$f(\frac{5}{4}) \approx -1,299419403 \text{ (chính xác đến 10 chữ số).}$$

Chúng tỏ nghiệm của phương trình nằm trong khoảng

$(a_2, b_2) = (c_1, b_1) = (\frac{5}{4}; \frac{3}{2})$. Ô nhớ $\boxed{A}$ được giải phóng (giá trị cũ $a = 1$ trong ô nhớ $\boxed{A}$ không cần dùng nữa).

Lại chia đôi khoảng $(a_2, b_2) = (c_1, b_1) = (\frac{5}{4}; \frac{3}{2})$, tính và gửi

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8} = 1,375 \text{ vào ô } \boxed{A}:$$

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{C} \boxed{=} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{=} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$

Sử dụng phím $\boxed{\Delta}$ để đi về dòng công thức (3.1) và dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$ để tính giá

trị của hàm số tại $c_2 = \frac{11}{8} = 1,375$:

Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (Calculate-tính): $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hỏi: $X?$

Khai báo $c_2 = \frac{11}{8} = 1,375$ (đã được tính và lưu trong ô $\boxed{A}$):

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{=}$ (8.943079315)

Như vậy, ta có $f(c_2) = f(\frac{11}{8}) = 8,943079315 > 0$ và

$f(a_2) = f(c_1) = f(\frac{5}{4}) = -1,299419403 < 0$. Chúng tỏ nghiệm của phương trình

nằm trong khoảng $(a_3, b_3) = (a_2, c_2) = (\frac{5}{4}; \frac{11}{8})$. Ô nhớ $\boxed{B}$ được giải phóng (giá trị

cũ $b_2 = \frac{3}{2}$ trong ô nhớ $\boxed{B}$ không cần dùng nữa).

Lại chia đôi khoảng $(a_3, b_3) = (a_2, c_2) = (\frac{5}{4}; \frac{11}{8})$ và gửi

$$c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{11}{8}}{2} = \frac{21}{16} = 1,3125 \text{ vào ô } [B]:$$

[ALPHA] [A] [+] [ALPHA] [C] [=] [÷] 2 [=] [SHIFT] [STO] [B]

Sử dụng phím [Δ] để đi về dòng công thức (3.1) và dùng phím [CALC] để tính giá

trị của hàm số tại $c_3 = \frac{21}{16} = 1,3125$:

Bấm phím [CALC] (Calculate-tính): [CALC]

Máy hỏi: X ?

Khai báo $c_3 = \frac{21}{16} = 1,3125$ (đã được tính và lưu trong ô [B]):

[ALPHA] [B] [=] (2.870795905)

Như vậy, ta có $f(c_3) = f(\frac{21}{16}) = 2,870795905 > 0$ và

$f(a_2) = f(c_1) = f(\frac{5}{4}) = -1,299419403 < 0$. Chứng tỏ nghiệm của phương trình

nằm trong khoảng $(a_4, b_4) = (c_1, c_3) = (\frac{5}{4}; \frac{21}{16})$. Ô nhớ [C] được giải phóng (giá trị

cũ $c = \frac{11}{8}$ trong ô nhớ [C] không cần dùng nữa).

Lại chia đôi khoảng $(a_4, b_4) = (c_1, c_3) = (\frac{5}{4}; \frac{21}{16})$ và gửi

$$c_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{21}{16}}{2} = \frac{41}{32} = 1,28125 \text{ vào ô } [C]:$$

[ALPHA] [A] [+] [ALPHA] [B] [=] [÷] 2 [=] [SHIFT] [STO] [C]

Sử dụng phím [Δ] để đi về dòng công thức (3.1) và dùng phím [CALC] để tính giá

trị của hàm số tại $c_4 = \frac{41}{32} = 1,28125$:

Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (Calculate-tính): $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hỏi: $X?$

Khai báo $c_4 = \frac{41}{32} = 1,28125$ (đã được tính và lưu trong ô $\boxed{C}$):

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{C} \boxed{=}$ (0.5860042121)

Như vậy, ta có $f(c_4) = f\left(\frac{41}{32}\right) = 0,586004212 > 0$ và

$f(a_2) = f(c_1) = f\left(\frac{5}{4}\right) = -1,299419403 < 0$. Chứng tỏ nghiệm của phương trình

nằm trong khoảng $(a_5, b_5) = (c_1, c_4) = \left(\frac{5}{4}; \frac{41}{32}\right)$. Ô nhớ $\boxed{C}$ được giải phóng (giá trị

cũ $c_3 = \frac{21}{16}$ trong ô nhớ $\boxed{C}$ không cần dùng nữa).

Tiếp tục quá trình này, ta đi đến bảng sau, trong đó mỗi dòng cho ta các giá trị c_n , $f(c_n)$ và giá trị $f(a_n)$ hoặc $f(b_n)$ đã tính được ở dòng trên, trái dấu với $f(c_n)$. Vì các giá trị $f(a_n)$ hoặc $f(b_n)$ đã được tính đến 10 chữ số ở dòng trên, và chỉ cần dấu của chúng, nên để tiết kiệm chỗ, ta chỉ viết giá trị khác 0 đầu tiên của nó sau dấu phẩy. Mặt khác, nhìn vào mỗi dòng, ta cũng biết ô nào (không có) được giải phóng, nhường chỗ để đưa giá trị mới của c_n vào.

c_n trong	ô	$f(c_n)$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	Khoảng
$a=1; b=2$			-8 $\boxed{A}$	504 $\boxed{B}$	$(a; b)$
$c = 1,5$	$\boxed{C}$	29,94335937	-8 $\boxed{A}$		$(a; c)$
$c_1 = 1,25$	$\boxed{B}$	-1,299419403		29,9 $\boxed{C}$	$(c_1; c)$
$c_2 = 1,375$	$\boxed{A}$	8,943079315	-1,2 $\boxed{B}$		$(c_1; c_2)$
$c_3 = 1,3125$	$\boxed{C}$	2,870795905	-1,2 $\boxed{B}$		$(c_1; c_3)$
$c_4 = 1,28125$	$\boxed{A}$	0,5860042121	-1,2 $\boxed{B}$		$(c_1; c_4)$
$c_5 = 1,265625$	$\boxed{C}$	-0,402449001		0,5 $\boxed{A}$	$(c_5; c_4)$
$c_6 = 1,2734375$	$\boxed{B}$	0,079843683	-0,4 $\boxed{C}$		$(c_5; c_6)$

$c_7 = 1,26953125$	$\boxed{A}$	$-0,164222375$	$0,07 \boxed{B}$	$(c_7; c_6)$
$c_8 = 1,271484375$	$\boxed{C}$	$-0,042927154$	$0,07 \boxed{B}$	$(c_8; c_6)$
$c_9 = 1,272460938$	$\boxed{A}$	$0,018272819$	$-0,04 \boxed{C}$	$(c_8; c_9)$
$c_{10} = 1,271972656$	$\boxed{B}$	$-0,012373404$	$0,01 \boxed{A}$	$(c_{10}; c_9)$
$c_{11} = 1,272216797$	$\boxed{C}$	$0,0029381332$	$-0,01 \boxed{B}$	$(c_{10}; c_{11})$
$c_{12} = 1,272094127$	$\boxed{A}$	$-0,00472052697$	$0,002 \boxed{C}$	$(c_{12}; c_{11})$
$c_{13} = 1,272155762$	$\boxed{B}$	$-0,00089191976$	$0,002 \boxed{C}$	$(c_{13}; c_{11})$
$c_{14} = 1,272186279$	$\boxed{A}$	$0,0010229262$	$-0,0008 \boxed{B}$	$(c_{13}; c_{14})$
$c_{15} = 1,272171021$	$\boxed{C}$	$0,0000654581$	$-0,0008 \boxed{B}$	$(c_{13}; c_{15})$
$c_{16} = 1,272163391$	$\boxed{A}$	$-0,00041324182$	$0,00006 \boxed{C}$	$(c_{16}; c_{15})$
$c_{17} = 1,272167206$	$\boxed{B}$	$-0,00017389435$	$0,00006 \boxed{C}$	$(c_{17}; c_{15})$
$c_{18} = 1,272169113$	$\boxed{A}$	$-0,00005421851$	$0,00006 \boxed{C}$	$(c_{18}; c_{15})$
$c_{19} = 1,272170067$	$\boxed{B}$	$0,0000056196$	$-0,00005 \boxed{A}$	$(c_{18}; c_{19})$
$c_{20} = 1,27216959$	$\boxed{C}$	$-0,00000024847$	$0,000005 \boxed{B}$	$(c_{20}; c_{19})$
$c_{21} = 1,272169828$	$\boxed{A}$	$-0,00000933952$	$0,000005 \boxed{B}$	$(c_{21}; c_{19})$
$c_{22} = 1,272169948$	$\boxed{C}$	$-0,00000185969$	$0,000005 \boxed{B}$	$(c_{22}; c_{19})$
$c_{23} = 1,272170007$	$\boxed{A}$	$0,00000188$	$-0,000001 \boxed{C}$	$(c_{22}; c_{23})$
$c_{24} = 1,272169977$	$\boxed{B}$	$0,0000000101$	$-0,000001 \boxed{C}$	$(c_{22}; c_{24})$
$c_{25} = 1,272169963$	$\boxed{A}$	$-0,00000092473$	$0,00000001 \boxed{B}$	$(c_{25}; c_{24})$
$c_{26} = 1,27216997$	$\boxed{C}$	$-0,0000004573$	$0,00000001 \boxed{B}$	$(c_{26}; c_{24})$
$c_{27} = 1,272169974$	$\boxed{A}$	$-0,00000022325$	$0,00000001 \boxed{B}$	$(c_{27}; c_{24})$
$c_{28} = 1,272169976$	$\boxed{C}$	$-0,00000010655$	$0,00000001 \boxed{B}$	$(c_{28}; c_{24})$
$c_{29} = 1,272169977$	$\boxed{A}$	$-0,00000004821$	$0,00000001 \boxed{B}$	$(c_{29}; c_{25})$

Nghiệm gần đúng là $\bar{x} \approx c_{29} = 1,272169977$ và $f(\bar{x}) \approx -0,00000004821$ **Lời**

bình: Ta thấy phương pháp chia đôi tuy đơn giản nhưng nói chung hội tụ chậm, thao tác trên máy khá phức tạp.

Phương pháp lặp

Phương trình $x^9 + x - 10 = 0$ tương đương với $x = \sqrt[9]{10-x} = \varphi(x)$.

Vì $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{(10-x)^8}}$ nên $\frac{1}{\sqrt[9]{9^8}} \leq |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt[9]{8^8}} < 1$ với mọi $x \in [1; 2]$. Do đó dãy

lặp $x_{n+1} = \sqrt[9]{10-x_n}$ hội tụ tới nghiệm $\bar{x} \in (1; 2)$.

Chọn giá trị ban đầu $x_0 = 1,5 : 1.5 [=]$

Chú ý: Máy đã được thiết kế một cách thông minh là giá trị $x_0 = 1,5$ vừa được khai báo, hoặc các kết quả tính toán hiện trên màn hình, cũng sẽ được chuyển ngay vào ô **Ans** (kết quả), để sử dụng vào các tính toán tiếp theo cho tiện.

Khai báo $\varphi(x_0)$: $[([10 [-] [Ans]) [x ^] [-] 1 [\nabla] 9 [\triangleright] [\triangleright]$

Tính giá trị của $\varphi(x_0)$: Bấm phím $[=]$

Tính các giá trị tiếp theo: Bấm phím $[=]$

Sau 6 lần bấm phím, ta đi đến dãy nghiệm xấp xỉ:

1,5; 1,268436614; 1,27223043; 1,272168998; 1,272169993; 1,272169977;
1,272169977;

Kết quả nghiệm gần đúng là: 1,272169977 (chính xác đến 10 chữ số thập phân).

Phương pháp dây cung

Xét $f(x) = x^9 + x - 10$. Ta có $f'(x) = 9x^8 + 1 > 0$ và $f''(x) = 72x^7 > 0$ với mọi x trong khoảng $(1; 2)$. Theo công thức dây cung

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$ với $d = 2$ ta có dãy lặp

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^9 + x_n - 10)(x_n - 2)}{x_n^9 + x_n - 10 - 504}, x_0 = 1.$$

Khai báo giá trị đầu $x_0 = 1 : 1 [=]$

Khai báo công thức $x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^9 + x_n - 10)(x_n - 2)}{x_n^9 + x_n - 10 - 504}$:

`[Ans] [-] ([ [Ans] [x^] 9 >+ [Ans] [-] 10 ]) ([ [Ans] [-] 2 ]) ÷ ([ [Ans] [x^] 9 >+ [Ans] [-] 514 )]`

Tính các giá trị x_{n+1} bằng cách bấm liên tiếp phím `[=]`. Ta được dãy các giá trị:

$$\frac{65}{64}; 1,03069279; \dots$$

Phải sau khoảng 300 lần bấm phím `[=]` ta mới ra được kết quả 1,272169976.

Như vậy, phương pháp dây cung trong bài này hội tụ rất chậm.

Phương pháp tiếp tuyến

Theo công thức tiếp tuyến $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_0 = 2$ ta có

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^9 + x_n - 10}{9x_n^8 + 1}.$$

Khai báo giá trị ban đầu: 2 `[=]`

Khai báo công thức $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^9 + x_n - 10}{9x_n^8 + 1}$:

`[Ans] [-] ([ [Ans] [x^] 9 >+ [Ans] [-] 10 ]) ÷ ([ 9 [Ans] [x^] 8 + 1 ])`

Tính các giá trị x_{n+1} bằng cách bấm liên tiếp phím `[=]`. Ta được dãy các giá trị xấp xỉ:

1,781344902; 1,592631378; 1,438653785; 1,331291548; 1,281547657;
1,272435766; 1,272170196; 1,27216977; 1,27216977.

Sau chín lần lặp ta đã đi đến đáp số.

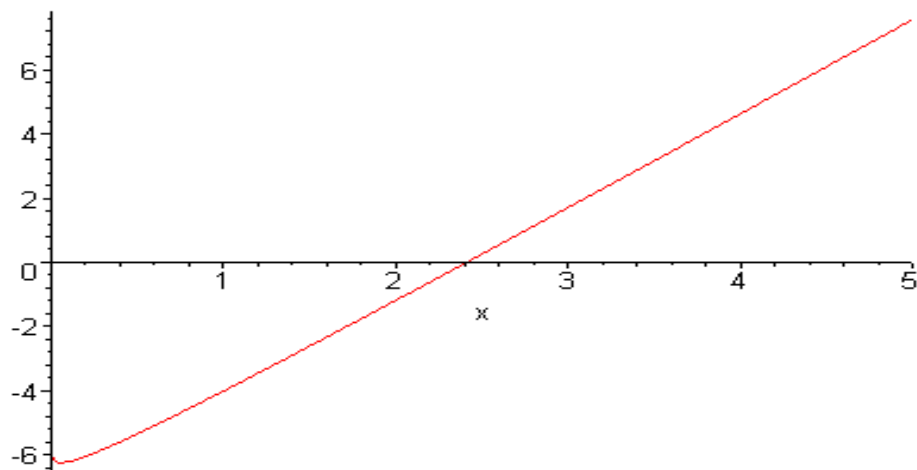
Kết luận: Cả bốn phương pháp (chia đôi đoạn chứa nghiệm, lặp, dây cung và tiếp tuyến) đều cho nghiệm gần đúng tới 10 chữ số thập phân. Để tìm được nghiệm gần

đúng đến 10 chữ số thập phân theo phương pháp chia đôi cần 30 bước lặp, và thao tác phức tạp trong mỗi bước. Để tìm nghiệm gần đúng đến 10 chữ số thập phân theo phương pháp lặp chỉ cần 6 bước. Để tìm nghiệm gần đúng đến 10 chữ số thập phân theo phương pháp dây cung phải cần đến 300 bước lặp. Để tìm nghiệm gần đúng đến 10 chữ số thập phân theo phương pháp tiếp tuyến chỉ cần 9 bước lặp. Thao tác lặp theo ba phương pháp sau rất đơn giản: sau khi khai báo giá trị ban đầu và công thức lặp, ta chỉ cần liên tiếp bấm phím $\boxed{=}$ cho đến khi được giá trị không đổi (điểm bất động), là nghiệm gần đúng đến 10 chữ số thập phân.

Bài 2. Giải phương trình chứa căn thức $3x - 2\sqrt[8]{x} - 5 = 0$.

Đặt $y = f(x) = 3x - 2\sqrt[8]{x} - 5$. Không cần máy ta cũng có thể dễ dàng tính được $f(0) = -5$ và $f(5) = 3.5 - 2\sqrt[8]{5} - 5 = 10 - 2\sqrt[8]{5} > 0$. Do đó, phương trình $3x - 2\sqrt[8]{x} - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 5)$. Để xem dáng điệu hình học của đồ thị, ta có thể nhờ *Maple* để vẽ đồ thị trong khoảng $(0; 5)$ nhờ lệnh **plot** (vẽ đồ thị):

[> **plot(3*x-2*x^(1/8)-5,x=0..5);**



Nhìn vào đồ thị hàm số $y = f(x) = 3x - 2\sqrt[8]{x} - 5$ ta thấy, đồ thị cắt trục hoành tại một điểm trong khoảng $(2; 3)$. Tuy nhiên, để chính xác hơn ta cần tính giá trị của hàm số tại các điểm $x = 2$ và $x = 3$.

Ta có thể tính các giá trị của hàm số đã cho tại điểm $x = 2$ nhờ lệnh **eval** (evaluate - tính giá trị của hàm số tại $x = 2$) và lệnh **evalf(%)** (tính giá trị của biểu thức trên):

```
[> eval(3*x-2*x^(1/8)-5,x=2);
```

$$1 - 2 \cdot 2^{(1/8)}$$

```
[> evalf(%);
```

-1.181015466

Cũng có thể kết hợp hai lệnh trên vào một lệnh:

```
> evalf(eval(3*x-2*x^(1/8)-5,x=2));
```

-1.181015466

Tương tự, ta có thể tính các giá trị của hàm số đã cho tại điểm $x = 3$ nhờ lệnh **eval** và lệnh **evalf(%)**:

```
[> eval(3*x-2*x^(1/8)-5,x=3);
```

$$4 - 2 \cdot 3^{(1/8)}$$

```
[> evalf(%);
```

1.705594620

Tuy nhiên, ta còn có thể dùng lệnh **subs** (thay thế) để thay $x = 3$ vào biểu thức $f(x) = 3x - 2\sqrt[8]{x} - 5$ để được giá trị $f(3)$:

```
[> subs(x=3,3*x-2*x^(1/8)-5);
```

$$4 - 2 \cdot 3^{(1/8)}$$

```
[> evalf(%);
```

1.705594620

Có thể kết hợp hai lệnh trên vào một lệnh:

```
[> evalf(subs(x=3,3*x-2*x^(1/8)-5));
```

1.705594620

Tất nhiên, ta cũng có thể dùng máy tính khoa học để tính các giá trị trên. Thí dụ, sử dụng *Casio fx-570 ES* để tính giá trị của hàm số $3x - 2\sqrt[8]{x} - 5$ tại $x = 2$ như sau:

Khai báo hàm số $3x - 2\sqrt[8]{x} - 5$:

$$3 \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{X} \boxed{-} 2 \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{X} \boxed{x^{\boxed{\square}}} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{\nabla} 8 \boxed{\triangleright} \boxed{\triangleright} \boxed{-} 5 \quad (3.2)$$

Tính giá trị hàm số:

Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (Calculate-tính)

Máy hỏi: X ?

Khai báo $x = 2$: $2 \boxed{=}$

Máy trả lời (đáp số hiện trên màn hình), màn hình có dạng:

$$\boxed{\begin{array}{l} 3X - 2X^{\frac{1}{8}} - 5 \\ -1,181015465 \end{array}}.$$

Để tính giá trị của hàm số $3x - 2\sqrt[8]{x} - 5$ tại $x = 3$ ta không cần khai báo lại công thức hàm số mà chỉ cần sử dụng phím $\boxed{\text{CALC}}$:

Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (Calculate-tính)

Máy hỏi: X ?

Khai báo $x = 3$: $3 \boxed{=}$

Máy trả lời (đáp số hiện trên màn hình): $\boxed{\begin{array}{l} 3X - 2X^{\frac{1}{8}} - 5 \\ 1,705594619 \end{array}}.$

Vậy phương trình $3x - 2\sqrt[8]{x} - 5 = 0$ có một nghiệm duy nhất trong khoảng $(a;b) = (2;3)$.

Phương pháp chia đôi khoảng chứa nghiệm

Đưa giá trị $x = 2$ vào ô nhớ $\boxed{A}$: $2 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$

Đưa giá trị $x = 3$ vào ô nhớ $\boxed{B}$: $3 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$

Tính $c = \frac{a+b}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ và đưa vào ô nhớ $\boxed{C}$:

$$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{=} \boxed{\div} 2 \boxed{=} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{C}$$

Sử dụng phím $\boxed{\Delta}$ để đi về dòng công thức (3.2) và dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$ để tính giá

trị của hàm số tại $c = \frac{5}{2}$:

Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (Calculate-tính)

Máy hỏi: $X?$

Khai báo $c = \frac{5}{2}$ (đang ở trong ô $\boxed{C}$):

$$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{C} \boxed{=}(0.2572932161)$$

Như vậy, ta có $f(2) = -1,181015465 < 0$ và $f(\frac{5}{2}) = 0.2572932161 > 0$. Chúng

tỏ nghiệm của phương trình nằm trong khoảng $(a_1; b_1) = (a, c) = (2; 3)$. Ô $\boxed{B}$ được giải phóng (giá trị cũ $x = 3$ trong ô nhớ $\boxed{B}$ không cần dùng nữa).

Lại chia đôi khoảng $(a_1; b_1) = (a, c) = (2; 3)$ và gửi $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{9}{4} = 2,25$ vào ô $\boxed{B}$:

$$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{C} \boxed{=} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{=} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$$

Sử dụng phím $\boxed{\Delta}$ để đi về dòng công thức (3.2) và dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$ để tính giá

trị của hàm số tại $c_1 = \frac{9}{4} = 2,25$:

Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (Calculate-tính):

Máy hỏi: $X?$

Khai báo $c_1 = \frac{9}{4}$ (đang ở trong ô $\boxed{B}$): $\boxed{\text{CALC}}$

$$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{=}(-0.4633638394)$$

Như vậy, ta có $f(c_1) = f(\frac{9}{4}) = -0,4633638394 < 0$ và

$f(b_1) = f(\frac{5}{2}) = 0,2572932161 > 0$. Chúng tỏ nghiệm của phương trình nằm trong

khoảng $(a_2; b_2) = (a_1, c_1) = (\frac{9}{4}; \frac{5}{2})$. Ô nhớ $\boxed{A}$ được giải phóng (giá trị cũ $a = 2$

trong ô nhớ $\boxed{A}$ không cần dùng nữa).

Lại chia đôi khoảng $(a_2; b_2) = (a_1, c_1) = (\frac{9}{4}; \frac{5}{2})$ và gửi

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{\frac{9}{4} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{19}{8} = 2,375 \text{ vào ô } [A]:$$

[ALPHA] [B] [+] [ALPHA] [C] [=] [÷] 2 [=] [SHIFT] [STO] [A]

Sử dụng phím [Δ] để đi về dòng công thức (3.2) và dùng phím [CALC] để tính giá

trị của hàm số tại $c_2 = \frac{19}{8} = 2,375$:

Bấm phím [CALC] (Calculate-tính): [CALC]

Máy hỏi: X?

Khai báo $c_2 = \frac{19}{8} = 2,375$ (đang ở trong ô [A]):

[ALPHA] [A] [=] (-0.103373306)

Như vậy, ta có $f(c_2) = f(\frac{19}{8}) = f(2,375) = -0.103373306 < 0$ và

$f(b_1) = f(\frac{5}{2}) = 0.2572932161 > 0$. Chứng tỏ nghiệm của phương trình nằm trong

khoảng $(a_3; b_3) = (c_2; b_1) = (2,375; \frac{5}{2})$. Ô nhớ [B] được giải phóng (giá trị cũ $c_1 = \frac{9}{4}$

trong ô nhớ [B] không cần dùng nữa).

Lại chia đôi khoảng $(a_3; b_3) = (c_2; b_1) = (2,375; \frac{5}{2})$ và gửi

$$c_3 = \frac{c_2 + b_2}{2} = \frac{\frac{19}{8} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{39}{16} = 2,4375 \text{ vào ô } [B]:$$

[ALPHA] [A] [+] [ALPHA] [C] [=] [÷] 2 [=] [SHIFT] [STO] [B]

Sử dụng phím [Δ] để đi về dòng công thức (3.2) và dùng phím [CALC] để tính giá

trị của hàm số tại $c_3 = \frac{39}{16} = 2,4375$:

Bấm phím [CALC] (Calculate-tính): [CALC]

Máy hỏi: X ?

Khai báo $c_3 = \frac{39}{16} = 2,4375$ (đang ở trong ô $\boxed{B}$):

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{=}$ (0,076879549)

Như vậy, ta có $f(c_3) = f(\frac{39}{16}) = 0,076879549 > 0$ và

$f(c_2) = f(\frac{19}{8}) = f(2,375) = -0.103373306 < 0$. Chúng tỏ nghiệm của phương

trình nằm trong khoảng $(a_4; b_4) = (c_2; c_3) = (\frac{19}{8}; \frac{39}{16})$. Ô nhớ $\boxed{C}$ được giải phóng (giá

trị cũ $c = \frac{5}{2}$ trong ô nhớ $\boxed{C}$ không cần dùng nữa).

Lại chia đôi khoảng $(a_4; b_4) = (c_2; c_3) = (\frac{19}{8}; \frac{39}{16})$ và gửi

$c_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{\frac{19}{8} + \frac{39}{16}}{2} = \frac{77}{32} = 2,40625$ vào ô $\boxed{C}$:

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{B} \boxed{=} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{=} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{C}$

Sử dụng phím $\boxed{\Delta}$ để đi về dòng công thức (3.2) và dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$ để tính giá

trị của hàm số tại $c_4 = \frac{77}{32} = 2,40625$:

Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (Calculate-tính): $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hỏi: X ?

Khai báo $c_4 = \frac{77}{32} = 2,40625$ (đang ở trong ô $\boxed{C}$):

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{C} \boxed{=}$ (-0,013267467)

Như vậy, ta có $f(c_4) = f(\frac{77}{32}) = -0,013267467 < 0$ và

$f(c_2) = f(\frac{19}{8}) = f(2,375) = -0.103373306 < 0$. Chúng tỏ nghiệm của phương

trình nằm trong khoảng $(a_4; b_4) = (c_2; c_3) = (\frac{19}{8}; \frac{39}{16})$. Ô nhớ $\boxed{C}$ được giải phóng (giá trị cũ $c = \frac{5}{2}$ trong ô nhớ $\boxed{C}$ không cần dùng nữa).

Ta có bảng kết quả sau:

c_n	trong	ô	$f(c_n)$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	Khoảng
a=2; b=3				-1,1 $\boxed{A}$	1,7 $\boxed{B}$	$(a; b)$
$c = 2,5$		$\boxed{C}$	0.2572932161	-1,1 $\boxed{A}$		$(a; c)$
$c_1 = 2,25$		$\boxed{B}$	-0.4633638394		0,2 $\boxed{C}$	$(c_1; c)$
$c_2 = 2,2375$		$\boxed{A}$	-0,103373306		0,2 $\boxed{C}$	$(c_2; c)$
$c_3 = 2,4375$		$\boxed{B}$	0,076879549	-0,1 $\boxed{A}$		$(c_2; c_3)$
$c_4 = 2,40625$		$\boxed{C}$	-0,013267467		0,07 $\boxed{B}$	$(c_3; c_4)$
$c_5 = 2,421875$		$\boxed{A}$	0,031800956	-0,01 $\boxed{C}$		$(c_4; c_5)$
$c_6 = 2,42140625$		$\boxed{B}$	0,00926546534	-0,01 $\boxed{C}$		$(c_4; c_6)$
$c_7 = 2,41015625$		$\boxed{A}$	-0,0020013218		0,009 $\boxed{B}$	$(c_7; c_6)$
$c_8 = 2,412109375$		$\boxed{C}$	0,00363199172	-0,002 $\boxed{A}$		$(c_7; c_8)$
$c_9 = 2,411132813$		$\boxed{B}$	0,00081531494	-0,002 $\boxed{A}$		$(c_7; c_9)$
$c_{10} = 2,410644531$		$\boxed{C}$	-0,00059300843		0,0008 $\boxed{B}$	$(c_{10}; c_9)$
$c_{11} = 2,410888672$		$\boxed{A}$	0,00011115202	-0,0005 $\boxed{C}$		$(c_{10}; c_{11})$
$c_{12} = 2,410766602$		$\boxed{B}$	-0,00024092851		0,0001 $\boxed{A}$	$(c_{12}; c_{11})$
$c_{13} = 2,410827637$		$\boxed{C}$	-0,000006488831		0,0001 $\boxed{A}$	$(c_{13}; c_{11})$
$c_{14} = 2,410858154$		$\boxed{B}$	0,00002313185	-0,000006 $\boxed{C}$		$(c_{13}; c_{14})$
$c_{15} = 2,410842896$		$\boxed{A}$	-0,0002087824		0,00002 $\boxed{B}$	$(c_{15}; c_{14})$
$c_{16} = 2,410850525$		$\boxed{C}$	0,00000112682	-0,0002 $\boxed{A}$		$(c_{15}; c_{16})$
$c_{17} = 2,41084671$		$\boxed{B}$	-0,0000098757		0,000001 $\boxed{C}$	$(c_{17}; c_{16})$
$c_{18} = 2,410848618$		$\boxed{A}$	-0,00000437445		0,000001 $\boxed{C}$	$(c_{18}; c_{17})$
$c_{19} = 2,410849571$		$\boxed{B}$	-0,00000162379		0,000001 $\boxed{C}$	$(c_{19}; c_{17})$

$c_{20} = 2,410850048$	A	$-0,00000024847$	$0,000001$	C	$(c_{20}; c_{17})$
$c_{21} = 2,410850287$	B	$0,00000043919$	$-0,0000002$	A	$(c_{20}; c_{21})$
$c_{22} = 2,410850167$	C	$0,00000009536$	$-0,0000002$	A	$(c_{20}; c_{22})$
$c_{23} = 2,410850108$	B	$-0,00000007658$	$0,00000009$	C	$(c_{23}; c_{22})$
$c_{24} = 2,410850138$	A	$0,0000000094$	$-0,00000007$	B	$(c_{23}; c_{24})$
$c_{25} = 2,410850123$	C	$-0,00000003358$	$0,000000009$	A	$(c_{25}; c_{24})$
$c_{26} = 2,41085013$	B	$-0,00000001209$	$0,000000009$	A	$(c_{26}; c_{24})$
$c_{27} = 2,410850134$	C	$-0,00000000132$	$0,000000009$	A	$(c_{27}; c_{24})$
$c_{28} = 2,410850136$	B	$0,00000000404$	$-0,000000001$	C	$(c_{27}; c_{28})$
$c_{29} = 2,410850135$	A	$0,00000000135$	$-0,000000001$	C	$(c_{27}; c_{29})$
$c_{30} = 2,4108501345$	B	$0,00000000000$	$-0,00000000132$	C	$(c_{27}; c_{30})$

Nghiệm gần đúng là $\bar{x} \approx c_{30} = 2,4108501345$ và $f(\bar{x}) \approx 0,00000000000$ (chính xác đến 10 chữ số).

Phương pháp lặp

Phương trình $3x - 2\sqrt[8]{x} - 5 = 0$ tương đương với $x = \frac{2\sqrt[8]{x} + 5}{3} = \varphi(x)$.

Dãy lặp có dạng $x_{n+1} = \frac{2\sqrt[8]{x_n} + 5}{3}$.

Chọn giá trị ban đầu $x_0 = 2,5 : 2.5$

Khai báo $\varphi(x_0)$:

Tính giá trị của $\varphi(x_0)$: Bấm phím

Tính các giá trị tiếp theo: Bấm phím

Ta được dãy xấp xỉ:

2.5; 2.414235595; 2.410980682; 2.410855171; 2.410850329; 2.410850142;
2.410850135; 2.410850134; 2.410850134; ...

Sau 9 bước ta đi đến nghiệm gần đúng đến 10 chữ số.

Phương pháp dây cung

Theo công thức dây cung $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - 3)}{f(x_n) - f(3)}$, $x_0 = 2$ ta có

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(3x_n - 2\sqrt[8]{x_n} - 5)(x_n - 3)}{3x_n - 2\sqrt[8]{x_n} - 5 - f(3)}, x_0 = 2.$$

Khai báo $x_0 = 2$: 2 [=]

Khai báo công thức $f(x) = 3x - 2\sqrt[8]{x} - 5$:

3 [ALPHA] [X] [-] 2 [ALPHA] [X] [x[□]] [-] 1 [∇] 8 [▷] [▷] [-] 5

Tính giá trị của $f(3)$: Bấm phím [CALC]

Máy hỏi: X?

Khai báo: 3 [=] (1.705594619)

Gửi vào ô [A]: [SHIFT] [STO] [A]

Khai báo giá trị ban đầu: 2 [=]

Khai báo công thức $x_{n+1} = x_n - \frac{(3x_n - 2\sqrt[8]{x_n} - 5)(x_n - 3)}{3x_n - 2\sqrt[8]{x_n} - 5 - f(3)}$:

[Ans] [-] ([(3 [Ans] [-] 2 [Ans] [x[^]] [-] 1 [∇] 8 [▷] [▷] [-] 5)] ([Ans] [-] 3)] ÷ (3 [Ans]

[-] 2 [Ans] [x[^]] [-] 1 [∇] 8 [▷] [▷] [-] 5 [-] [ALPHA] [A]))

Tính các giá trị x_{n+1} bằng cách bấm liên tiếp phím [=].

Ta được dãy các giá trị:

2,409135779; 2,410843757; 2,410850111; 2,410850134; 2,410850134.

Phương pháp tiếp tuyến

Theo công thức lặp trong phương pháp tiếp tuyến $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_0 = 2$ ta có

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(3x_n - 2\sqrt[8]{x_n} - 5)}{3 - \frac{1}{4\sqrt[8]{x_n^7}}}.$$

Khai báo giá trị ban đầu $x_0 = 2$: $\boxed{=}$

Khai báo công thức $x_{n+1} = x_n - \frac{(3x_n - 2\sqrt[8]{x_n} - 5)}{3 - \frac{1}{4\sqrt[8]{x_n^7}}}$:

$$\boxed{\text{Ans}} \boxed{-} \boxed{(} \boxed{3} \boxed{\text{Ans}} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\text{Ans}} \boxed{x^{\wedge}} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{\nabla} \boxed{8} \boxed{\triangleright} \boxed{\triangleright} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{(} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{\div} \boxed{(} \boxed{4} \boxed{\text{Ans}} \boxed{x^{\wedge}} \boxed{-} \boxed{7} \boxed{\nabla} \boxed{8} \boxed{\triangleright} \boxed{\triangleright} \boxed{)} \boxed{)}$$

Tính các giá trị x_{n+1} bằng cách bấm liên tiếp phím $\boxed{=}$. Ta được dãy các giá trị: 2,412410874; 2,410850152; 2,410850134; 2,410850134.

Sau ba lần lặp ta đã đi đến đáp số.

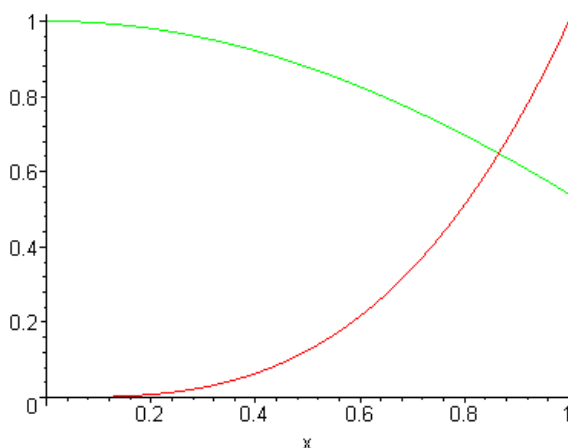
Kết luận: Để tìm được nghiệm gần đúng đến 10 chữ số thập phân theo phương pháp chia đôi cần 30 bước lặp, và thao tác phức tạp trong mỗi bước. Để tìm nghiệm gần đúng đến 10 chữ số thập phân theo phương pháp lặp chỉ cần 9 bước. Để tìm nghiệm gần đúng đến 10 chữ số thập phân theo phương pháp dây cung cần 4 bước lặp. Để tìm nghiệm gần đúng đến 10 chữ số thập phân theo phương pháp tiếp tuyến chỉ cần 3 bước lặp. Thao tác lặp theo ba phương pháp sau rất đơn giản: sau khi khai báo giá trị ban đầu và công thức lặp, ta chỉ cần liên tiếp bấm phím $\boxed{=}$ cho đến khi được giá trị không đổi (điểm bất động), là nghiệm gần đúng đến 10 chữ số thập phân.

Bài 3. Giải phương trình hỗn hợp đại số - lượng giác $x^3 - \cos x = 0$.

Đặt $y = f(x) = x^3 - \cos x$. Ta dễ dàng tính được $f(0) = -1$ và $f(1) = 0,4596976941 > 0$. Do đó, phương trình $x^3 - \cos x = 0$ có ít nhất một

nghiệm trong khoảng $(0;1)$. Nghiệm của phương trình $x^3 - \cos x = 0$ có thể được coi như là giao của hai đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \cos x$. Ta có thể nhờ *Maple* để vẽ hai đồ thị trong khoảng $(0;1)$ nhờ lệnh **plot** (vẽ đồ thị) trên cùng một hệ tọa độ:

[> **plot**([$x^3, \cos(x)$], $x=0..1$);



Nhìn vào đồ thị ta thấy, nghiệm của phương trình nằm trong khoảng $(0,8;0,9)$.

Để sử dụng *Casio fx-570 ES* tính toán với radian, trước tiên ta phải vào MODE sử dụng radian bằng cách bấm phím: **[SHIFT] [MODE] [4]**.

Phương pháp chia đôi

Khai báo hàm $y = f(x) = x^3 - \cos x$: **[ALPHA] [X] [x^3] 3 **[>] [cos] [ALPHA] [X]****

Thực hiện các thao tác hoàn toàn tương tự như trong Bài 1 và Bài 2, ta đi đến bảng kết quả dưới đây.

c_n	trong	ô	$f(c_n)$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	Khoảng
$a=0; b=1$				-1 [A]	0,45969 [B]	$(a;b)$
$c = 0,5$		[C]	-0,752582561		0,4 [B]	$(c;b)$
$c_1 = 0,75$		[A]	-0,3098138689		0,4 [B]	$(c_1;b)$
$c_2 = 0,875$		[C]	0,02892501684	-0,3 [A]		$(c_1;c_2)$
$c_3 = 0,8125$		[B]	-0,1513086091		0,02 [C]	$(c_3;c_2)$

$c_4 = 0,84375$	$\boxed{A}$	-0,06398823736		0,02 $\boxed{C}$	$(c_4; c_2)$
$c_5 = 0,859375$	$\boxed{B}$	-0.01824073474		0,02 $\boxed{C}$	$(c_5; c_2)$
$c_6 = 0,8671875$	$\boxed{A}$	0,05163610306	-0,01 $\boxed{B}$		$(c_6; c_2)$
$c_7 = 0,86328125$	$\boxed{C}$	-0,006583038793		0,05 $\boxed{A}$	$(c_7; c_6)$
$c_8 = 0,86523437$	$\boxed{B}$	-0,000720852907		0,05 $\boxed{A}$	$(c_8; c_6)$
$c_9 = 0,866210937$	$\boxed{C}$	0,002218591595	-0,0007 $\boxed{B}$		$(c_8; c_9)$
$c_{10} = 0,865722656$	$\boxed{A}$	0,000748172873	-0,0007 $\boxed{B}$		$(c_8; c_{10})$
$c_{11} = 0,865478515$	$\boxed{C}$	0,000013485903	-0,0007 $\boxed{B}$		$(c_8; c_{11})$
$c_{12} = 0,86535644$	$\boxed{A}$	-0,00035372701		0,00001 $\boxed{C}$	$(c_{12}; c_{11})$
$c_{13} = 0,86541748$	$\boxed{B}$	-0,000170132846		0,00001 $\boxed{C}$	$(c_{13}; c_{11})$
$c_{14} = 0,86544799$	$\boxed{A}$	-0,000078327132		0,00001 $\boxed{C}$	$(c_{14}; c_{11})$
$c_{15} = 0,86546325$	$\boxed{B}$	-0,000032422234		0,00001 $\boxed{C}$	$(c_{15}; c_{11})$
$c_{16} = 0,86547088$	$\boxed{A}$	-0,000009469276		0,00001 $\boxed{C}$	$(c_{16}; c_{11})$
$c_{17} = 0,8654747$	$\boxed{B}$	0,000002007338	-0,000009 $\boxed{A}$		$(c_{16}; c_{17})$
$c_{18} = 0,86547279$	$\boxed{C}$	-0,00000373098		0,000002 $\boxed{B}$	$(c_{18}; c_{17})$
$c_{19} = 0,86547374$	$\boxed{A}$	-0,000000861816		0,000002 $\boxed{B}$	$(c_{19}; c_{17})$
$c_{20} = 0,86547422$	$\boxed{C}$	0,00000057276	-0,0000008 $\boxed{A}$		$(c_{19}; c_{20})$
$c_{21} = 0,86547398$	$\boxed{B}$	-0,000000144521		0,0000005 $\boxed{C}$	$(c_{20}; c_{21})$
$c_{22} = 0,86547410$	$\boxed{A}$	0,000000214128	-0,0000001 $\boxed{B}$		$(c_{21}; c_{22})$
$c_{23} = 0,86547404$	$\boxed{C}$	0,000000034804	-0,0000001 $\boxed{B}$		$(c_{22}; c_{23})$
$c_{24} = 0,86547401$	$\boxed{A}$	-0,000000054851		0,00000003 $\boxed{C}$	$(c_{24}; c_{23})$

$c_{25} = 0,86547402$	$\boxed{B}$	$-0,000000010024$	$0,00000003 \boxed{C}$	$(c_{25}; c_{24})$
$c_{26} = 0,86547403$	$\boxed{A}$	$0,00000001239$	$-0,00000001 \boxed{B}$	$(c_{25}; c_{26})$
$c_{27} = 0,86547403$	$\boxed{C}$	$0,00000001183$	$-0,00000001 \boxed{B}$	$(c_{25}; c_{27})$
$c_{28} = 0,865474031$	$\boxed{A}$	$-0,000000004412$	$0,00000001 \boxed{C}$	$(c_{28}; c_{27})$
$c_{29} = 0,86547403$	$\boxed{B}$	$-0,000000001615$	$0,00000001 \boxed{C}$	$(c_{29}; c_{27})$
$c_{30} = 0,86547403$	$\boxed{A}$	$-0,000000000216$	$0,00000001 \boxed{C}$	$(c_{30}; c_{27})$

Nghiệm gần đúng là $\bar{x} \approx c_{30} = 0,865474033 \text{radian}$ và $f(\bar{x}) \approx -0,00000000216$

Phương pháp lặp

Phương trình $x^3 - \cos x = 0$ tương đương với $x = \sqrt[3]{\cos x} = \varphi(x)$.

Dãy lặp có dạng $x_{n+1} = \sqrt[3]{\cos x_n}$.

Trước tiên ta phải vào MODE sử dụng radian bằng cách bấm phím:

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MODE}} \boxed{4}$

Chọn giá trị ban đầu $x_0 = \frac{\pi}{4}$: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\pi} \boxed{\div} \boxed{4} \boxed{=}$

Khai báo $\varphi(x_n)$: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sqrt[3]{}} \boxed{\cos} \boxed{\text{Ans}} \boxed{)}$

Tính giá trị của $\varphi(x_0)$: Bấm phím $\boxed{=}$

Tính các giá trị tiếp theo: Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$

Ta được dãy xấp xỉ:

0.8908987181; 0.8566779192; 0.8684331147; 0.8644689718; 0.8658143009;
0.8653587072; 0.8655131056; 0.8654607937; 0.865478519; 0.8654725131;
0.8654745481; 0.8654738586; 0.8654740922; 0.8654740131; 0.8654740399;
0.8654740308; 0.8654740339; 0.8654740328; 0.8654740332; 0.8654740331.

Như vậy, sau 20 lần bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, ta đi đến nghiệm xấp xỉ $\bar{x} = 0,8654740331$.

Phương pháp dây cung

Hàm số $y = f(x) = x^3 - \cos x$ có $y' = f'(x) = 3x^2 + \sin x > 0$ và

$y'' = f''(x) = 6x + \cos x > 0$ với mọi $x \in \left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$. Theo công thức dây cung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - b)}{f(x_n) - f(b)}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \text{ ta có}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^3 - \cos x_n)(x_n - 1)}{x_n^3 - \cos x_n - f(1)}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Khai báo $x_0 = \frac{\pi}{4}$: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\pi} \boxed{\div} \boxed{4} \boxed{=}$

Khai báo công thức

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^3 - \cos x_n)(x_n - 1)}{x_n^3 - \cos x_n - f(1)}:$$

$\boxed{\text{Ans}} \boxed{-} \boxed{(} \boxed{\text{Ans}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^3} \boxed{-} \boxed{\cos} \boxed{\text{Ans}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{(} \boxed{\text{Ans}} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{(} \boxed{\text{Ans}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^3}$
 $\boxed{-} \boxed{\cos} \boxed{\text{Ans}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{A} \boxed{)}$

Tính các giá trị x_{n+1} bằng cách bấm liên tiếp phím $\boxed{=}$. Ta được dãy các giá trị:

0.8554102741; 0.8642643557; 0.8653292731; 0.865456721; 0.8654719629;
 0.86547376855; 0.8654740035; 0.8654740296; 0.8654740327; 0.8655740331;
 0.8655740331; 0.8654740331.

Sau 10 lần bấm phím $\boxed{=}$, ta đi đến nghiệm xấp xỉ $\bar{x} = 0,8654740331$.

Phương pháp tiếp tuyến

Theo công thức tiếp tuyến $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ta có $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - \cos x_n}{3x_n^2 + \sin x_n}$.

Ta chọn giá trị ban đầu $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Khai báo giá trị ban đầu: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\pi} \boxed{\div} \boxed{4} \boxed{=}$

Khai báo công thức $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - \cos x_n}{3x_n^2 + \sin x_n}$:

`Ans` `=` `(` `Ans` `SHIFT` `x3` `-` `cos` `Ans` `)` `)` `÷` `(` `3` `Ans` `x2` `+` `sin` `Ans` `)`

Tính các giá trị x_{n+1} bằng cách bấm liên tiếp phím `=`. Ta được dãy các giá trị:
 0.8724441024; 0.8655207565; 0.8654740352; 0.8654740331; 0.8654740331;
 0.8654740331; 0.8654740331.

Sau bốn lần bấm phím `=` ta đã đi đến đáp số $\bar{x} = 0,8654740331$.

Kết luận: Cả bốn phương pháp đều cho đáp số $\bar{x} = 0,8654740331$.

CHƯƠNG II

GIẢI GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ

Đ1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI GẦN ĐÚNG BÀI TOÁN CAUCHY CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

Số lượng phương trình vi phân giải được bằng cầu phương (nghiệm được biểu diễn thông qua các phép tính và các hàm cơ bản) là rất ít. Thậm chí khi có công thức nghiệm của phương trình vi phân, do sự phức tạp của công thức, chưa chắc ta đã có thể khảo sát được các tính chất của nghiệm. Vì vậy, để nghiên cứu phương trình vi phân, người ta thường không giải trực tiếp phương trình, mà sử dụng hai phương pháp: phương pháp định tính - nghiên cứu các tính chất của nghiệm (tồn tại và duy nhất, tính bị chặn, nghiệm tuần hoàn, tính ổn định,...) thông qua vế phải của phương trình và phương pháp giải gần đúng - tìm nghiệm dưới dạng xấp xỉ. Hai phương pháp này hỗ trợ và bổ sung nhau.

Để giải gần đúng phương trình vi phân, người ta thường dùng hai phương pháp: phương pháp giải tích - tìm nghiệm xấp xỉ dưới dạng một dãy các hàm số liên tục hội tụ đều tới nghiệm (là một hàm khả vi thỏa mãn phương trình vi phân và điều kiện đầu) trên một khoảng (a,b) nào đó và phương pháp số - tìm nghiệm xấp xỉ dưới dạng các giá trị số của nghiệm tại một số điểm trên đoạn $[a,b]$ và kết quả được cho dưới dạng bảng, như phương pháp đường gấp khúc Euler, phương pháp Runge-Kutta, phương pháp đa bước,...

Trong chương này, chúng tôi trình bày phương pháp đường gấp khúc Euler và phương pháp Runge-Kutta giải bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường. Nhằm minh họa cho khả năng sử dụng máy tính điện tử để giải phương trình vi phân, trợ giúp cho học tập của sinh viên khi học môn học này, chúng tôi thể

hiện phương pháp Euler và phương pháp Runge-Kutta trên máy tính điện tử khoa học Casio fx-570 ES và trên chương trình Maple.

1.1. Bài toán Cauchy của phương trình vi phân cấp một

Bài toán: Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình

$$y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.2)$$

(tức là tìm một hàm khả vi $y = y(x)$ sao cho $y(x_0) = y_0$ và $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ trong một lân cận nào đó của x_0).

Để dàng chứng minh được rằng, phương trình vi phân (1.1) tương đương với phương trình tích phân

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad (1.3)$$

theo nghĩa, mọi nghiệm của phương trình (1.1) là nghiệm liên tục của phương trình (1.3) và ngược lại (xem, thí dụ, [7], [8]).

Ta có Định lý sau đây về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân (1.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu (1.2).

Định lý 1 (Picard-Lindelof) *Giả sử:*

1. Hàm số $f(x, y)$ là liên tục theo cả hai biến trong miền đóng, giới nội D :

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$$

$$y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

(Do D là một miền đóng, giới nội nên từ giả thiết này suy ra tồn tại một số dương M sao cho $|f(x, y)| \leq M$ với mọi $(x, y) \in D$).

2. Hàm hai biến $f(x, y)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến y trong D đều theo x , tức là tồn tại một hằng số dương L sao cho

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

với mọi $(x, y_1) \in D, (x, y_2) \in D$.

Khi ấy tồn tại duy nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (1.1) trong khoảng $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, trong đó $H = \min(a, \frac{b}{M})$, thỏa mãn điều kiện ban đầu (1.2).

Chứng minh Định lý này có thể xem trong [7], [8].

Nhận xét 1. Nếu hàm $f(x, y)$ và $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ là liên tục trên hình chữ nhật D thì

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq L \text{ với mọi } (x, y) \in D. \text{ Hơn nữa, theo Định lý giá trị trung bình, với}$$

mỗi cặp (x, y_1) và (x, y_2) tồn tại điểm $(x, y^*) \in D$ sao cho

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f(x, y^*)}{\partial y} \right| |y_1 - y_2| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Chúng ta $f(x, y)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz.

Nhận xét 2. Định lý Picard-Lindelof có tính chất địa phương (tồn tại nghiệm trong một lân cận của x_0 là khoảng $[x_0 - H, x_0 + H]$).

Với một số lớp hàm $f(x, y)$, ta có thể chứng minh sự tồn tại nghiệm toàn cục của phương trình (1.1). Thí dụ, sự tồn tại nghiệm toàn cục của phương trình tuyến tính $y' + P(x)y = Q(x)$ trên toàn đoạn $[a, b]$ là hệ quả của Định lý sau.

Định lý 2 Giả sử $f(x, y)$ là hàm liên tục theo hai biến và thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

trong miền chữ nhật vô hạn $[a, b] \times (-\infty, \infty)$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của miền đó. Khi ấy bài toán giá trị ban đầu (1.1)-(1.2) có nghiệm duy nhất trên đoạn $[a, b]$.

1.2. Bài toán Cauchy của hệ phương trình vi phân cấp một

Các Định lý tồn tại nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình vi phân cấp một có thể phát biểu tương tự cho hệ n phương trình vi phân cấp một

(1.4)

Định lý 1' Cho hệ phương trình vi phân (1.4), trong đó hàm f xác định và liên tục trên tập mở $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ và thoả mãn điều kiện Lipschitz theo y đều theo x trên D :

Khi ấy với mỗi $(x_0, y_0) \in D$ tìm được một số $d > 0$ sao cho trên khoảng $(x_0 - d, x_0 + d)$ tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân (1.4) thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$.

Đ2. PHƯƠNG PHÁP EULER

Khi $f(x, y)$ là liên tục nhưng không là Lipschitz, nghiệm của bài toán Cauchy vẫn tồn tại, nhưng có thể không duy nhất.

Bài toán này có vô số nghiệm: ngoài nghiệm $y(x) \equiv 0$ còn có một họ nghiệm

55

Thí dụ 2.2. Xét bài toán Cauchy $\frac{dy}{dx} = (\sin 2x)\sqrt[3]{y}$, $y(0) = 0$.

Bài toán này có ba nghiệm $y(x) \equiv 0$; $y(x) = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \sin^3 x$.

Nhận xét rằng các hàm số $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$ và $f(x, y) = \sin 2x \cdot \sqrt[3]{y}$ không là Lipschitz theo y trong lân cận điểm $(0, 0)$.

Các thí dụ trên cho thấy, nếu hàm $f(x, y)$ không là Lipschitz thì Định lí về tồn tại duy nhất nghiệm (Định lí Picard-Lindenlof) không còn đúng. Tuy nhiên ta vẫn có Định lí tồn tại nghiệm sau đây:

Định lí 1 (Cauchy-Peano) *Giả sử $f(x, y)$ là hàm liên tục theo hai biến trong miền đóng, giới nội D :*

$$\begin{aligned} x_0 - a &\leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - b &\leq y \leq y_0 + b \end{aligned}$$

(Do D là một miền đóng, giới nội nên từ giả thiết này suy ra tồn tại một số dương M sao cho $|f(x, y)| \leq M$ với mọi $(x, y) \in D$).

Khi ấy tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (1.1) trong khoảng $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$, trong đó $H = \min(a, \frac{b}{M})$, thỏa mãn điều kiện ban đầu (1.2).

Chứng minh. Nhằm mục đích thể hiện phương pháp tính gần đúng nghiệm, dưới đây chúng tôi trình bày chứng minh Định lí Cauchy-Peano bằng phương pháp dựa trên khái niệm đường gấp khúc Euler.

Từ (x_0, y_0) kẻ hai đường thẳng với hệ số góc là M và $-M$.

Các đường thẳng này có phương trình là

$$y = y_0 + M(x - x_0)$$

và

$$y = y_0 - M(x - x_0)$$

Chúng cắt hai đường thẳng

song song $y = y_0 - b$

và $y = y_0 + b$ tại các điểm có hoành độ là

$x_0 + \frac{b}{M}$ và $x_0 - \frac{b}{M}$ (xem hình vẽ).

Gọi h là độ dài bước (**stepsize**) của biến độc lập x (h có thể dương hoặc âm, khi h dương thì nghiệm được xây dựng về bên phải của điểm x_0 và ngược lại, khi h âm thì nghiệm được xây dựng về bên trái của x_0 . Dưới đây ta coi $h > 0$, trường hợp $h < 0$ có thể chứng minh tương tự).

Ta tìm giá trị gần đúng của nghiệm tại các nút giá trị của x_i với $i = 1, 2, \dots, n$

($n = \left\lceil \frac{H}{h} \right\rceil + 1$):

$$x_1 = x_0 + h;$$

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h;$$

.....

$$x_n = x_0 + nh.$$

Độ dốc của đường tiếp tuyến trong đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại các giá trị của x được cho bởi công thức: $y'(x) = f(x, y(x))$.

Chẳng hạn, tại $x = x_0$ độ dốc của đường tiếp tuyến là

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

Khi đó, phương trình đường tiếp tuyến với đường cong $y = y(x)$ đi qua điểm (x_0, y_0) có dạng:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

hay

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0. \quad (2.1)$$

Dùng đường này để tìm giá trị xấp xỉ của nghiệm $y = y(x)$ tại $x = x_1$ (kí hiệu là y_1), ta có

$$y_1 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + y_0 = hf(x_0, y_0) + y_0.$$

Tiếp đó, dùng điểm (x_1, y_1) để tính giá trị của y tại $x = x_2$ nhờ phương trình đường tiếp tuyến

$$y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

hay

$$y = f(x_1, y_1)(x - x_1) + y_1.$$

Tiếp tục quá trình này, tại $x = x_n$ ta tính được:

$$y_{n+1} = hf(x_n, y_n) + y_n. \quad (2.2)$$

Nối các điểm (x_i, y_i) với $i = 1, \dots, n$, ta được một đường gấp khúc $y_h(x)$, được gọi là *đường gấp khúc Euler* (xem hình vẽ). Với mỗi h chọn trước, đường gấp khúc Euler cho ta một xấp xỉ của đường cong nghiệm, nó trùng với tiếp tuyến của các đường cong nghiệm (khác nhau) tại mỗi điểm (x_i, y_i) . Công thức hiển của đường gấp khúc này là

$$y_h(t_0) = x_0;$$

$$y_h(t) = y_h(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, y_h(t_{k-1}))(t - t_{k-1}), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Khi h thay đổi ta được một họ các đường gấp khúc Euler. Cho h tiến tới 0 ta được một họ các hàm số (các đường gấp khúc) giới nội đều và liên tục đồng bậc trên khoảng $x_0 \leq x \leq x_0 + H$.

Thật vậy, đồ thị của mọi đường gấp khúc đều nằm trong tam giác T giới hạn bởi các đường thẳng $y = y_0 \pm M(x - x_0)$ và $x = x_0 + H$ (xem hình vẽ) nên chúng bị chặn đều.

Do $|y_h(x'') - y_h(x')| = \left| \int_{x'}^{x''} y_h'(s) ds \right| \leq M|x'' - x'|$ với mọi h và

$x_0 \leq x', x'' \leq x_0 + H$ nên họ hàm $\{y_h(x)\}$ liên tục đồng bậc.

Theo bổ đề Arzelà, từ $\{y_h(x)\}$ có thể trích ra một dãy các hàm hội tụ đều tới một hàm liên tục $y = y(x)$ trên khoảng đó. Hàm $y = y(x)$ chính là nghiệm của phương trình vi phân (1.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu (1.2).

Định lý chứng minh xong.

Nhận xét. Phương pháp đường gấp khúc Euler nói chung không cho ta tất cả các nghiệm của phương trình (2.1)-(2.2). Thí dụ, mọi họ đường gấp khúc Euler áp dụng cho bài toán Cauchy $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}$, $y(0) = 0$ đều hội tụ tới nghiệm $y \equiv 0$, vì vậy ta không tìm được tất cả các nghiệm của phương trình này.

Dưới đây chúng ta phát biểu Định lý Cauchy-Peano cho hệ phương trình vi phân (phương trình vi phân vector).

Định lý 1'. Giả sử

1. Hàm $f : D \rightarrow R^n$ liên tục trên tập D ,

$$D = \{(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

2. M và α là những số sao cho

$$\|f(t, x)\| \leq M \quad \forall (t, x) \in D, \quad \alpha = \min(a, \frac{b}{M}).$$

Khi ấy phương trình vi phân (1.1) có ít nhất một nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu (1.2) trên đoạn $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Phương pháp Euler tuy cho xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy tương đối thô, nhưng đơn giản, dễ tính toán, và khi h càng nhỏ thì xấp xỉ nghiệm càng tốt, điều này được thể hiện rõ ràng qua các tính toán cụ thể trong các ví dụ trình bày trong Đ4. Với tốc độ của máy tính hiện nay, ta cũng có thể sử dụng phương pháp Euler trong các bài toán thực tế, đặc biệt là để minh họa phương pháp số trong giảng dạy môn phương trình vi phân.

Nhận xét rằng có nhiều cách để đi đến công thức (2.2), là cơ sở của phương pháp đường gấp khúc Euler (xem [8]).

2.1. Phương pháp Euler cải tiến

Phương pháp Euler có tốc độ hội tụ chậm, nó có thể cải tiến nhờ độ dốc trung bình trong mỗi khoảng nhằm tăng tốc độ chính xác như sau.

Trước tiên, ta sử dụng tiếp tuyến của đường cong qua điểm (x_0, y_0) :

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

để tìm giá trị xấp xỉ của nghiệm $y = y(x)$ tại $x = x_1$ (và kí hiệu là y_1^*) . Khi đó (với $h = x_1 - x_0$):

$$y_1^* = hf(x_0, y_0) + y_0.$$

Như vậy, với phương trình $y' = f(x, y)$, ta tìm được độ dốc xấp xỉ của đường tiếp tuyến tại $x = x_1$ là $y'(x_1) = f(x_1, y_1^*)$. Giá trị trung bình của hai độ dốc $f(x_0, y_0)$ và $f(x_1, y_1^*)$ của tiếp tuyến tại hai điểm (x_0, y_0) và (x_1, y_1^*) là $\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$ và phương trình của đường thẳng đi qua

(x_0, y_0) với độ dốc $\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$ là

$$y = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}(x - x_0) + y_0.$$

Khi đó, tại $x = x_1$ giá trị gần đúng của $y = y(x)$ được tính theo công thức trên là:

$$y_1 = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}(x_1 - x_0) + y_0 = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}h + y_0.$$

Tiếp tục với cách làm này, giá trị xấp xỉ trong mỗi bước của phương pháp Euler cải tiến phụ thuộc vào hai tính toán:

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= h.f(x_{n-1}, y_{n-1}) + y_{n-1} \\ y_n &= \frac{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, \hat{y}_n)}{2}h + y_{n-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Từ công thức trên ta suy ra:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h.f(x_n, y_n) + \frac{1}{2}h.f(x_{n+1}, y_n + h.f(x_n, y_n)). \quad (2.7)$$

Sử dụng công thức này, ta tìm được nghiệm xấp xỉ tốt hơn so với phương pháp Euler. Điều này sẽ được thấy rõ trong các ví dụ ở Đ4.

Đ3.PHƯƠNG PHÁP RUNGE - KUTTA

Một trong những phương pháp số giải phương trình vi phân hiệu quả, thông dụng và phổ biến nhất trong các bài toán kỹ thuật là phương pháp Runge-Kutta. Có thể suy ra các công thức trong phương pháp Runge-Kutta từ công thức xấp xỉ tích phân. Trong mục này, khác với các tài liệu [1]–[6], chúng tôi trình bày phương pháp Runge-Kutta xuất phát từ qui tắc cầu phương theo [7]. Cách làm này cho phép hiểu các phương pháp số giải phương trình vi phân một cách nhất quán hơn (xem [7]). Để làm được điều này, trước tiên chúng ta nhắc lại *qui tắc cầu phương cơ bản* (basic quadrature rules).

3.1. Quy tắc cầu phương cơ bản

Nội dung cơ bản của quy tắc cầu phương là: Để tính tích phân $\int_a^b f(t)dt$ ta thay $f(t)$ bởi một đa thức nội suy (interpolating polynomial). Tích phân của hàm $f(t)$ trên đoạn $[a, b]$ được xấp xỉ bởi tích phân của hàm đa thức (tính được chính xác).

Giả sử ta có s điểm nội suy khác nhau $c_1, c_2, \dots, c_s$ trong khoảng $[a, b]$. Đa thức nội suy Lagrange bậc nhỏ hơn s có dạng (xem [1]):

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^s f(c_j) L_j(t),$$

trong đó

$$L_j(t) = \prod_{i=1, i \neq j}^s \frac{(t - c_i)}{(c_j - c_i)}.$$

Khi ấy

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{j=1}^s \omega_j f(c_j).$$

Các trọng số ω_j được tính theo công thức

$$\omega_j = \int_a^b L_j(t)dt.$$

Nếu $s = 1$ thì đa thức nội suy $\varphi(t) \equiv f(c_1)$ và ta có:

$$\int_a^b f(t)dt \approx (b-a)f(c_1).$$

Ta nói *độ chính xác* (precision) của quy tắc cầu phương là p nếu quy tắc này chính xác cho mọi đa thức bậc nhỏ hơn p , tức là với mọi đa thức $P_k(t)$ bậc nhỏ hơn p ta có:

$$\int_a^b P_k(t)dt = \sum_{j=1}^s \omega_j f(c_j).$$

Nếu $b-a=0(h)$ thì sai số trong quy tắc cầu phương của độ chính xác p là $O(h^{p+1})$.

Ta xét một số trường hợp đặc biệt.

• Nếu chọn $s=1$ và $c_1=a$ thì ta có

công thức xấp xỉ tích phân bởi

diện tích hình chữ nhật ABCD:

$$\int_a^b f(t)dt \approx (b-a)f(a). \quad (3.1)$$

Nếu $y(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân (1.1) - (1.2) thì:

$$y(x+h) - y(x) = \int_x^{x+h} f(s, y(s))ds. \quad (3.2)$$

Kết hợp với công thức (3.1) ta đi đến công thức:

$$y(x+h) - y(x) = h.f(x, y(x)).$$

Từ đây ta lại có công thức Euler tiên đã biết trong Đ2:

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n).$$

• Nếu chọn $s=1$ và $c=b$ thì ta có công thức xấp xỉ tích phân bởi diện tích hình chữ nhật ABEF:

$$\int_a^b f(t)dt \approx (b-a)f(b).$$

Từ đây ta có:

$$y(x+h) - y(x) = h.f(x+h, y(x+h))$$

Suy ra công thức Euler lùi:

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Hai phương pháp Euler tiến và lùi là những phương pháp Runge-Kutta bậc nhất (có độ xấp xỉ bậc nhất).

- Nếu chọn $s = 2$ và $c_1 = a, c_2 = b$ thì $L_1(t) = \frac{t-b}{(a-b)}$ và $L_2(t) = \frac{t-a}{(b-a)}$.

Suy ra

$$\omega_1 = \int_a^b L_1(t)dt = \int_a^b \frac{t-b}{(a-b)} dt = \frac{1}{(a-b)} \frac{(t-b)^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b-a}{2}$$

và

$$\omega_2 = \int_a^b L_2(t)dt = \int_a^b \frac{t-a}{(b-a)} dt = \frac{1}{(b-a)} \frac{(t-a)^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b-a}{2}.$$

Chúng ta

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

Như vậy nếu xấp xỉ tích phân $\int_x^{x+h} f(t, y(t))dt$ bởi công thức trên (bởi diện tích

hình thang ABED) thì ta được:

$$\int_x^{x+h} f(t, y(t))dt \approx \frac{h}{2} [f(x+h, y(x+h)) + f(x, y(x))].$$

Từ đây ta có công thức hình thang:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})].$$

- Nếu chọn $s=1$ và $c_1 = \frac{a+b}{2}$ thì ta có công thức xấp xỉ tích phân bởi diện tích

hình chữ nhật ABMN:

$$\int_x^{x+h} f(t, y(t)) dt = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y\left(x + \frac{h}{2}\right)\right).$$

Từ đây ta có công thức tính giá trị

xấp xỉ nghiệm của phương trình vi phân:

$$y(x+h) - y(x) = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y\left(x + \frac{h}{2}\right)\right).$$

Từ công thức trên ta có

$$y_{n+1} = y_n + h \left[f\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) \right].$$

Công thức này được gọi là *phương pháp điểm giữa* (midpoint method).

Phương pháp điểm giữa và phương pháp hình thang là hai phương pháp ẩn, chúng có độ chính xác $p=2$.

- Nếu chọn $s=3$ và $c_1 = a, c_2 = \frac{a+b}{2}, c_3 = b$ thì, đặt $h = b - a$, ta có:

$$L_1(t) = \frac{\left(t - \frac{a+b}{2}\right)(t-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} = \frac{2}{h^2} \left(t - \frac{a+b}{2}\right)(t-b),$$

$$L_2(t) = \frac{(t-a)(t-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} = \frac{-4}{h^2} (t-a)(t-b),$$

$$L_3(t) = \frac{(t-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} = \frac{2}{h^2} (t-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right).$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \int_a^b L_1(t) dt = \frac{2}{h^2} \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)(t-b) dt = \frac{2}{h^2} \int_a^b \left(t-b - \frac{a-b}{2}\right)(t-b) dt \\
&= \frac{2}{h^2} \int_a^b \left[(t-b)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)(t-b)\right] dt = \frac{2}{h^2} \left[\frac{(t-b)^3}{3} - \left(\frac{a-b}{2}\right) \frac{(t-b)^2}{2} \right] \Big|_a^b \\
&= \frac{2}{h^2} \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{h}{6}.
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \int_a^b L_2(t) dt = \frac{-4}{h^2} \int_a^b (t-a)(t-b) dt = \frac{-4}{h^2} \int_a^b (t-a)(t-a+(a-b)) dt \\
&= \frac{-4}{h^2} \left[\frac{(t-a)^3}{3} + \frac{(t-a)^2}{2} (a-b) \right] \Big|_a^b = \frac{4h}{6}.
\end{aligned}$$

Do tính chất đối xứng (hoặc tính trực tiếp), ta có

$$\omega_3 = \omega_1 = \frac{h}{6}.$$

Từ các tính toán trên ta đi đến công thức Simpson:

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{h}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)].$$

Suy ra công thức xấp xỉ nghiệm của phương trình vi phân

$$y(x+h) - y(x) = \frac{h}{6} [f(x, y(x)) + 4f\left(x + \frac{h}{2}, y\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) + f(x+h, y(x+h))]$$

và công thức sai phân

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6} [f(x_n, y_n) + 4f\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) + f(x_{n+1}, y_{n+1})].$$

Đây là công thức ẩn của *phương pháp Runge-Kutta kinh điển cấp bốn* (classical fourth-order Runge-Kutta method).

2. Dẫn tới Phương pháp Runge - Kutta

Tính y_{n+1} theo công thức ẩn đòi hỏi tại mỗi bước phải giải xấp xỉ một phương trình phi tuyến, điều này không đơn giản và có khả năng làm tăng sai số, nên ta cố gắng xây dựng các công thức Runge-Kutta hiển từ công thức hình thang

ân, công thức điểm giữa ân và công thức Runge-Kutta kinh điển cấp bốn ân tương ứng như sau.

- Trong công thức hình thang ân:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

ta thay giá trị y_{n+1} ở vế phải bằng công thức Euler tiến:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Khi ấy ta được công thức:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})].$$

Công thức này được gọi là *phương pháp hình thang hiển* (explicit trapezoidal method).

- Bằng cách sử dụng xấp xỉ bậc nhất của $y(x_n + \frac{h}{2})$ theo phương pháp Euler tiến:

$$\hat{y}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)$$

và thay vào công thức của phương pháp điểm giữa ân

$$y_{n+1} = y_n + h[f(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n + \frac{h}{2}))].$$

ta nhận được *phương pháp điểm giữa hiển* (explicit midpoint method):

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_{n+\frac{1}{2}}).$$

- Từ phương pháp Runge-Kutta ân cấp bốn kinh điển

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}[f(x_n, y_n) + 4f(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n + \frac{h}{2})) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

ta có công thức Runge-Kutta hiển bậc bốn kinh điển sau:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n); \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right); \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right); \\
k_4 &= f(x_n, y_n + hk_3).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Như vậy, để tính được y_{n+1} theo công thức Runge-Kutta hiển, ta chỉ cần tính các hệ số k_i , $i = 1, 2, 3, 4$ theo giá trị của hàm số $f(x, y)$ tại các điểm trước đó. Việc này có thể dễ dàng thực hiện được trên chương trình *Maple* qua các thí dụ trong Đ4 dưới đây.

Đ4. GIẢI BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ

Do được cài đặt các ô nhớ, máy tính khoa học *Casio fx-570 ES* rất thuận tiện cho việc thực hiện các thao tác quá trình lặp. Công thức tính xấp xỉ nghiệm theo phương pháp Euler (2.2), phương pháp Euler cải tiến (2.7) và phương pháp Runge-Kutta (3.3) cho thấy, việc giải gần đúng phương trình vi phân (1.1)-(1.2) thực chất là thực hiện một quá trình lặp, vì vậy có thể dễ dàng thực hiện tính toán trên máy tính khoa học *Casio fx-570 ES* hoặc lập trình trên *Maple*.

Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày cách giải bài toán Cauchy cho một phương trình vi phân bằng phương pháp Euler, Euler cải tiến và phương pháp Runge-Kutta với các bước nội suy khác nhau trên máy tính khoa học *Casio FX-570 ES* và trên *Maple*.

Bài 1. Sử dụng phương pháp Euler, phương pháp Euler cải tiến và phương pháp Runge-Kutta với độ dài bước $h = 0,1$ và $h = 0.05$ để tìm xấp xỉ nghiệm của phương trình $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 0$ trên đoạn $[0; 1]$.

Phải tìm nghiệm của phương trình $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ với điều kiện ban đầu

$$x_0 = 0, y_0 = 0.$$

Với $h = 0,1$ ta có:

$$y_{n+1} = hf(x_n, y_n) + y_n = 0,1(x_n^2 + y_n^2) + y_n.$$

Ta có:

$$y_1 = 0,1(x_0^2 + y_0^2) + y_0 = (0,1).(0).(0) + 0 = 0.$$

Với $x_1 = x_0 + h = 0,1$:

$$y_2 = 0,1(x_1^2 + y_1^2) + y_1 = (0,1).(0,1^2 + 0^2) + 0 = 0,001.$$

Tiếp tục như trên, ta tính được các giá trị y_n theo công thức:

$$y_{n+1} = hf(x_n, y_n) + y_n = 0,1(x_n^2 + y_n^2) + y_n. \quad (4.1)$$

Thực hiện phép lặp (4.1) trên *Casio fx-570 ES*:

Khai báo công thức $y_{n+1} = 0,1(x_n^2 + y_n^2) + y_n$:

$$0.1 \left((\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{X}} \boxed{x^2} + \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{Y}} \boxed{y^2}) + \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{Y}} \right)$$

Trong qui trình này, ta đã dùng ô nhớ $\boxed{\text{X}}$ để chứa giá trị x_n và các ô nhớ $\boxed{\text{Y}}$ để chứa giá trị của y_n .

Dùng $\boxed{\text{CALC}}$ để tính giá trị của y_n : $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hỏi: X?

Khai báo $x_0 = 0$: Bấm phím $0 \boxed{=}$

Máy hỏi: Y?

Khai báo $y_0 = 0$: Bấm phím $0 \boxed{=}(0)$

Kết quả trên màn hình là 0, tức là

$$y_1 = 0,1(x_0^2 + y_0^2) + y_0 = 0,1(0^2 + 0^2) + 0 = 0.$$

Đưa kết quả $y_1 = 0$ vào ô nhớ $\boxed{\text{Y}}$: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{Y}}$

Trở về công thức (4.1): Bấm phím $\boxed{\Delta}$

Quy trình:

Tính tiếp: $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hỏi: X? Khai báo $x_1 = 0.1$: Bấm phím $0.1 \boxed{=}$

Máy hỏi: Y? Bấm phím $\boxed{=}$ ($y_1 = 0$ vì đã có sẵn trong ô nhớ $\boxed{Y}$ nên không cần khai báo lại).

Kết quả hiện trên màn hình: $\frac{1}{1000}$, tức là

$$y_2 = 0,1(x_1^2 + y_1^2) + y_1 = 0,1(0,1^2 + 0^2) + 0 = 0,1^3.$$

Đưa kết quả vào ô nhớ $\boxed{Y}$: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{Y}$

Trở về công thức ban đầu: $\boxed{\Delta}$

Lặp lại *quy trình* với thay đổi duy nhất là khi máy hỏi X? thì ta khai báo các giá trị tiếp theo: 0.2; 0.3; 0.4;...;1.0 ta sẽ được bảng giá trị như trong bảng sau.

n	x_{n-1}	y_n	n	x_{n-1}	y_n
1	0	0	6	0,5	0,05511234067
2	0,1	$\frac{1}{1000}$	7	0,6	0,09141607768
3	0,2	$5,001 \times 10^{-3}$	8	0,7	0,1412517676
4	0,3	0,0140026001	9	0,8	0,2072469738
5	0,4	0,03002220738	10	0,9	0,2925421046

Thực hiện phép lặp (4.1) trên *Maple* 7:

Trong *Maple*, để tìm các giá trị y_i theo công thức lặp ta có thể sử dụng mặc định (option) **remember** (nhớ). Mặc định này của *Maple* cho phép nhớ các giá trị cũ để tính y_n , mà không cần tính lại giá trị y_{n-1} .

Trước tiên ta khởi động chương trình *Maple* nhờ lệnh **restart**:

[> **restart**;

Khai báo hàm f :

[> **f:=(x,y)->x^2+y^2;**

$$f = (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

Khai báo bước nội suy $h = 0,1$:

[> **h:=0.1;**

$$h := .1$$

Khai báo cách tính các giá trị của $x_{n+1} = x_n + h$ (với $x_0 = 0$):

[> **x:=n->n*h;**

$x := n \rightarrow n h$

Khai báo giá trị ban đầu của y :

[> **y(0):=0;**

$y(0) := 0$

Khai báo thủ tục tính y_n theo mặc định **remember** (nhớ):

[> **y:=proc(n) option remember;**

[> **y(n-1)+h*f(x(n-1),y(n-1));**

[> **end;**

$y := \text{proc}(n) \text{ option } remember, y(n-1) + h \times f(x(n-1), y(n-1)) \text{ end proc}$

Khai báo lệnh **seq** (sắp xếp theo dãy) để sắp xếp các giá trị $y_0, y_1, \dots, y_9, y_{10}$:

[> **seq(y(i),i=0..10);**

0, 0., .001, .0050001, .01400260010, .03002220738, .05511234067, .09141607768
.1412517676, .2072469738, .2925421046

Ta thấy kết quả này hoàn toàn trùng lặp với kết quả tính trên máy tính khoa học *Casio fx-570 ES*.

Để so sánh các kết quả này với nghiệm chính xác, ta dùng lệnh **dsolve** (giải phương trình vi phân) để tìm nghiệm chính xác như sau:

Vào gói công cụ **Detools** (công cụ Phương trình vi phân):

[> **with(DEtools);**

Tìm nghiệm đúng của phương trình vi phân nhờ lệnh **dsolve** và kí hiệu nghiệm là **Sol**:

[> **Sol:=dsolve({diff(Y(X),X)=X^2+Y(X)^2,Y(0)=0},Y(X));**

$$Sol := Y(X) = - \frac{X \left(-\text{BesselJ} \left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right) + \text{BesselY} \left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right) \right)}{-\text{BesselJ} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right) + \text{BesselY} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right)}$$

Ta thấy rằng, phương trình vi phân $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ hoàn toàn không dễ giải: nghiệm

của nó được biểu diễn thông qua hàm đặc biệt Bessel. Chú ý rằng, trong lệnh tìm nghiệm chính xác, ta đã dùng những chữ cái in hoa để tránh sự trùng lặp với nghiệm xấp xỉ.

Án định công thức nghiệm nhờ lệnh **assign**:

[> **assign(Sol);**

Dùng lệnh **array** (lập mảng) để tạo bảng nhằm so sánh giá trị gần đúng (tính theo công thức Euler) và giá trị đúng của nghiệm (tính theo công thức nghiệm):

[> **array([seq([n,y(n),evalf(subs(X=n/10,Y(X))]),n=0..10]));**

0	0	0.
1	0.	.0003333349060
2	.001	.002666869814
3	.0050001	.009003473190
4	.01400260010	.02135938017
5	.03002220738	.04179114620
6	.05511234067	.07244786118
7	.09141607768	.1156598536
8	.1412517676	.1740802646
9	.2072469738	.2509066824
10	.2925421046	.3502318440

Trong bảng này, cột thứ nhất là số bước lặp, các số trong cột thứ hai tương ứng là giá trị xấp xỉ, các số trong cột thứ ba là giá trị theo công thức đúng.

Ta thấy kết quả tính toán theo công thức Euler có sai số khá lớn so với nghiệm chính xác.

Với $h = 0,05$ ta có:

$$y_{n+1} = hf(x_n, y_n) + y_n = 0,05(x_n^2 + y_n^2) + y_n.$$

Tương tự, có thể tính $y_{n+1} = 0,05(x_n^2 + y_n^2) + y_n$ trên *Casio fx-570 ES* bằng cách khai báo

$$0.05 \left(\left(\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{X} \boxed{x^2} \right) + \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{Y} \boxed{y^2} \right) + \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{Y}$$

và thao tác hoàn toàn như trên, nhưng với số bước nhiều gấp đôi (20 bước) ta được bảng kết quả dưới đây.

n	x_{n-1}	y_n	n	x_{n-1}	y_n
-----	-----------	-------	-----	-----------	-------

1	0	0	11	0,5	0.0482462821
2	0,05	$\frac{1}{8000}$	12	0,55	0.06348766728
3	0,1	$6,250007813 \times 10^{-4}$	13	0,6	0.08168920148
4	0,15	$1.750020313 \times 10^{-3}$	14	0,65	0.1031478578
5	0,2	$3.750173441 \times 10^{-3}$	15	0,7	0.1281798318
6	0,25	$6.875876631 \times 10^{-3}$	16	0,75	0.1571263353
7	0,3	0.01137824052	17	0,8	0.1903607695
8	0,35	0.01750971373	18	0,85	0.2282976306
9	0,4	0.02552504324	19	0,9	0,271403621
10	0,45	0.03568261963	20	0,95	0.3202116173

Tính toán trên *Maple*:

Khai báo về phải của phương trình (hàm f):

[> **f:=(x,y)->x^2+y^2;**

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

Khai báo bước nội suy $h=0.05$:

[> **h:=0.05;**

$$h := .05$$

Khai báo công thức tính $x_n = x_0 + h x_n$ (với $x_0 = 0$):

[> **x:=n->n*h;**

$$x := n \rightarrow n h$$

Khai báo thủ tục tính giá trị y_n theo công thức Euler:

[> **y:=proc(n) option remember;**

[> **y(n-1)+h*f(x(n-1),y(n-1));**

[> **end;**

y := proc(n) option remember, y(n-1) + h*f(x(n-1), y(n-1)) end proc

Khai báo giá trị ban đầu:

[> **y(0):=0;**

$$y(0) := 0$$

Lập dãy các giá trị của y từ 0 tới 20:

[> **seq(y(i),i=1..20);**

0., .000125, .0006250007810, .001750020313, .003750173441, .006875876631
 .01137824052, .01750971374, .02552504324, .03568261963, .04824628209
 .06348766727, .08168920147, .1031478578, .1281798318, .1571263353, .1903607696
 .2282976307, .2714036211, .3202116174

Vào gói công cụ Phương trình vi phân DEtools:

[> **with(DEtools);**

Tìm nghiệm đúng của phương trình vi phân nhờ lệnh dsolve :

[> **Sol:=dsolve({diff(Y(X),X)=X^2+Y(X)^2,Y(0)=0},Y(X));**

$$Sol := Y(X) = - \frac{X \left(-\text{BesselJ} \left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right) + \text{BesselY} \left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right) \right)}{-\text{BesselJ} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right) + \text{BesselY} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right)}$$

Ấn định công thức nghiệm:

[> **assign(Sol);**

Lập mảng để so sánh giá trị gần đúng (tính theo công thức Euler) và giá trị đúng của nghiệm (tính theo công thức nghiệm):

[> **array([seq([n,y(n),evalf(subs(X=n/20,Y(X))],n=0..20)]);**

0	0	0.
1	0.	.00004166662214
2	.000125	.0003333349060
3	.0006250007810	.001125027190
4	.001750020313	.002666869814
5	.003750173441	.005209302335
6	.006875876631	.009003473190
7	.01137824052	.01430188852
8	.01750971374	.02135938017
9	.02552504324	.03043446027
10	.03568261963	.04179114620
11	.04824628209	.05570133762
12	.06348766727	.07244786118
13	.08168920147	.09232831036
14	.1031478578	.1156598536
15	.1281798318	.1427852338
16	.1571263353	.1740802646
17	.1903607696	.2099632190
18	.2282976307	.2509066824
19	.2714036211	.2974526313
20	.3202116174	.3502318440

Kết quả trùng khớp với kết quả tính toán trên *Maple*, có sai khác một đơn vị ở chữ số thập phân thứ 10 (do làm tròn số).

Ta thấy phương pháp Euler với số bước lặp nhiều hơn (20 bước, $h = 0.05$) cho kết quả chính xác hơn.

Tính theo phương pháp Euler cải tiến trên máy tính khoa học *Casio FX-570 ES*:

Khai báo công thức

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h.f(x_n, y_n))) \\ &= y_n + 0,05(x_n^2 + y_n^2 + x_{n+1}^2 + (y_n + 0,1(x_n^2 + y_n^2))^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

với $h = 0.1$ ($\frac{1}{2}h = 0.05$):

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{Y}} \boxed{+} 0.05 \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{X}} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{Y}} \boxed{y^2} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{A}} \boxed{x^2} \boxed{+}$
 $\boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{Y}} \boxed{+} 0.1 \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{X}} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{Y}} \boxed{y^2} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{)} \boxed{\text{SHIFT}}$
 $\boxed{\text{STO}} \boxed{\text{Y}}$

(Trong công thức này ta đã sử dụng ô $\boxed{\text{X}}$ để lưu x_n , ô $\boxed{\text{Y}}$ để lưu y_n và $\boxed{\text{A}}$ cho x_{n+1}).

Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ (calculate- hãy tính) để tính giá trị của y_n .

Máy hỏi: X?

Khai báo $x_0 = 0$: Bấm phím $0 \boxed{=}$

Máy hỏi: Y?

Khai báo $y_0 = 0$: Bấm phím $0 \boxed{=}$

Máy hỏi: A?

Khai báo $x_1 = 0,1$: Bấm phím $0.1 \boxed{=}$

Kết quả trên màn hình: $\frac{1}{2000}$, tức là

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 0,05(x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + (y_0 + 0,1(x_0^2 + y_0^2))^2) \\ &= 0 + 0,05(0^2 + 0^2 + 0,1^2 + (0 + 0,1(0^2 + 0^2))^2) = 0,0005. \end{aligned}$$

Đưa kết quả $y_1 = 0,0005$ vào ô nhớ $\boxed{\text{Y}}$: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{\text{Y}}$

Trở về công thức (3.2): Bấm phím Δ

Tính tiếp: CALC

Máy hỏi: X?

Khai báo $x_1 = 0,1$: Bấm phím 0.1 [=]

Máy hỏi: Y? Bấm phím [=] (vì $y_1 = 0,0005$ đã ở trong ô nhớ [Y] nên không cần khai báo lại).

Máy hỏi: A?

Bấm phím 0.2 [=]

Lặp lại *quy trình* với thay đổi là khi máy hỏi X? (A?) thì khai báo các giá trị tiếp theo: 0.1 (0.2); 0.2 (0.3); 0.3 (0.4); 0.4 (0.5);...; 0.9 (1.0) ta sẽ được bảng giá trị dưới đây (trùng với kết quả tính trên *Maple* đến chữ số cuối cùng).

n	x_{n-1}	y_n	n	x_{n-1}	y_n
1	0	$\frac{1}{2000}$	6	0,5	0.07344210065
2	0,1	$3.000125004 \times 10^{-3}$	7	0,6	0.116816584
3	0,2	$9.503025759 \times 10^{-3}$	8	0,7	0.1753963673
4	0,3	0.02202467595	9	0,8	0.2523742135
5	0,4	0.04262140863	10	0,9	0.3518301325

Tính toán trên *Maple*:

Khởi động chương trình:

[> **restart;**

Khai báo vế phải của phương trình (hàm f):

[> **f:=(x,y)->x^2+y^2;**

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

Khai báo bước nội suy $h=0.1$:

[> **h:=0.1;**

$$h := .1$$

Khai báo công thức tính $x_n = x_0 + nh$:

```
[> x:=n->n*h;
```

$$x := n \rightarrow n h$$

Khai báo thủ tục tính giá trị y_n theo công thức Euler cải tiến:

```
[> y:=proc(n) option remember;
```

```
[> y(n-1)+h/2*(f(x(n-1),y(n-1))+ f(x(n),y(n-1)+h*f(x(n-1),y(n-1)))));
```

```
[> end;
```

```
y := proc(n)
```

```
option remember;
```

```
    y(n-1) +
```

```
    1/2*h*(f(x(n-1), y(n-1)) + f(x(n), y(n-1) + h*f(x(n-1), y(n-1))))
```

```
end proc
```

Khai báo giá trị ban đầu:

```
[> y(0):=0;
```

$$y(0) := 0$$

Lập dãy các giá trị của y từ 0 tới 10:

```
[> seq(y(i),i=0..10);
```

```
0, .00050000000000.003000125004.009503025759.02202467594.04262140863  
.07344210065.1168165840.1753963673.2523742134.3518301325
```

Vào gói công cụ Phương trình vi phân DEtools:

```
[> with(DEtools);
```

Tìm nghiệm đúng của phương trình vi phân nhờ lệnh dsolve:

```
[> Sol:=dsolve({diff(Z(X),X)=X^2+(Z(X))^2,Z(0)=0},Z(X));
```

$$Sol := Z(X) = - \frac{X \left(-\text{BesselJ}\left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2\right) + \text{BesselY}\left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2\right) \right)}{-\text{BesselJ}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2\right) + \text{BesselY}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2\right)}$$

Ấn định công thức nghiệm:

```
[> assign(Sol);
```

Lập mảng để so sánh giá trị gần đúng (tính theo công thức Euler) và giá trị đúng của phương trình (tính theo công thức nghiệm):

```
[> array([seq([n,y(n),evalf(subs(X=n/10,Z(X)))],n=0..10]);
```

0	0	0.
1	.0005000000000	.0003333349060
2	.003000125004	.002666869814
3	.009503025759	.009003473190
4	.02202467594	.02135938017
5	.04262140863	.04179114620
6	.07344210065	.07244786118
7	.1168165840	.1156598536
8	.1753963673	.1740802646
9	.2523742134	.2509066824
10	.3518301325	.3502318440

Kết quả tính toán trên *Casio fx-570 ES* hoàn toàn trùng khớp với kết quả tính toán trên *Maple*. Hơn nữa, chỉ cần với $h=0.1$, phương pháp Euler cải tiến đã cho kết quả tốt hơn phương pháp Euler với $h=0.05$.

Tương tự, ta cũng đi tính xấp xỉ nghiệm nhờ phương pháp Euler cải tiến trên *Maple* khi $h=0,05$ như sau.

Khởi động chương trình:

[> **restart;**

Khai báo vế phải của phương trình (hàm f):

[> **f:=(x,y)->x^2+y^2;**

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

Khai báo bước nội suy $h=0.05$:

[> **h:=0.05;**

$$h := .05$$

Khai báo công thức tính $x_n = x_0 + nh$:

[> **x:=n->n*h;**

$$x := n \rightarrow n h$$

Khai báo thủ tục tính giá trị y_n theo công thức Euler cải tiến:

[> **y:=proc(n) option remember;**

[> **y(n-1)+h/2*(f(x(n-1),y(n-1))+ f(x(n),y(n-1)+h*f(x(n-1),y(n-1)))));**

[> **end;**

```

y := proc(n)
option remember,
    y(n-1) +
    1/2×h×(f(x(n-1), y(n-1)) + f(x(n), y(n-1) + h×f(x(n-1), y(n-1))))
end proc

```

Khai báo giá trị ban đầu:

```

[> y(0):=0;

                                y(0) := 0

```

Lập dãy các giá trị của y từ 0 tới 20:

```

[> seq(y(i),i=0..20);
0, .00006250000000.0003750009768.001187523634.002750192592.005313445880
.009128432478.01444766188.02152597185.03062188483.04199943062
.05593052466.07269800874.09259948706.1159521276.1430986522
.1744148130.2103187590.2512828469.2978486637.3506463408

```

Vào gói công cụ Phương trình vi phân DEtools:

```

[> with(DEtools):

```

Tìm nghiệm đúng của phương trình vi phân nhờ lệnh dsolve:

```

[> Sol:=dsolve({diff(Z(X),X)=X^2+(Z(X))^2,Z(0)=0},Z(X));

```

$$Sol := Z(X) = - \frac{X \left(-\text{BesselJ}\left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2\right) + \text{BesselY}\left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2\right) \right)}{-\text{BesselJ}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2\right) + \text{BesselY}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2\right)}$$

Ấn định công thức nghiệm:

```

[> assign(Sol);

```

Lập mảng để so sánh giá trị gần đúng (tính theo công thức Euler) và giá trị đúng của phương trình (tính theo công thức nghiệm):

```

[> array([seq([n,y(n),evalf(subs(X=n/10,Z(X)))],n=0..20]);

```

0	0	0.
1	.00006250000000	.00004166662214
2	.0003750009768	.0003333349060
3	.001187523634	.001125027190
4	.002750192592	.002666869814
5	.005313445880	.005209302335
6	.009128432478	.009003473190
7	.01444766188	.01430188852
8	.02152597185	.02135938017
9	.03062188483	.03043446027
10	.04199943062	.04179114620
11	.05593052466	.05570133762
12	.07269800874	.07244786118
13	.09259948706	.09232831036
14	.1159521276	.1156598536
15	.1430986522	.1427852338
16	.1744148130	.1740802646
17	.2103187590	.2099632190
18	.2512828469	.2509066824
19	.2978486637	.2974526313
20	.3506463408	.3502318440

Kết quả tính toán trên *Casio fx-570 ES* hoàn toàn trùng khớp với kết quả tính toán trên *Maple*. Với cùng số bước lặp ($n=20, h=0.05$), phương pháp Euler cải tiến cho kết quả tốt hơn phương pháp Euler rất nhiều.

Phương pháp Runge-Kutta cấp bốn

Ta có $f(x, y) = x^2 + y^2, x_0 = 0, y_0 = 0$, áp dụng công thức (3.3)-(3.4) ta được:

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right) = \left(x_n + \frac{0.1}{2}\right)^2 + \left(y_n + \frac{0.1k_1}{2}\right)^2$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right) = \left(x_n + \frac{0.1}{2}\right)^2 + \left(y_n + \frac{0.1k_2}{2}\right)^2$$

$$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3) = x_{n+1}^2 + (y_n + 0.1k_3)^2$$

$$\text{và} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = y_n + \frac{0.1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

Khởi động chương trình:

[> **restart;**

Định nghĩa **y rk** (tính y theo Runge-Kutta):

> **y rk:='y rk';**

y rk := y rk

Khai báo vế phải của phương trình (hàm f):

[> **f:=(x,y)->x^2+y^2;**

f := (x, y) → x² + y²

Khai báo bước nội suy h=0.1:

[> **h:=0.1;**

h := .1

Khai báo công thức tính $x_n = x_0 + nh$:

[> **x:=n->n*h;**

x := n → n h

Khai báo thủ tục tính giá trị y_n theo công thức Runge-Kutta cấp bốn:

> **y rk:=proc(n)**

> **local k1,k2,k3,k4;**

> **option remember;**

> **k1:=f(x(n-1),y rk(n-1));**

> **k2:=f(x(n-1)+h/2,y rk(n-1)+h*k1/2);**

> **k3:=f(x(n-1)+h/2,y rk(n-1)+h*k2/2);**

> **k4:=f(x(n),y rk(n-1)+h*k3);**

> **y rk(n-1)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)**

> **end;**

y rk := proc(n)

local k1, k2, k3, k4;

option remember;

k1 := f(x(n-1), y rk(n-1));

k2 := f(x(n-1) + 1/2×h, y rk(n-1) + 1/2×h×k1); end proc

k3 := f(x(n-1) + 1/2×h, y rk(n-1) + 1/2×h×k2);

k4 := f(x(n), y rk(n-1) + h×k3);

y rk(n-1) + 1/6×h×(k1 + 2×k2 + 2×k3 + k4)

Khai báo giá trị ban đầu:

[> **y(0):=0;**

y(0) := 0

Lập dãy các giá trị của y từ 0 tới 10:

[> **seq(y rk(i),i=0..10);**

0, .00033333348958 .002666875369 .009003498131 .02135944733 .04179128848
 .07244812485 .1156603048 .1740810040 .2509078684 .3502337417

Vào gói công cụ Phương trình vi phân DEtools:

[> **with(DEtools):**

Tìm nghiệm đúng của phương trình vi phân nhờ lệnh dsolve:

[> **Sol:=dsolve({diff(Z(X),X)=X^2+(Z(X))^2,Z(0)=0},Z(X));**

$$Sol := Z(X) = - \frac{X \left(-\text{BesselJ}\left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2\right) + \text{BesselY}\left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2\right) \right)}{-\text{BesselJ}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2\right) + \text{BesselY}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2\right)}$$

Án định công thức nghiệm:

[> **assign(Sol);**

Lập mảng để so sánh giá trị gần đúng (tính theo công thức Runge-Kutta) và giá trị đúng của phương trình (tính theo công thức nghiệm):

[> **array([seq([n,yrk(n),evalf(subs(X=n/10,Y(X)))],n=0..10))];**

0	0	0.
1	.00033333348958	.00033333349060
2	.002666875369	.002666869814
3	.009003498131	.009003473190
4	.02135944733	.02135938017
5	.04179128848	.04179114620
6	.07244812485	.07244786118
7	.1156603048	.1156598536
8	.1740810040	.1740802646
9	.2509078684	.2509066824
10	.3502337417	.3502318440

So sánh các kết quả của phương pháp Runge-Kutta cấp 4 trong bảng trên với kết quả đã thực hiện theo phương pháp Euler và phương pháp Euler cải tiến, ta thấy rằng phương pháp này cho kết quả chính xác hơn tại mỗi điểm so với phương pháp Euler và phương pháp Euler cải tiến. Với số bước ít (n=10, h=0.1) ta đã thu được kết quả tốt hơn phương pháp Euler cải tiến với số bước gấp đôi (n=20, h=0.05).

Hoàn toàn tương tự (với thay đổi duy nhất trong chương trình là khai báo lại bước nội suy h=0.05), ta có thể tính theo phương pháp Runge-Kutta với số bước n=20 (h=0.05) như sau.

Khởi động chương trình:

[> **restart;**

Định nghĩa **yrk** (tính y theo Runge-Kutta):

[> **yrk:='yrk';**

yrk := yrk

Khai báo về phải của phương trình (hàm f):

[> **f:=(x,y)->x^2+y^2;**

f := (x, y) → x² + y²

Khai báo bước nội suy h=0.1:

[> **h:=0.05;**

h := .05

Khai báo công thức tính $x_n = x_0 + nh$:

[> **x:=n->n*h;**

x := n → n h

Khai báo thủ tục tính giá trị y_n theo công thức Runge-Kutta bậc bốn:

[> **yrk:=proc(n)**

[> **local k1,k2,k3,k4;**

[> **option remember;**

[> **k1:=f(x(n-1),yrk(n-1));**

[> **k2:=f(x(n-1)+h/2,yrk(n-1)+h*k1/2);**

[> **k3:=f(x(n-1)+h/2,yrk(n-1)+h*k2/2);**

[> **k4:=f(x(n),yrk(n-1)+h*k3);**

[> **yrk(n-1)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)**

[> **end;**

yrk := proc(n)

local k1, k2, k3, k4;

option remember;

k1 := f(x(n-1), yrk(n-1));

k2 := f(x(n-1) + 1/2×h, yrk(n-1) + 1/2×h×k1); end proc

k3 := f(x(n-1) + 1/2×h, yrk(n-1) + 1/2×h×k2);

k4 := f(x(n), yrk(n-1) + h×k3);

yrk(n-1) + 1/6×h×(k1 + 2×k2 + 2×k3 + k4)

Khai báo giá trị ban đầu:

[> **y(0):=0;**

y(0) := 0

Lập dãy các giá trị của y từ 0 tới 20:

> **seq(yrk(i),i=0..20);**

0, .00004166667887,7.0003333349637,001125027316,002666870382,005209303462
 .009003475092,01430189176,02135938501,03043446755,04179115619
 .05570135121,07244787939,09232833422,1156598841,1427852732
 .1740803146,2099632826,2509067623,2974527325,3502319724

Vào gói công cụ Phương trình vi phân DEtools:

[> **with(DEtools):**

Tìm nghiệm đúng của phương trình vi phân nhờ lệnh dsolve:

[> **Sol:=dsolve({diff(Z(X),X)=X^2+(Z(X))^2,Z(0)=0},Z(X));**

$$Sol := Z(X) = - \frac{X \left(-\text{BesselJ} \left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right) + \text{BesselY} \left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right) \right)}{-\text{BesselJ} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right) + \text{BesselY} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} X^2 \right)}$$

Ấn định công thức nghiệm:

[> **assign(Sol);**

Lập mảng để so sánh giá trị gần đúng (tính theo công thức Runge-Kutta) và giá trị đúng của phương trình (tính theo công thức nghiệm):

> **array([seq([n,yrk(n),evalf(subs(X=n/20,Y(X)))],n=0..20)]);**

0	0	0.
1	.00004166667887	.00004166662214
2	.0003333349637	.0003333349060
3	.001125027316	.001125027190
4	.002666870382	.002666869814
5	.005209303462	.005209302335
6	.009003475092	.009003473190
7	.01430189176	.01430188852
8	.02135938501	.02135938017
9	.03043446755	.03043446027
10	.04179115619	.04179114620
11	.05570135121	.05570133762
12	.07244787939	.07244786118
13	.09232833422	.09232831036
14	.1156598841	.1156598536
15	.1427852732	.1427852338
16	.1740803146	.1740802646
17	.2099632826	.2099632190
18	.2509067623	.2509066824
19	.2974527325	.2974526313
20	.3502319724	.3502318440

Các kết quả của phương pháp Runge-Kutta cấp 4 là tốt hơn rất nhiều so với kết quả đã thực hiện theo phương pháp Euler và phương pháp Euler cải tiến với cùng số bước ($n=20$, $h=0.05$) và tốt hơn phương pháp Runge-Kutta với số bước ít hơn ($n=10$, $h=0.1$).

KẾT LUẬN

Luận văn trình bày ngắn gọn các phương pháp số giải phương trình phi tuyến và phương pháp Euler, phương pháp Euler cải tiến và phương pháp Runge-Kutta giải bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân. Đặc biệt, qua một số bài toán cụ thể, luận văn trình bày chi tiết các thao tác thực hiện qui trình tính toán trên máy tính điện tử khoa học *Casio fx-570 ES* và trên chương trình *Maple* giải một số phương trình phi tuyến và phương trình vi phân thường. Các thao tác này có thể được coi là các chương trình mẫu để giải các bài toán khác (chỉ cần khai báo lại phương trình cần giải).

Tính toán theo các phương pháp khác nhau và các công cụ khác nhau cho phép chúng ta hình dung rõ hơn các kết quả lí thuyết (sự hội tụ, độ chính xác, tốc độ hội tụ,...), đồng thời cũng cho chúng ta thấy rõ hơn các điểm mạnh điểm yếu của mỗi phương pháp khi thực hiện cụ thể trên máy tính.

Chúng ta cũng nhận thấy rằng, việc thực hành tính toán giải phương trình phi tuyến và phương trình vi phân trên máy tính, thậm chí trên máy tính điện tử khoa học (giá rẻ, thao tác đơn giản), rất dễ dàng, hoàn toàn có thể thực hiện được trên các giờ bài tập hoặc thực hành trên lớp, thậm chí cho học sinh phổ thông (giải gần đúng phương trình). Điều này cho phép có thể thay đổi hoặc bổ sung chương trình dạy và học toán trong trường phổ thông và đại học hiện nay theo hướng phát huy tính tích cực của học sinh, sinh viên và gắn các kiến thức lí thuyết với thực hành tính toán trên máy cũng như gắn các kiến thức cơ bản với sự phát triển của công nghệ hiện đại. Hy vọng rằng, các chương trình mẫu trong luận văn có thể được sử dụng trong các môn Phương pháp số giải phương trình phi tuyến và phương trình vi phân.

TÀI LIỆU TRÍCH DẪN

1. Phạm Kỳ Anh: *Giải tích số*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội, 2001.
2. Nguyễn Minh Chương (Chủ biên), Nguyễn Văn Khải, Khuất Văn Ninh, Nguyễn Văn Tuấn, Nguyễn Tường: *Giải tích số*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 2001.
3. Tạ Văn Đĩnh: *Phương pháp tính*. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1999.
4. Doãn Tam Hòe: *Toán học tính toán*. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 2005.
5. Stoer, R. Bulirsch: *Introduction to numerical Analysis*, Springer, 2002, (Third Edition).
6. Tạ Duy Phượng: *Giải tích số trên máy tính điện tử*. Bản thảo Bài giảng Cao học.
7. Tạ Duy Phượng: *Phương pháp số giải phương trình vi phân thường*. Bản thảo Bài giảng Cao học.
8. Vũ Tuấn, Đoàn Văn Ngọc: *Phương trình vi phân*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1996.