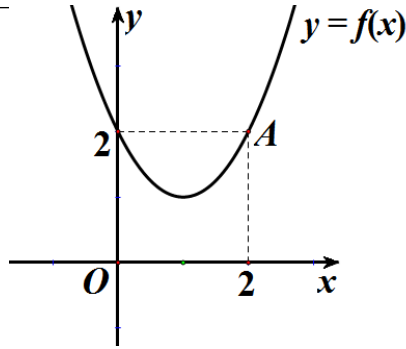


DẠNG 2**Bài toán về tiếp tuyến thường gặp**

- Câu 1:** Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 2m + 1$ có đồ thị (C_m) , biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A, B . Có bao số nguyên dương m thuộc $[-2020; 2020]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng AB ?
- A. 4041. B. 2021. C. 2019 D. 2020.
- Câu 2:** Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y = 2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là
- A. $y = 4x - 3$. B. $y = 5x - 4$. C. $y = 8x - 7$. D. $y = 6x - 5$.
- Câu 3:** Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của (C) , biết khoảng cách từ điểm $I(1; 2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.
- A. $x + y - 5 = 0$. B. $x + y - 1 = 0$ và $x + y - 5 = 0$.
C. $x + y + 1 = 0$ và $x + y + 5 = 0$. D. $x + y - 1 = 0$.
- Câu 4:** Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x - m}{x + m}$ ($m \neq 0$) có đồ thị (C_m) . Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d) . Giá trị của $a + b$ là
- A. -3 . B. 1 . C. -1 . D. 2 .
- Câu 5:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $[f(1+x)]^3 + 2 \cdot f(1+x) - 21x - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.
- A. $y = 3x + 1$. B. $y = 3x + 2$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = 3x - 1$.
- Câu 6:** Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A . Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?
- A. 6 . B. 5 . C. 7 . D. 4 .
- Câu 7:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y = 2x - 2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A . Xét hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



- A. $g'(2) = \frac{1}{2}$. B. $g'(2) = \frac{1}{4}$. C. $g'(2) = -\frac{1}{4}$. D. $g'(2) = -\frac{1}{2}$.

Câu 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , giả sử đồ thị (G) của hàm số $y = \frac{(\sqrt{3})^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B . Tính diện tích của tam giác OAB .

- A. 0,603. B. 0,414 C. 0,829. D. 1,207.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x) = x^2$ có đồ thị (P) . Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

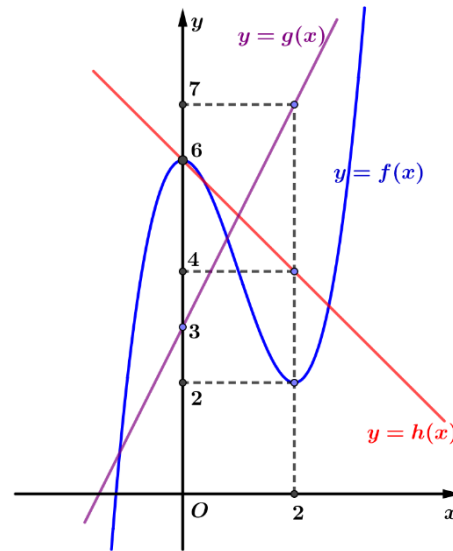
Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C) . Tính tích $k_1.k_2$.

- A. $k_1.k_2 = 2$. B. $k_1.k_2 = \frac{1}{4}$. C. $k_1.k_2 = 4$. D. $k_1.k_2 = 3$.

Câu 11: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y = ax^2 + bx - 8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C) . Gọi $k_1; k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P) . Khi (P) đi qua $M(k_1;0), N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN .

- A. $R = \frac{47}{100}$. B. $R = \frac{9}{2}$. C. $R = \frac{12}{25}$. D. $R = \frac{161}{36}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y = h(x)$ và $\Delta_2: y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C') : $y = \frac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có dạng

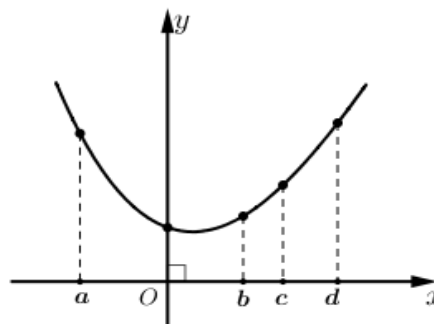
$k = \frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(15; 25)$. B. $(-20; 10)$. C. $(60; 80)$. D. $(-30; -21)$.

Câu 13: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. 0. B. 2. C. -1. D. 3.

Câu 14: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S = \{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



- A. $f'(a)$. B. $f'(b)$. C. $f'(0)$. D. $f'(d)$.

Câu 15: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2x - 1$.

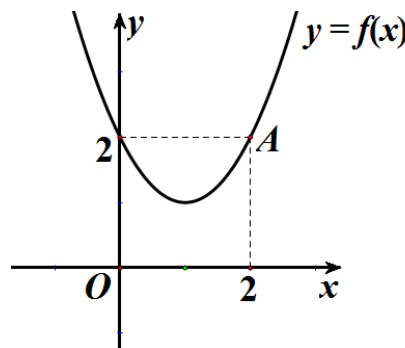
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = 4x - 3$. B. $y = 5x - 4$. C. $y = 8x - 7$. D. $y = 6x - 5$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

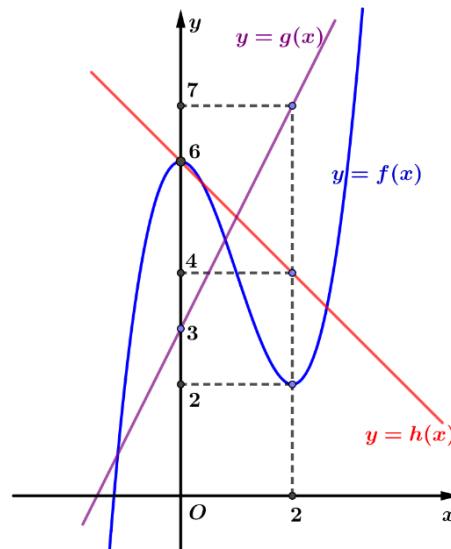
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

- Câu 17:** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018; 2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành
- A. 2019. B. 2020. C. 2017. D. 2018.
- Câu 18:** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.
- Câu 19:** Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.
- A. $M(-2; -4)$. B. $M(-1; \frac{4}{3})$. C. $M(-2; 0)$. D. $M(2; -\frac{4}{3})$.
- Câu 20:** Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 21:** Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A . Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?
- A. 6. B. 5. C. 7. D. 4.
- Câu 22:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y = 2x - 2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A . Xét hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



- A. $g'(2) = \frac{1}{2}$. B. $g'(2) = \frac{1}{4}$. C. $g'(2) = -\frac{1}{4}$. D. $g'(2) = -\frac{1}{2}$.

- Câu 23:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , giả sử đồ thị (G) của hàm số $y = \frac{(\sqrt{3})^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B . Tính diện tích của tam giác OAB .
- A. 0,603. B. 0,414 C. 0,829. D. 1,207.
- Câu 24:** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x) = x^2$ có đồ thị (P) . Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?
- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.
- Câu 25:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C) . Tính tích $k_1.k_2$.
- A. $k_1.k_2 = 2$. B. $k_1.k_2 = \frac{1}{4}$. C. $k_1.k_2 = 4$. D. $k_1.k_2 = 3$.
- Câu 26:** Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y = ax^2 + bx - 8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C) . Gọi $k_1; k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P) . Khi (P) đi qua $M(k_1;0), N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN .
- A. $R = \frac{47}{100}$. B. $R = \frac{9}{2}$. C. $R = \frac{12}{25}$. D. $R = \frac{161}{36}$.
- Câu 27:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y = h(x)$ và $\Delta_2: y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y = \frac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có dạng

$k = \frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

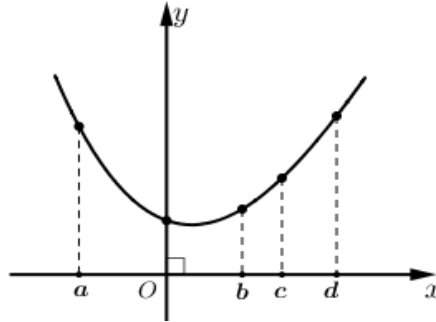
- A. $(15; 25)$. B. $(-20; 10)$. C. $(60; 80)$. D. $(-30; -21)$.

Chủ đề 07: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Câu 28: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. 0. B. 2. C. -1. D. 3.

Câu 29: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S = \{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



- A. $f'(a)$. B. $f'(b)$. C. $f'(0)$. D. $f'(d)$.

Câu 30: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = 4x - 3$. B. $y = 5x - 4$. C. $y = 8x - 7$. D. $y = 6x - 5$.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 32: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018; 2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

- A. 2019. B. 2020. C. 2017. D. 2018.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 34: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

- A. $M(-2; -4)$. B. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. C. $M(-2; 0)$. D. $M\left(2; -\frac{4}{3}\right)$.

Câu 35: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 36: Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2 + 2x + 2$ và điểm M di chuyển trên (P) . Gọi $(d_1), (d_2)$ là các đường thẳng qua M sao cho (d_1) song song với trục tung và $(d_1), (d_2)$ đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (P) tại M . Biết rằng M di chuyển trên (P) thì (d_2) luôn đi qua điểm cố định $I(a; b)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3a + 2b = 0$.

B. $a + b = 0$.

C. $an = -1$.

D. $5a + 4b = 0$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Cho điểm $M(a; b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua M , đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a; 0)$ đến (C) . Số phần tử của S là

A. 0.

B. 4.

C. 2.

D. Vô số.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a; 0)$ đến (C) . Số phần tử của S là

A. 0.

B. 4.

C. 2.

D. vô số.

Câu 40: Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có :

A. $m \in (1; 2)$.

B. $m \in (-2; -1)$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (-1; 0)$.

Câu 41: Trên đường thẳng $d: y = 2x + 1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C): y = \frac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến.

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. Vô số.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 2m + 1$ có đồ thị (C_m) , biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A, B . Có bao nhiêu nguyên dương m thuộc $[-2020; 2020]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng AB ?

- A. 4041. B. 2021. C. 2019 D. 2020.

Lời giải

Chọn C

Ta tìm tọa độ hai điểm cố định A, B .

Ta có $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 2m + 1 \Leftrightarrow m(x^2 - 3x + 2) + x^3 - x^2 + 1 - y = 0$. Tọa độ hai điểm cố định A, B là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^3 - x^2 + 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 1 \\ x = 2, y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(1;1), B(2;5).$$

Khi đó ta có: $(AB): -4x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow (AB): y = 4x - 3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C_m) tại $M(x_0; y_0)$ là $y'(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0(m-1) - 3m$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với AB nên $y'(x_0) \cdot 4 = -1$.

Suy ra: $4(3x_0^2 + 2x_0(m-1) - 3m) = -1 \Leftrightarrow 12x_0^2 + 8(m-1)x_0 - 12m + 1 = 0 \quad (*)$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì

$$\Delta' = [4(m-1)]^2 - 12(1-12m) \geq 0 \Leftrightarrow 16m^2 + 112m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -6,69 \\ m \geq -0,036 \end{cases}$$

Vì $m \in [-2020; 2020]$ và $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $1 \leq m \leq 2020$.

Vậy có 2019 giá trị m nguyên dương.

Câu 2: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y = 2x - 1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

- A. $y = 4x - 3$. B. $y = 5x - 4$. C. $y = 8x - 7$. D. $y = 6x - 5$.

Lời giải

Chọn C

Vì tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x=1$ có phương trình là $y = 2x - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 1 \end{cases}.$$

Đặt $g(x) = f(2x^2 - 1)$; $g'(x) = 4x \cdot f'(2x^2 - 1)$; $g'(1) = 4 \cdot f'(1) = 4 \cdot 2 = 8$; $g(1) = f(1) = 1$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$$\Leftrightarrow y = 8(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 8x - 7.$$

- Câu 3:** Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của (C) , biết khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.
- A. $x + y - 5 = 0$. B. $x + y - 1 = 0$ và $x + y - 5 = 0$.
 C. $x + y + 1 = 0$ và $x + y + 5 = 0$. D. $x + y - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) có dạng:

$$y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0-1} \Leftrightarrow x + (x_0-1)^2 y - 2x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0$$

$$\text{Theo đề } d(I, \Delta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|1 + 2(x_0-1)^2 - 2x_0^2 + 2x_0 - 1|}{\sqrt{1 + (x_0-1)^4}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)^4 - 2(x_0-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Với $x_0 = 2$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y = -(x-2) + 3 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$.

Với $x_0 = 0$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y = -(x-0) + 1 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$.

- Câu 4:** Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x-m}{x+m}$ ($m \neq 0$) có đồ thị (C_m) . Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d) . Giá trị của $a + b$ là
- A. -3. B. 1. C. -1. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = \frac{2m^2}{(x+m)^2}$.

Đường thẳng (d) luôn tiếp xúc với đồ thị (C_m) suy ra hệ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị $m \neq 0$.

$$\begin{cases} \frac{2m^2}{(x+m)^2} = a \\ \frac{(2m-1)x-m}{x+m} = ax+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m^2}{(x+m)} = a(x+m) \\ \frac{(2m-1)(x+m)-2m^2}{x+m} = ax+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m^2}{(x+m)} = ax+am & (1) \\ (2m-1) - \frac{2m^2}{x+m} = ax+b & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được: $-(2m-1) + \frac{4m^2}{x+m} = am-b \Leftrightarrow \frac{m}{x+m} = \frac{(a+2)m-b-1}{4m}$

Thay vào (1) ta được: $\left(\frac{(a+2)m-(b+1)}{4m}\right)^2 = \frac{a}{2} \Leftrightarrow ((a+2)m-(b+1))^2 = 8am^2$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 m^2 - 2(b+1)(a+2)m + (b+1)^2 = 0 \quad (*)$$

Chủ đề 07: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Vì đồ thị (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng (d) nên $(*)$ luôn xảy ra với mọi giá trị $m \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 = 0 \\ 2(b+1)(a+2) = 0 \\ (b+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy $a+b=1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $[f(1+x)]^3 + 2.f(1+x) - 21x - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

- A. $y = 3x + 1$. B. $y = 3x + 2$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = 3x - 1$.

Lời giải

Chọn C

- ♦ Xét phương trình: $[f(1+x)]^3 + 2.f(1+x) - 21x - 3 = 0$.
- ♦ Từ cho $x = 0$ ta có: $f^3(1) + 2.f(1) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 3$.
- ♦ Đạo hàm hai vế của ta có $3f^2(1+x)f'(1+x) + 4f'(1+2x) - 21 = 0$.
- ♦ Từ cho $x = 0$ ta được: $3f^2(1)f'(1) + 4f'(1) - 21 = 0$
 $\Leftrightarrow 3f'(1) + 4f'(1) - 21 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 3$.
- ♦ Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là:
 $y = f'(1).(x-1) + f(1) = 3.(x-1) + 1 = 3x - 2$.

Câu 6: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A . Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

Giả sử $M(a;b) \in (C)$. Khi đó $b = \frac{2a+1}{a-1}$ với $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1$.

Tiếp tuyến với (C) tại điểm M có phương trình là

$$\Delta: y = -\frac{3}{(a-1)^2} \cdot (x-a) + \frac{2a+1}{a-1}.$$

Đồ thị (C) có TCN là đường thẳng $d: y = 2$.

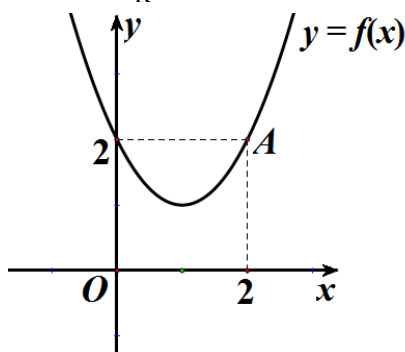
Ta có $\Delta \cap d = A(2a-1; 2)$.

Theo bài ra ta có $OA < 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (2a-1)^2 + 4 < 40$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a - 35 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

Do $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1 \Rightarrow a \in \{-2; -1; 0; 2; 3\}$. Vậy có 5 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y = 2x - 2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A . Xét hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



- A. $g'(2) = \frac{1}{2}$. B. $g'(2) = \frac{1}{4}$. C. $g'(2) = -\frac{1}{4}$. D. $g'(2) = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số thực và $a > 0$.

Vì (P) đi qua các điểm $A(2; 2), B(0; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 = 4a + 2b + c \\ 2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ c = 2 \end{cases}, (1).$$

Vì đường thẳng $\Delta: y = 2x - 2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A nên ta có $f'(2) = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 2, (2)$.

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } y = f(x) = x^2 - 2x + 2 \text{ suy ra } g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x} = x - 2 + \frac{2}{x}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} \Rightarrow g'(2) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , giả sử đồ thị (G) của hàm số $y = \frac{(\sqrt{3})^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B . Tính diện tích của tam giác OAB .

A. 0,603. B. 0,414 C. 0,829. D. 1,207.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\ln 3} = \log_3 e. \text{ Khi đó } A(0; \log_3 e).$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{(\sqrt{3})^x \ln \sqrt{3}}{\ln 3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^x.$$

Tiếp tuyến của (G) tại A có phương trình dạng:

$$y = y'(0)(x-0) + y(0) = \frac{1}{2}x + \log_3 e.$$

Tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B nên $B(-2\log_3 e; 0)$.

Diện tích tam giác OAB là:

$$S = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{2}.\log_3 e.|-2\log_3 e| \approx 0,829.$$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x) = x^2$ có đồ thị (P) . Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(a; a^2)$ thuộc đồ thị (P) . Phương trình tiếp tuyến tại A có dạng $y = g'(a)(x-a) + a^2$.

Hay $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$ (d).

Để (d) là tiếp tuyến của (C) thì (d) và (C) phải tiếp xúc với nhau.

$$\text{Ta có điều kiện tiếp xúc: } \begin{cases} x^3 - 3x = 2ax - a^2 & (1) \\ 3x^2 - 3 = 2a & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Thế (2) vào (1) ta được } x^3 - 3x = (3x^2 - 3)x - \left(\frac{3x^2 - 3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 3x^3 - 3x - \frac{9x^4 - 18x^2 + 9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 9x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 1,82 \\ x \approx 0,68 \end{cases}.$$

Vậy hai đồ thị (C) và (P) có tất cả hai tiếp tuyến chung.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi

k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C) . Tính tích $k_1.k_2$.

- A. $k_1.k_2 = 2$. B. $k_1.k_2 = \frac{1}{4}$. C. $k_1.k_2 = 4$. D. $k_1.k_2 = 3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét phương trình } \frac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0 \quad (x \neq -2) \quad (1)$$

Đặt $f(x) = 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m$. Ta có $f(-2) = -1 \neq 0$. $\Delta = m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$.

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1.x_2 = \frac{3-2m}{2} \end{cases}$$

Từ $y = \frac{x+1}{x+2}$ ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$. Do đó ta có $k_1 = \frac{1}{(x_1+2)^2}; k_2 = \frac{1}{(x_2+2)^2}$.

$$k_1.k_2 = \frac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2} = \frac{1}{[x_1.x_2 + 2(x_1+x_2) + 4]^2} =$$

$$\text{Mà } [x_1.x_2 + 2(x_1+x_2) + 4]^2 = \left(\frac{3-2m}{2} + \frac{2m-12}{2} + 4\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Vậy $k_1.k_2 = 4$. Chọn đáp án **C**.

Câu 11: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y = ax^2 + bx - 8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C) . Gọi $k_1; k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P) . Khi (P) đi qua $M(k_1;0), N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN .

A. $R = \frac{47}{100}$.

B. $R = \frac{9}{2}$.

C. $R = \frac{12}{25}$.

D. $R = \frac{161}{36}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$y = \frac{x^2-3x+4}{x-1} = x-2 + \frac{2}{x-1}$$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\text{Gọi } Q(x_0; y_0), y_0 = x_0 - 2 + \frac{2}{x_0 - 1}$$

Giả sử phương trình tiếp tuyến của (C) tại Q có dạng $y = f'(x_0).(x-x_0) + y_0$.

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;1)$ nên

$$1 = f'(x_0).(4-x_0) + y_0.$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left[1 - \frac{2}{(x_0-1)^2}\right].(4-x_0) + x_0 - 2 + \frac{2}{x_0-1}$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = (x_0^2 - 2x_0 - 1).(4-x_0) + (x_0^2 - 3x_0 + 4)(x_0-1)$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = -x_0^3 + 6x_0^2 - 7x_0 - 4 + x_0^3 - 4x_0^2 + 7x_0 - 4$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{10} \Rightarrow k_1 = \frac{2-2\sqrt{10}}{9} \\ x_0 = -1 - \sqrt{10} \Rightarrow k_2 = \frac{2+2\sqrt{10}}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}; 0\right), N\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}; 0\right)$$

Vì (P) đi qua $M\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}; 0\right), N\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}; 0\right)$ nên

$$\begin{cases} a\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)^2 + b\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right) - 8 = 0 \\ a\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)^2 + b\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right) - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = -8 \end{cases}$$

Do đó Parabol cần tìm là $y = 18x^2 - 8x - 8$.

Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{2}{9}; -\frac{80}{9}\right)$.

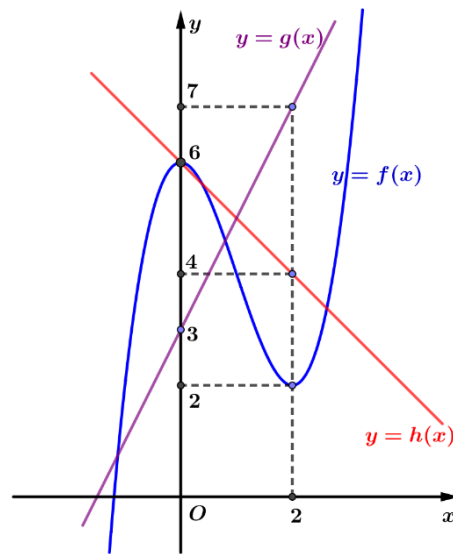
Phương trình đường thẳng $MN: y = 0$.

$$d(I, MN) = \frac{80}{9}; MN = \frac{4\sqrt{10}}{9}, MI = \frac{\sqrt{664}}{9}, NI = \frac{\sqrt{664}}{9}$$

$$S_{IMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot d(I, MN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{9} \cdot \frac{80}{9} = \frac{160\sqrt{10}}{81}$$

$$R = \frac{MN \cdot MI \cdot NI}{4S_{IMN}} = \frac{161}{36}$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y = h(x)$ và $\Delta_2: y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y = \frac{f(x) \cdot h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có dạng

$k = \frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(15; 25)$. B. $(-20; 10)$. C. $(60; 80)$. D. $(-30; -21)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } (C'): y = \frac{f(x) \cdot h(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{[f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot h(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Dựa vào đồ thị ta có $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = -x + 6$ và $\begin{cases} f(2) = 2; g(2) = 7; h(2) = 4 \\ f'(2) = 0; g'(2) = 2; h'(2) = -1 \end{cases}$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C') : $y = \frac{h(x).g(x)}{f(x)}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

$$k = y'(2) = \frac{[f'(2).h(2) + f(2).h'(2)].g(2) - f(2).h(2).g'(2)}{[g(2)]^2} = \frac{-30}{49}.$$

$$\text{Nhu vậy } k = \frac{-30}{49} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = -30 \\ b = 49 \end{cases} \Rightarrow a + b = 19.$$

Câu 13: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0.

B. 2.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

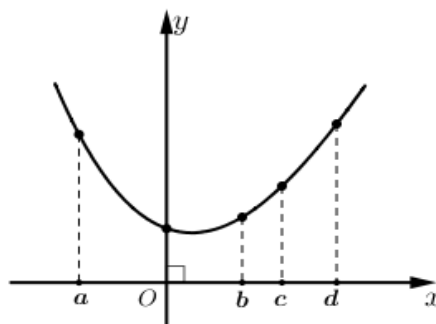
Chọn B

Để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x^3 + 1 = 3x + m \\ 3x^2 = 3 \end{cases}$ có nghiệm.

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x^3 + 1 = 3x + m \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^3 - 3x + 1 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị m là: $-1 + 3 = 2$.

Câu 14: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S = \{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$.

B. $f'(b)$.

C. $f'(0)$.

D. $f'(d)$.

Lời giải

Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi tiếp tuyến tại c, d .

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(c) = \tan \alpha \\ f'(d) = \tan \beta \Rightarrow 0 < f'(c) < f'(d). \\ \alpha < \beta \end{cases}$$

Vậy phần tử lớn nhất trong tập hợp S là: $f'(d)$.

Câu 15: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2x - 1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = 4x - 3$. B. $y = 5x - 4$. C. $y = 8x - 7$. D. $y = 6x - 5$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề, ta có $f'(1) = 2$ và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2(x - 1) + f(1) = 2x + f(1) - 2$, suy ra $f(1) = 1$.

Xét hàm số $y = f(2x^2 - 1)$. Ta có $y' = 4xf'(2x^2 - 1)$. Suy ra $y'(1) = 4f'(1) = 8$.

Từ đây ta loại ba đáp án A, B, D.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2 - y_1 = y'(x_1)(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -24.$$

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 4x = -24 \Leftrightarrow x^3 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018; 2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

- A. 2019. B. 2020. C. 2017. D. 2018.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -\frac{3}{(x-1)^2}.$$

Tiếp tuyến với đồ thị (C) qua $A(0; a)$ là $(\Delta): y = kx + a$.

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ khi và chỉ khi hệ phương trình } \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} = kx + a \\ -\frac{3}{(x-1)^2} = k \end{cases} (*) \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Từ hệ } (*) \text{ ta có } \frac{x+2}{x-1} = -\frac{3x}{(x-1)^2} + a \Leftrightarrow (a-1)x^2 - 2(2+a)x + 2+a = 0 (**).$$

Yêu cầu bài toán là tìm a để phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa

$$\frac{x_1+2}{x_1-1} \cdot \frac{x_2+2}{x_2-1} < 0.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2+a}{a-1} \\ P = x_1 x_2 = \frac{2(2+a)}{a-1} \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương } \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ \frac{P+2S+4}{P-S+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ 3a+6 > 0 \\ \frac{9a+6}{-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \\ a > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ nên $m \in \{0; 2; 3; 4; \dots; 2018\}$.

Vậy có 2018 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y - y_1 = y'(x_1) \cdot (x - x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2 - y_1 = y'(x_1)(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -24.$$

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 4x = -24 \Leftrightarrow x^3 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 19: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông

góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

A. $M(-2; -4)$.

B. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$.

C. $M(-2; 0)$.

D. $M\left(2; -\frac{4}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ có hệ số góc $-\frac{1}{3}$ cho nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3.

Gọi tọa độ của M là $M(x_0; y_0)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng $y'(x_0) = x_0^2 - 1$.

$$\text{Từ đó ta có } x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

Theo giả thiết, điểm M có hoành độ âm nên $x_0 = -2$. Vậy tọa độ $M(-2; 0)$.

Câu 20: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Đặt $t = 1-x \Rightarrow 2f(1-t) + f(t) = (1-t)^2, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2f(1-t) + f(x) = (1-x)^2, \forall t \in \mathbb{R}$ (2).

Từ và ta có:
$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x^2 \\ 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1).$$

Suy ra: $f(1) = \frac{2}{3}; f'(1) = \frac{4}{3}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$$y = \frac{4}{3}(x-1) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0; -\frac{2}{3}\right)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{1}{6}$.

Câu 21: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A . Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

Giả sử $M(a; b) \in (C)$. Khi đó $b = \frac{2a+1}{a-1}$ với $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1$.

Tiếp tuyến với (C) tại điểm M có phương trình là

$$\Delta: y = -\frac{3}{(a-1)^2} \cdot (x-a) + \frac{2a+1}{a-1}.$$

Đồ thị (C) có TCN là đường thẳng $d: y = 2$.

Ta có $\Delta \cap d = A(2a-1; 2)$.

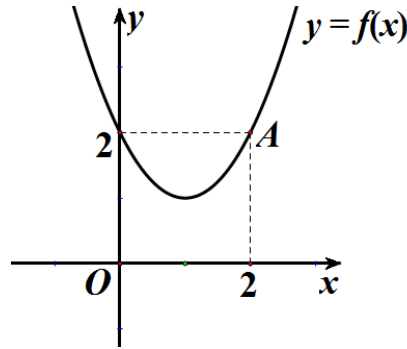
Theo bài ra ta có $OA < 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (2a-1)^2 + 4 < 40$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a - 35 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

Do $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1 \Rightarrow a \in \{-2; -1; 0; 2; 3\}$. Vậy có 5 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y = 2x - 2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A . Xét hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.

của (P) tại điểm A . Xét hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2) = \frac{1}{2}$.

B. $g'(2) = \frac{1}{4}$.

C. $g'(2) = -\frac{1}{4}$.

D. $g'(2) = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số thực và $a > 0$.

Vì (P) đi qua các điểm $A(2; 2), B(0; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 = 4a + 2b + c \\ 2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ c = 2 \end{cases}, (1).$$

Vì đường thẳng $\Delta: y = 2x - 2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A nên ta có

$$f'(2) = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 2, (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$.

Ta có $y = f(x) = x^2 - 2x + 2$ suy ra $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x} = x - 2 + \frac{2}{x}$.

Ta có $g'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} \Rightarrow g'(2) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , giả sử đồ thị (G) của hàm số $y = \frac{(\sqrt{3})^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm

A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B . Tính diện tích của tam giác OAB .

A. 0,603.

B. 0,414

C. 0,829.

D. 1,207.

Lời giải

Chọn C

Cho $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\ln 3} = \log_3 e$. Khi đó $A(0; \log_3 e)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(\sqrt{3})^x \ln \sqrt{3}}{\ln 3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^x.$$

Tiếp tuyến của (G) tại A có phương trình dạng:

$$y = y'(0)(x-0) + y(0) = \frac{1}{2}x + \log_3 e.$$

Tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B nên $B(-2\log_3 e; 0)$.

Diện tích tam giác OAB là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \log_3 e \cdot |-2\log_3 e| \approx 0,829.$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x) = x^2$ có đồ thị (P) . Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(a; a^2)$ thuộc đồ thị (P) . Phương trình tiếp tuyến tại A có dạng $y = g'(a)(x-a) + a^2$.

Hay $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$ (d).

Để (d) là tiếp tuyến của (C) thì (d) và (C) phải tiếp xúc với nhau.

$$\text{Ta có điều kiện tiếp xúc: } \begin{cases} x^3 - 3x = 2ax - a^2 & (1) \\ 3x^2 - 3 = 2a & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thế (2) vào (1) ta được } x^3 - 3x = (3x^2 - 3)x - \left(\frac{3x^2 - 3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 3x^3 - 3x - \frac{9x^4 - 18x^2 + 9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 9x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 1,82 \\ x \approx 0,68 \end{cases}.$$

Vậy hai đồ thị (C) và (P) có tất cả hai tiếp tuyến chung.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi

k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C) . Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2 = 2$.

B. $k_1.k_2 = \frac{1}{4}$.

C. $k_1.k_2 = 4$.

D. $k_1.k_2 = 3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét phương trình } \frac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0 \quad (x \neq -2) \quad (1)$$

Đặt $f(x) = 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m$. Ta có $f(-2) = -1 \neq 0$. $\Delta = m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$.

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1.x_2 = \frac{3-2m}{2} \end{cases}$$

Từ $y = \frac{x+1}{x+2}$ ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$. Do đó ta có $k_1 = \frac{1}{(x_1+2)^2}; k_2 = \frac{1}{(x_2+2)^2}$.

$$k_1.k_2 = \frac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2} = \frac{1}{[x_1.x_2 + 2(x_1+x_2) + 4]^2} =$$

$$\text{Mà } [x_1.x_2 + 2(x_1+x_2) + 4]^2 = \left(\frac{3-2m}{2} + \frac{2m-12}{2} + 4\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Vậy $k_1.k_2 = 4$. Chọn đáp án **C**.

Câu 26: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y = ax^2 + bx - 8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C) . Gọi $k_1; k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P) . Khi (P) đi qua $M(k_1;0), N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN .

A. $R = \frac{47}{100}$.

B. $R = \frac{9}{2}$.

C. $R = \frac{12}{25}$.

D. $R = \frac{161}{36}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$y = \frac{x^2-3x+4}{x-1} = x-2 + \frac{2}{x-1}$$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\text{Gọi } Q(x_0; y_0), y_0 = x_0 - 2 + \frac{2}{x_0 - 1}$$

Giả sử phương trình tiếp tuyến của (C) tại Q có dạng $y = f'(x_0).(x-x_0) + y_0$.

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;1)$ nên

$$1 = f'(x_0).(4-x_0) + y_0.$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left[1 - \frac{2}{(x_0-1)^2}\right].(4-x_0) + x_0 - 2 + \frac{2}{x_0-1}$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = (x_0^2 - 2x_0 - 1).(4-x_0) + (x_0^2 - 3x_0 + 4)(x_0-1)$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = -x_0^3 + 6x_0^2 - 7x_0 - 4 + x_0^3 - 4x_0^2 + 7x_0 - 4$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{10} \Rightarrow k_1 = \frac{2-2\sqrt{10}}{9} \\ x_0 = -1 - \sqrt{10} \Rightarrow k_2 = \frac{2+2\sqrt{10}}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}; 0\right), N\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}; 0\right)$$

Vì (P) đi qua $M\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}; 0\right), N\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}; 0\right)$ nên

$$\begin{cases} a\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)^2 + b\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right) - 8 = 0 \\ a\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)^2 + b\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right) - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = -8 \end{cases}$$

Do đó Parabol cần tìm là $y = 18x^2 - 8x - 8$.

Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{2}{9}; -\frac{80}{9}\right)$.

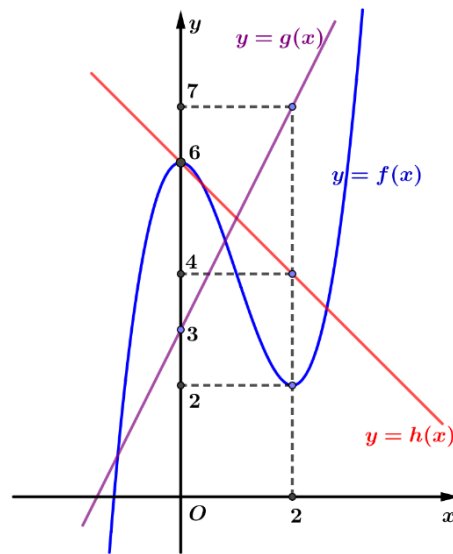
Phương trình đường thẳng $MN : y = 0$.

$$d(I, MN) = \frac{80}{9}; MN = \frac{4\sqrt{10}}{9}, MI = \frac{\sqrt{664}}{9}, NI = \frac{\sqrt{664}}{9}$$

$$S_{IMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot d(I, MN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{9} \cdot \frac{80}{9} = \frac{160\sqrt{10}}{81}$$

$$R = \frac{MN \cdot MI \cdot NI}{4S_{IMN}} = \frac{161}{36}$$

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1 : y = h(x)$ và $\Delta_2 : y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C') : y = \frac{f(x) \cdot h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có dạng

$k = \frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(15; 25)$. B. $(-20; 10)$. C. $(60; 80)$. D. $(-30; -21)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } (C') : y = \frac{f(x) \cdot h(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{[f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot h(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Dựa vào đồ thị ta có $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = -x + 6$ và $\begin{cases} f(2) = 2; g(2) = 7; h(2) = 4 \\ f'(2) = 0; g'(2) = 2; h'(2) = -1 \end{cases}$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C') : $y = \frac{h(x).g(x)}{f(x)}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

$$k = y'(2) = \frac{[f'(2).h(2) + f(2).h'(2)].g(2) - f(2).h(2).g'(2)}{[g(2)]^2} = \frac{-30}{49}.$$

$$\text{Nhu vậy } k = \frac{-30}{49} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = -30 \\ b = 49 \end{cases} \Rightarrow a + b = 19.$$

Câu 28: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0.

B. 2.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

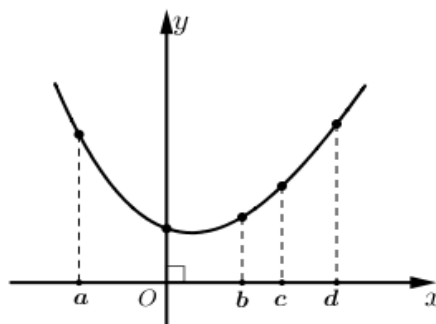
Chọn B

Để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x^3 + 1 = 3x + m \\ 3x^2 = 3 \end{cases}$ có nghiệm.

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x^3 + 1 = 3x + m \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^3 - 3x + 1 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị m là: $-1 + 3 = 2$.

Câu 29: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S = \{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$.

B. $f'(b)$.

C. $f'(0)$.

D. $f'(d)$.

Lời giải

Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi tiếp tuyến tại c, d .

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(c) = \tan \alpha \\ f'(d) = \tan \beta \Rightarrow 0 < f'(c) < f'(d) \\ \alpha < \beta \end{cases}$$

Vậy phần tử lớn nhất trong tập hợp S là: $f'(d)$.

Câu 30: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2x - 1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = 4x - 3$. B. $y = 5x - 4$. C. $y = 8x - 7$. D. $y = 6x - 5$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề, ta có $f'(1) = 2$ và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2(x - 1) + f(1) = 2x + f(1) - 2$, suy ra $f(1) = 1$.

Xét hàm số $y = f(2x^2 - 1)$. Ta có $y' = 4xf'(2x^2 - 1)$. Suy ra $y'(1) = 4f'(1) = 8$.

Từ đây ta loại ba đáp án A, B, D.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2 - y_1 = y'(x_1)(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -24.$$

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 4x = -24 \Leftrightarrow x^3 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 32: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018; 2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

- A. 2019. B. 2020. C. 2017. D. 2018.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -\frac{3}{(x-1)^2}.$$

Tiếp tuyến với đồ thị (C) qua $A(0; a)$ là $(\Delta): y = kx + a$.

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ khi và chỉ khi hệ phương trình } \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} = kx + a \\ -\frac{3}{(x-1)^2} = k \end{cases} (*) \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Từ hệ } (*) \text{ ta có } \frac{x+2}{x-1} = -\frac{3x}{(x-1)^2} + a \Leftrightarrow (a-1)x^2 - 2(2+a)x + 2+a = 0 (**).$$

Yêu cầu bài toán là tìm a để phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa

$$\frac{x_1+2}{x_1-1} \cdot \frac{x_2+2}{x_2-1} < 0.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2+a}{a-1} \\ P = x_1 x_2 = \frac{2(2+a)}{a-1} \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương } \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ \frac{P+2S+4}{P-S+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ 3a+6 > 0 \\ \frac{9a+6}{-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \\ a > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ nên $m \in \{0; 2; 3; 4; \dots; 2018\}$.

Vậy có 2018 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y - y_1 = y'(x_1) \cdot (x - x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2 - y_1 = y'(x_1)(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -24.$$

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 4x = -24 \Leftrightarrow x^3 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 34: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông

góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

A. $M(-2; -4)$.

B. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$.

C. $M(-2; 0)$.

D. $M\left(2; -\frac{4}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ có hệ số góc $-\frac{1}{3}$ cho nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3.

Gọi tọa độ của M là $M(x_0; y_0)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng $y'(x_0) = x_0^2 - 1$.

$$\text{Từ đó ta có } x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

Theo giả thiết, điểm M có hoành độ âm nên $x_0 = -2$. Vậy tọa độ $M(-2; 0)$.

Câu 35: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Đặt $t = 1-x \Rightarrow 2f(1-t) + f(t) = (1-t)^2, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2f(1-t) + f(x) = (1-x)^2, \forall t \in \mathbb{R}$ (2).

Từ và ta có:
$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x^2 \\ 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1).$$

Suy ra: $f(1) = \frac{2}{3}; f'(1) = \frac{4}{3}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$$y = \frac{4}{3}(x-1) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0; -\frac{2}{3}\right)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{6}$.

Câu 36: Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2 + 2x + 2$ và điểm M di chuyển trên (P) . Gọi $(d_1), (d_2)$ là các đường thẳng qua M sao cho (d_1) song song với trục tung và $(d_1), (d_2)$ đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (P) tại M . Biết rằng M di chuyển trên (P) thì (d_2) luôn đi qua điểm cố định $I(a; b)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3a + 2b = 0$.

B. $a + b = 0$.

C. $an = -1$.

D. $5a + 4b = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow y' = 2x + 2$.

Gọi $M(m; m^2 + 2m + 2)$, phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta: y = (2m + 2)(x - m) + m^2 + 2m + 2 = (2m + 2)x - m^2 + 2.$$

$$\text{Ta có } d_1: x = m \Rightarrow \cos(d_1; \Delta) = \frac{|2m + 2|}{\sqrt{(2m + 2)^2 + 1}}$$

$$\text{Gọi } d_2: y = kx + n \Rightarrow \cos(d_2; \Delta) = \frac{|k(2m + 2) + 1|}{\sqrt{(2m + 2)^2 + 1} \cdot \sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow |k(2m + 2) + 1| = |2m + 2| \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4m^2 + 8m + 3}{2(2m + 2)} \Rightarrow n = \frac{4m^2 + 13m + 8}{4m + 4}.$$

$$\Rightarrow d_2 : y = \frac{4m^2 + 8m + 3}{4m + 4}x + \frac{4m^2 + 13m + 8}{4m + 4}$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = \frac{5m + 5}{4m + 4} = \frac{5}{4} \Rightarrow d_2 \text{ luôn đi qua điểm } I\left(-1; \frac{5}{4}\right) \text{ cố định.}$$

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Cho điểm $M(a; b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua M , đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.**Lời giải****Chọn A**

Giả sử điểm $A\left(t; \frac{t^2 + 1}{t}\right), (t \neq 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$$\text{Ta có } f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Phương trình tiếp tuyến tại A của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2}(x - t) + \frac{t^2 + 1}{t}$$

Mà tiếp tuyến này đi qua điểm M nên ta có:

$$b = \frac{t^2 - 1}{t^2}(a - t) + \frac{t^2 + 1}{t} \Leftrightarrow (a - b)t^2 + 2t - a = 0. \quad (1)$$

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = f(x)$, đồng thời hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau nên phương trình phải có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 \neq 0$ thỏa mãn $f'(t_1) \cdot f'(t_2) = -1$

$$\text{hay } \begin{cases} a \neq b \\ a \neq 0 \\ \Delta' = 1 + a(a - b) > 0 \\ \frac{t_1^2 - 1}{t_1^2} \cdot \frac{t_2^2 - 1}{t_2^2} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Theo định lý Vi-et, ta có } \begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{2}{b - a} \\ t_1 t_2 = \frac{a}{b - a} \end{cases}$$

$$\text{nên } \frac{t_1^2 - 1}{t_1^2} \cdot \frac{t_2^2 - 1}{t_2^2} = -1 \Leftrightarrow 2t_1^2 t_2^2 - (t_1^2 + t_2^2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t_1^2 t_2^2 - (t_1 + t_2)^2 + 2t_1 t_2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b - a}\right)^2 - \left(\frac{2}{b - a}\right)^2 + 2\frac{a}{b - a} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4.$$

Do $a \neq 0$ nên từ $a^2 + b^2 = 4$ suy ra $|b| < 2$, do đó $a^2 + 1 \geq 2|a| > |ab| \geq ab$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ a \neq b \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Như vậy, tập hợp tất cả các điểm $M(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là đường tròn tâm O , bán kính

bằng 2, bỏ đi các điểm $B(0; 2)$, $C(0; -2)$, $D(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $E(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a; 0)$ đến (C) . Số phần tử của S là

A. 0. B. 4. C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(a; 0)$ và có hệ số góc là k , khi đó phương trình đường thẳng Δ là $y = k(x - a)$.

Do Δ là tiếp tuyến của (C) , xét hệ phương trình $(I): \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2 = k(x - a) & (1) \\ 4x^3 - 6x^2 + 2x = k & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1), ta có:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = (4x^3 - 6x^2 + 2x)(x - a) \Leftrightarrow x(x - 1)[3x^2 - (4a + 1)x + 2a] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ 3x^2 - (4a + 1)x + 2a = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Do } \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow k = 0, \text{ ta xét } k = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Khi $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$, ta thu được một phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = 0$.

Khi $x = \frac{1}{2}$ phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = \frac{1}{16}$, tiếp tuyến không đi qua $A(a; 0)$.

Bài toán trở thành tìm a để (3) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc $\{0; 1\}$ hoặc (3) có nghiệm kép khác $0; 1; \frac{1}{2}$.

Trường hợp 1: (3) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc $\{0;1\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = [-(4a+1)]^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2a > 0 \\ 2a = 0 \\ 3 - (4a+1) + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Phương trình (3) có nghiệm kép khác 0; 1; $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 16a^2 - 16a + 1 = 0 \\ 2a \neq 0 \\ 3 - 4(a+1) + 2a \neq 0 \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(4a+1) + 2a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ a = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy đáp án của bài toán là } S = \left\{ 0; 1; \frac{2-\sqrt{3}}{4}; \frac{2+\sqrt{3}}{4} \right\}.$$

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a; 0)$ đến (C) . Số phần tử của S là

A. 0. B. 4. C. 2. D. vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$, suy ra $y' = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.

Đường thẳng d đi qua $A(a; 0)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x - a)$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2 = k(x - a) & (1) \\ 4x^3 - 6x^2 + 2x = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + x^2 &= (4x^3 - 6x^2 + 2x)(x - a) \Leftrightarrow 3x^4 - (4a + 4)x^3 + (6a + 1)x^2 - 2ax = 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1)[3x^2 - (4a+1)x + 2a] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ g(x) = 3x^2 - (4a+1)x + 2a = 0 \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

Nhận xét: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow k = 0 \\ x = 1 \Rightarrow k = 0 \end{cases}$ và phương trình tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ $x = 0, x = 1$ đều có dạng $y = 0$.

Khi đó để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a; 0)$ đến (C) thì xảy ra 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm hoặc bằng 0 hoặc bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(0) = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 - 16a + 1 > 0 \\ 2a = 0 \\ 3 \cdot 1^2 - (4a + 1) \cdot 1 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 - 16a + 1 > 0 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Phương trình (3) có nghiệm kép không thuộc tập hợp $\{0;1\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(0) \neq 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 - 16a + 1 = 0 \\ a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ a = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}.$$

Do đó $S = \left\{0;1; \frac{2+\sqrt{3}}{4}; \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right\}.$

Vậy tập S có 4 phần tử.

Câu 40: Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm

phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có :

A. $m \in (1;2)$. **B.** $m \in (-2;-1)$. **C.** $m \in (0;1)$. **D.** $m \in (-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là :

$$f(x) = x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 = 0 \quad (x \neq 1) \quad (1).$$

$$(C_m) \text{ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 1 > 0 \\ 2m + 2m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1), theo vi et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = 2m^2 - 1 \end{cases}$

Ta có : $y' = \frac{x^2 - 2x - 2m^2 - 2m + 1}{(x-1)^2}.$

Tiếp tuyến tại hai giao điểm vuông góc với nhau $\Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 - 2x_1 - 2m^2 - 2m + 1)(x_2^2 - 2x_2 - 2m^2 - 2m + 1) + (x_1 - 1)^2(x_2 - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1)^2 - (2m^2 + 2m)((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2) + (2m^2 + 2m)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2m^2 + 2m)^2 - (2m^2 + 2m)(4m^2 - 4m^2 + 2 + 4m + 2) + (2m^2 + 2m)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(2m^2 + 2m) - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow 6m^2 + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1(l) \\ m = \frac{2}{3}(tm) \end{cases}. \text{ Vậy } m = \frac{2}{3}.$$

Câu 41: Trên đường thẳng $d: y = 2x + 1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C): y = \frac{x+3}{x-1}$

đúng một tiếp tuyến.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M \in d \Rightarrow M(a; 2a+1)$.

Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d_1 kẻ từ M với (C) .

Phương trình tiếp tuyến $d_1: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{-4}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1}$

Vì $M \in d_1$ nên $2a + 1 = \frac{-4}{(x_0 - 1)^2}(a - x_0) + \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1}$

$\Rightarrow (2a + 1)(x_0 - 1)^2 = -4(a - x_0) + (x_0 + 3)(x_0 - 1), (x_0 \neq 1)$.

$\Leftrightarrow a.x_0^2 - 2(a + 2)x_0 + 3a + 2 = 0$

Từ M kẻ đến (C) đúng 1 tiếp tuyến $\Leftrightarrow (1)$ có đúng 1 nghiệm $x_0 \neq 1$.

TH1: $a = 0$

$(1) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$. Suy ra $a = 0$ thỏa mãn.

TH2: $a \neq 0$, PT có nghiệm kép $x_0 \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (a + 2)^2 - a(3a + 2) = 0 \\ -\frac{2(a + 2)}{2a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases} \\ \frac{a + 2}{a} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

TH3: $a \neq 0$, PT có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -2a^2 + 2a + 4 > 0 \\ a.1^2 - 2(a + 2).1 + 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Kết hợp 3 trường hợp suy ra có 4 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

