MỘT SỐ BÀI TOÁN

HÌNH HỌC PHẲNG

- Bồi dưỡng học sinh chuyên toán THPT
- Ôn thi Olympic toán trong nước và quốc tế.
- Ôn thi đại học và cao đẳng.

MỤC LỤC

Chương I:

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

Bài 1

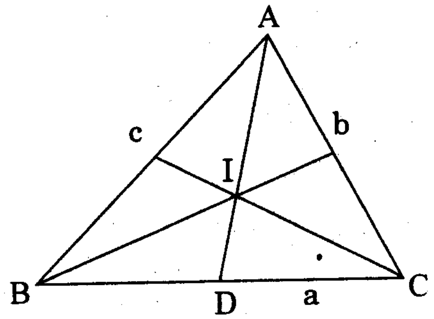
Cho ΔABC có a = BC, b = CA, c = AB. Tính:

$$\sum = a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 \quad \text{theo a, b, c}$$

(với I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC)

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

GIẢI



Ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b}$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} + 1 = \frac{c}{b} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{b+c}{b}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{ab}{b+c}$$

$$\Rightarrow DB = a - DC = \frac{ac}{b+c}$$

Hơn nữa:

$$\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD.\overrightarrow{ID} = CD.\overrightarrow{IB} + CD.\overrightarrow{BD} \\ BD.\overrightarrow{ID} = BD.\overrightarrow{IC} + BD.\overrightarrow{CD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (CD + BD)\overrightarrow{ID} = CD.\overrightarrow{IB} + BD.\overrightarrow{IC} + \left(\underbrace{CD.\overrightarrow{BD} + BD.\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}}\right)$$

$$\Rightarrow a.\overrightarrow{ID} = CD.\overrightarrow{IB} + BD.\overrightarrow{IC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ID} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{IB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{IC}$$

Vì BI là phân giác trong ΔABD nên:

$$\overrightarrow{ID} = -\frac{ID}{IA}\overrightarrow{IA} = -\frac{BD}{C}\overrightarrow{IA}$$

$$= -\frac{a}{b+c}\overrightarrow{IA}$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{b+c}\overrightarrow{IA} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{IB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{IC}$$

$$\Rightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2.IA^2 + b^2.IB^2 + c^2.IC^2 + 2ab.\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + 2bc.\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + 2ca.\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA} = 0$$

$$\Rightarrow a^2.IA^2 + b^2.IB^2 + c^2.IC^2 + ab\left(IA^2 + IB^2 - c^2\right) + bc\left(IB^2 + IC^2 - a^2\right) + ca\left(IC^2 + IA^2 - b^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2\right) - abc(a+b+c) = 0$$

$$\Rightarrow \sum = a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc$$

Chú ý: Theo kết quả trên ta có:

$$\sum = abc$$

$$\Rightarrow abc \geq \sqrt[3]{abc(IA.IB.IC)^2}$$

$$\Rightarrow (abc)^3 \geq 27(abc)(IA.IB.IC)^2$$

$$\Rightarrow abc \geq 3\sqrt{3}.IA.IB.IC$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a.IA^2 = b.IB^2 = IC^2 = \dfrac{abc}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = \dfrac{bc}{3} \\ IB^2 = \dfrac{ca}{3} \\ IC^2 = \dfrac{ab}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Đây chính là đề thi Olympic Toán Quốc tế (được giới thiệu trong cuốn sách "Tuyển tập 200 bài toán thi Vô địch Toán *(Tập 2 - Hình học) của các tác giả Đào Tam, Nguyễn Quý Dy, Lưu Xuân Tính, nhà xuất bản Giáo dục năm 2001".*

Bài 2

Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tâm I, hình tròn (O, R) bất kỳ chứa I. Các tia IA_i cắt (O, R) tại B_i (i =1,0). Tính theo R tổng sau:

$$\sum = IB_1^2 + IB_2^2 + IB_3^2 + IB_4^2 + IB_5^2 + IB_6^2$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

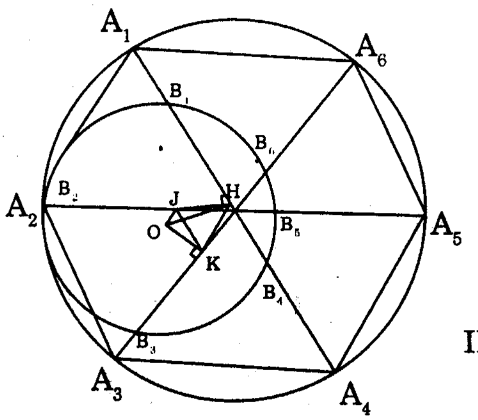
Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

<u>Bổ đề</u>: Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O_1, R_1). Khi đó mọi điểm $M \in (O_1)$, tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ không đổi.

Quả vậy:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1A}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1B}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1C}\right)^2$$

$$= 3MO_1^2 + 2\overrightarrow{MO_1}\left(\underbrace{\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C}}_{\vec{0}}\right) + O_1A^2 + O_1B^2 + O_1C^2 = 6R_1^2$$



Quay lại bài toán:

Gọi H, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O xuống B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6. Dễ thấy rằng các điểm O, I, J, H, K nằm trên đường tròn đường kính OI. Do đó thấy ngay ΔHJK đều. Khi đó:

$$IH^2 + IJ^2 + IK^2 = OH^2 + OJ^2 + OK^2$$

(*Do bổ đề trên*)

Mặt khác:

$$IB_1^2 + IB_4^2 = \left(\overrightarrow{HB_1} - \overrightarrow{HI}\right)^2 + \left(\overrightarrow{HB_4} - \overrightarrow{HI}\right)^2$$

$$= HB_1^2 + HB_4^2 - 2\overrightarrow{HI}\left(\underbrace{\overrightarrow{HB_1} + \overrightarrow{HB_4}}_{\vec{0}}\right) + 2HI^2$$

$$= OB_1^2 - OH^2 + OB_4^2 - OH^2 + 2IH^2$$

$$= 2R^2 - 2OH^2 + 2IH^2$$

Chứng minh tương tự:

$$IB_2^2 + IB_5^2 = 2R^2 - 2OJ^2 + 2IJ^2$$

$$IB_3^2 + IB_6^2 = 2R^2 - 2OK^2 + 2IK^2$$

$$\Rightarrow \sum = 6R^2 - 2\left(OH^2 + OJ^2 + OK^2\right) + 2\left(IJ^2 + IK^2 + IH^2\right)$$

$$= 6R^2$$

Vậy: $\sum = 6R^2$

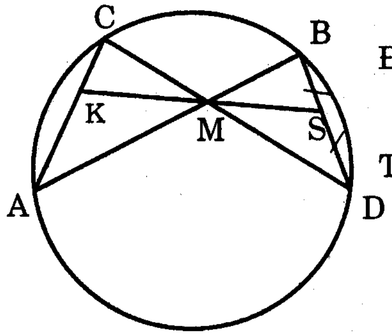
Bài 3

Cho đường tròn (O) với hai dây AB và CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ SM cắt AC tại K. Chứng minh rằng:

$$\frac{AM^2}{CM^2} = \frac{AK}{CK}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Đặt: $\frac{AK}{CK} = x$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CK} \\ \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} AK.\overrightarrow{MK} = AK.\overrightarrow{MC} + AK.\overrightarrow{CK} \\ CK.\overrightarrow{MK} = CK.\overrightarrow{MA} + CK.\overrightarrow{AK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC.\overrightarrow{MK} = AK.\overrightarrow{MC} + CK.\overrightarrow{MA} + \left(\underbrace{AK.\overrightarrow{CK} + CK.\overrightarrow{AK}}_{\vec{0}}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MK} = \frac{AK}{AC}\overrightarrow{MC} + \frac{CK}{AC}\overrightarrow{MA}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{CK}{AK}}\overrightarrow{MC} + \frac{1}{1 + \frac{AK}{CK}}\overrightarrow{MA}$$

$$= \frac{x}{1+x}\overrightarrow{MC} + \frac{1}{1+x}\overrightarrow{MA} \quad (1)$$

Do: $\overrightarrow{MK} \parallel \overrightarrow{MS}$ nên $\overrightarrow{MK} = l\overrightarrow{MS} (l \in \mathbb{R}) = \frac{l}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right)$

Hơn nữa: $MA.MB = MC.MD = a$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB} = -\frac{a}{MA^2}\overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{MD} = -\frac{a}{MC^2}\overrightarrow{MC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MK} = -\frac{al}{2MA^2}\overrightarrow{MA} - \frac{al}{2MC^2}\overrightarrow{MC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

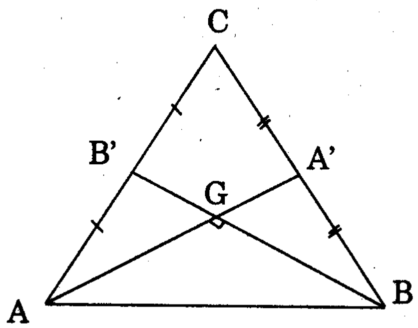
$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x} = -\dfrac{al}{2MA^2} \\ \dfrac{x}{1+x} = -\dfrac{al}{2MC^2} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{MA^2}{MC^2} \Rightarrow \text{(Đpcm)}$$

Bài 4

Cho hai trung tuyến AA' và BB' của ΔABC vuông góc nhau. Chứng minh rằng: cotgC = 2(cotgA + cotgB)

(Bộ đề Tuyển sinh)

GIẢI



Ta có: $\begin{cases} 2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \\ 2\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \end{cases}$

Khi đó: $AA' \perp BB'$

$\Leftrightarrow AA'.BB' = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} - AB^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} - 2AB^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 + a^2 - b^2 - c^2 + b^2 - c^2 - a^2 - 2c^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$

$\Leftrightarrow 2ab.\cos C = 4c^2$

$\Leftrightarrow \sin A.\sin B.\cos C = 2\sin(A+B).\sin C$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sin(A+B)}{\sin A.\sin B} = \text{cotg}C$

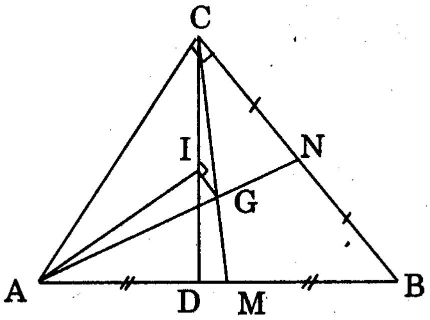
$\Leftrightarrow 2(\text{cotg}A + \text{cotg}B) = \text{cotg}C$

Bài 5

Cho ΔABC có $IG \perp IC$ (với I là tâm đường tròn nội tiếp và G là trọng tâm ΔABC). Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{với } BC = a,\ CA = b,\ AB = c)$$

(Đại học Cảnh sát Nhân dân)



GIẢI:

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) \\ a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{cases}$

(Đã chứng minh ở bài 1)

$$\Rightarrow a\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA}\right) + b\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}\right) + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{1}{a+b+c}\left(a.\overrightarrow{CA} + b.\overrightarrow{CB}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CG}$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\left(a.\overrightarrow{CA} + b.\overrightarrow{CB}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CB}$$

Khi đó: $GI \perp CI \Leftrightarrow \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{CI} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[(2a-b-c)\overrightarrow{CA} + (2b-a-c)\overrightarrow{CB}\right]\left(a.\overrightarrow{CA} + b.\overrightarrow{CB}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(2a-b-c)b^2 + b(2a-b-c)\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$$
$$+ a(2b-a-c)\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + b(2b-a-c)a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ ab\left[b(2a-b-c)+a(2b-a-c)\right]$$
$$+\left[b(2a-b-c)+a(2b-a-c)\right]\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(ab+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}\right)\left[b(2a-b-c)+a(2b-a-c)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow b(2a-b-c)+a(2b-a-c)=0$$

$$(\text{\textit{vì}}\ ab+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=ab+ab\cos C=ab(1+\cos C)>0)$$

$$\Leftrightarrow b(3a-a-b-c)+a(3b-a-b-c)=0$$

$$\Leftrightarrow 6ab=(a+b)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3}=\frac{2ab}{a+b}$$

Bài 6

Cho ΔABC, gọi O, I lần lượt là các tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC. R, r lần lượt là độ dài các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC. Chứng minh rằng:

$OI^2 = R^2 - 2Rr$ *(Công thức Euler)*

GIẢI:

Theo bài 1, ta có:

$$a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow a\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}\right)+b\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}\right)+c\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}\right)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow OI^2=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)R^2+ab\left(2R^2-c^2\right)+bc\left(2R^2-a^2\right)+ca\left(2R^2-b^2\right)}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2R^2-abc(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$$

$$= R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$$

$$= R^2 - 2Rr \qquad (\textit{vì } S = pr = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 2Rr = \frac{abc}{2p})$$

Vậy: $OI^2 = R^2 - 2Rr$

Chú ý: Theo bài 6, ta có: $R^2 - 2Rr = OI^2 \geq 0$

$$\Rightarrow R^2 \geq 2Rr$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$$

(Đây là kết quả quen thuộc trong bộ đề tuyển sinh đại học và nhiều tài liệu tham khảo khác).

Bài 7

Cho ΔABC có độ dài các trung tuyến và bán kính đường tròn ngoại tiếp lần lượt là m_a, m_b, m_c và R.

Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$$

(Đại học Y – Dược TPHCM)

GIẢI:

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$$

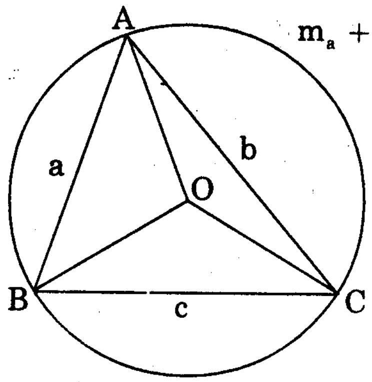
$$\Leftrightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2\left(3 - 2\sin^2 A - 2\sin^2 B - 2\sin^2 C\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

Do đó, theo bất đẳng thức Bunhiacopski:



$$m_a + m_b + m_c \le \sqrt{3\left(m_a^2 + +m_b^2 + m_c^2\right)}$$

$$\le \sqrt{3.\frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$$

$$\le \sqrt{9R^2\left(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C\right)}$$

$$\le \sqrt{9R^2.\frac{9}{4}} = \frac{9}{2}R$$

Vậy: $m_a + m_b + m_c \le \dfrac{9R}{2}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Chú ý: Trong mọi ΔABC, ta có kết quả "chặt hơn"

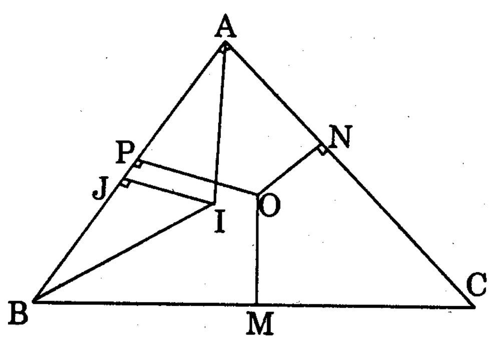
$$m_a + m_b + m_c \le 4R + r$$

(*với r là bán kính đường tròn nội tiếp* ΔABC)

Chứng minh:

Xét hai trường hợp:

* *Trường hợp 1:* ΔABC nhọn



Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC.

Áp dụng định lý Ptoleme vào trong các tứ giác APON, BMOP, CNOM (với M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB).

Ta có: $\begin{cases} AP.ON + AN.OP = AO.PN \\ BM.OP + BP.OM = BO.MP \\ CN.OM + CM.ON = CO.MN \end{cases}$

$$\begin{cases} c.ON + b.OP = a.R & (1) \\ a.OP + c.OM = b.R & (2) \\ b.OM + a.ON = c.R & (3) \end{cases}$$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} + S_{\Delta OAB}$

$$\Leftrightarrow\ a.OM + b.ON + c.OP = (a+b+c)r \quad (4)$$

Cộng (1), (2), (3), và (4) vế với vế. Ta được:

$$(a+b+c)(OM+ON+OP) = (a+b+c)(R+r)$$

$$\Rightarrow\ OM + ON + OP = R + r \quad (5)$$

Hơn nữa: $\begin{cases} m_a = AM \le AO + OM = R + OM \\ m_b = BN \le R + ON \\ m_c = CN \le R + OP \end{cases}$

$$\Rightarrow\ m_a + m_b + m_c \le 3R + OM + ON + OP \quad (6)$$

Từ (5) và (6) $\Rightarrow\ m_a + m_b + m_c \le 4R + r$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ O $\equiv$ G (*với G là trọng tâm* ΔABC)

$\Leftrightarrow$ ΔABC đều

* *<u>Trường hợp 2</u>*: ΔABC không nhọn (*ở đây xem* $A \ge 90^0$)

Ta có: $\begin{cases} m_a = AM \le \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2} \\ m_b = BN < BP + PN = \dfrac{c}{2} + \dfrac{a}{2} \\ m_c = CP < CN + NP = \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow\ m_a + m_b + m_c < 2a + \frac{1}{2}(b+c-a) \quad (7)$$

Mà: • $a \leq 2R$ (8)

• Kẻ $IJ \perp AB$ tại I

Xét ΔAIJ, có $\widehat{JAI} \geq 45^\circ \geq \widehat{JIA} \Rightarrow IJ \geq AJ$

$$\Rightarrow r \geq p - a \quad \left(\text{với } p = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(b + c + -a) \leq r \quad (9)$$

Từ (7), (8) và (9) $\Rightarrow$ $m_a + m_b + m_c < 4R + r$

Tóm lại, trong mọi ΔABC, ta luôn có:

$$m_a + m_b + m_c \leq 4R + r$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

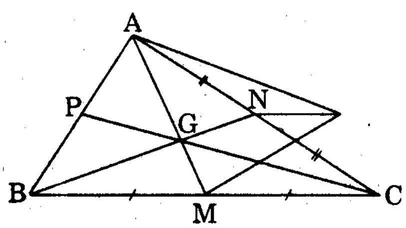
Bài 8

Cho ΔABC, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác với ba cạnh là ba trung tuyến của ΔABC. Chứng minh rằng:

$$R' \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(a+b+c)} \quad (1)$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI:



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Dựng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BN}$

Gọi m_a', m_b', m_c' lần lượt là ba trung tuyến xuất phát từ Q, A, M của ΔAMQ.

Ta có: $\begin{cases} m'_a = \dfrac{3}{4}a \\ m'_b = \dfrac{3}{4}b \\ m'_c = \dfrac{3}{4}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4m'_a}{3} \\ b = \dfrac{4m'_b}{3} \\ c = \dfrac{4m'_c}{3} \end{cases}$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow R' \geq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{m'^2_a + m'^2_b + m'^2_c}{m'_a + m'_b + m'_c}\right)$ (2)

Thực chất của BĐT (2) là chứng minh rằng với mọi ΔABC và trọng tâm ΔABC, ta có:

$$R(m_a + m_b + m_c) \geq \frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

Gọi O, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm ΔABC, ta có:

$$\begin{aligned} Rm_a &= OA.\frac{3}{2}GA \\ &\geq \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA} \\ &\geq \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}\right)\overrightarrow{GA} \\ &\geq \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GA} + GA^2\right) \\ &\geq \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}m_a^2 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$Rm_b \geq \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GB} + \frac{2}{3}m_b^2$$

$$Rm_c \geq \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GC} + \frac{2}{3}m_c^2$$

$$\Rightarrow R(m_a + m_b + m_c) \geq \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}\left(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\right) + \frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

$$\Rightarrow R(m_a + m_b + m_c) \geq \frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ (Đpcm)

Bài 9

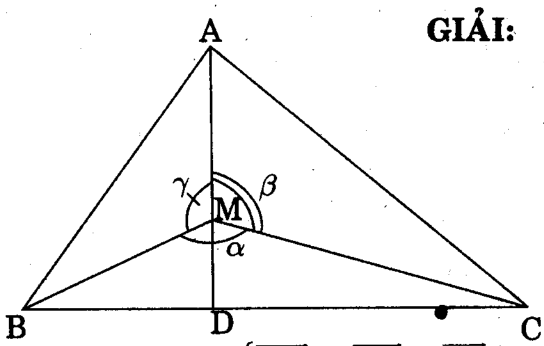
Cho M nằm trong ΔABC. Đặt $\alpha = \widehat{BMC}$, $\beta = \widehat{CMA}$, $\gamma = \widehat{AMB}$

Chứng minh rằng:

$$NA.\sin\alpha + NB.\sin\beta + NC.\sin\gamma \geq MA.\sin\alpha + MB.\sin\beta + MC.\sin\gamma \quad \forall N \in mp(ABC)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI:



Đặt: $\begin{cases} S_A = S_{\Delta BMC} \\ S_B = S_{\Delta CMA} \\ S_C = S_{\Delta AMB} \end{cases}$

- Gọi $\{D\} = AM \cap BC$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD.\overrightarrow{MD} = CD.\overrightarrow{MB} + CD.\overrightarrow{BD} \\ BD.\overrightarrow{MD} = BD.\overrightarrow{MC} + BD.\overrightarrow{CD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (DC + DB)\overrightarrow{MD} = \left(\underbrace{CD.\overrightarrow{BD} + BD.\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}}\right) + CD.\overrightarrow{MB} + BD.\overrightarrow{MC}$$

$$\Rightarrow BC.\overrightarrow{MD} = CD.\overrightarrow{MB} + BD.\overrightarrow{MC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} = \frac{CD}{BC}\overrightarrow{MB} + \frac{BD}{BC}\overrightarrow{MC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} = \frac{1}{1 + \frac{DB}{DC}}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{1 + \frac{DC}{DB}}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{1 + \frac{S_C}{S_B}}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{1 + \frac{S_B}{S_C}}\overrightarrow{MC}$$

$$= \frac{S_B}{S_B + S_c}\overrightarrow{MB} + \frac{S_C}{S_B + S_C}\overrightarrow{MC} \quad (1)$$

Hơn nữa:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AD}{MD} - 1 = \frac{S}{S_A} - 1 = \frac{S_B + S_C}{S_A}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} = -\frac{S_A}{S_B + S_C}\overrightarrow{MA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S_A.\overrightarrow{MA} + S_B.\overrightarrow{MB} + S_C.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Khi đó:

$$NA.\sin\alpha + NB.\sin\beta + NC.\sin\gamma$$

$$= \frac{NA.MA}{MA}\sin\alpha + \frac{NB.MB}{MB}\sin\beta + \frac{NC.MC}{MC}\sin\gamma$$

$$\geq \frac{\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MA}}{MA}\sin\alpha + \frac{\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{MB}}{MB}\sin\beta + \frac{\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{MC}}{MC}\sin\gamma$$

$$\geq \frac{\left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}\right)}{MA}\overrightarrow{MA}.\sin\alpha + \frac{\left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB}\right)}{MB}\overrightarrow{MB}.\sin\beta$$

$$+ \frac{\left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MC}\right)}{MC}\overrightarrow{MC}.\sin\gamma$$

$$\geq \overrightarrow{NM}\left(\frac{\overrightarrow{MA}.\sin\alpha}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}.\sin\beta}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}.\sin\gamma}{MC}\right)$$

$$+ \left(MA.\sin\alpha + MB.\sin\beta + MC.\sin\gamma\right)$$

$$\geq \frac{2\overrightarrow{NM}}{MA.MB.MC}\left(\underbrace{\overrightarrow{MA}.S_A + \overrightarrow{MB}.S_B + \overrightarrow{MC}.S_C}_{\vec{0}}\right)$$

$$+ \left(MA.\sin\alpha + MB.\sin\beta + MC.\sin\gamma\right)$$

Vậy: $NA.\sin\alpha + NB.\sin\beta + NC.\sin\gamma \geq MA.\sin\alpha + MB.\sin\beta + MC.\sin\gamma$

Dấu "=" $\Leftrightarrow M \equiv N$

Bài 10

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 \geq \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma}\right)$$

$$\forall \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ M \in mp(ABC) \end{cases}$$

GIẢI:

Dựng điểm $I \in mp(ABC)$: $\quad \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Khi đó: $\alpha\left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC}\right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{IM} = -\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}\right)$$

$$\Rightarrow IM^2 = x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 + 2xy\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2yz\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 2zx\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$

(*với* $\alpha = \dfrac{x}{x+y+z}$, $\beta = \dfrac{y}{x+y+z}$, $\gamma = \dfrac{z}{x+y+z}$)

$$= x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 + xy\left(MA^2 + MB^2 - AB^2\right) + yz\left(MB^2 + MC^2 - BC^2\right) + zx\left(MC^2 + MA^2 - CA^2\right)$$

$$= xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 - \left(xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2\right)$$

Do $IM^2 \geq 0$ nên:

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 \geq xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 \geq \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma}\right)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow M \equiv I$

Chú ý: Theo bài 9, ta có

$$\overrightarrow{NA}.S_{\Delta NBC} + \overrightarrow{NB}.S_{\Delta NCA} + \overrightarrow{NC}.S_{\Delta NAB} = \vec{0}$$

(*với N là điểm bất kỳ nằm trong* ΔABC)

Do đó:

• Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì:

$$\overrightarrow{IA}.S_{\Delta IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{\Delta ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{\Delta ICA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\frac{1}{2}ra + \overrightarrow{IB}.\frac{1}{2}rb + \overrightarrow{IC}.\frac{1}{2}rc = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

Theo bài 10, ta có:

$$a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 \geq \frac{abc}{a+b+c}\left(\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} + \frac{c^2}{c}\right),$$

$$\forall M \in mp(ABC)$$

$$\Leftrightarrow a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 \geq abc, \quad \forall M \in mp(ABC)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

• Nếu H là trực tâm ΔABC nhọn thì:

$$\overrightarrow{HA}.S_{\Delta HBC} + \overrightarrow{HB}.S_{\Delta HCA} + \overrightarrow{HC}.S_{\Delta HAB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HA}(2R\sin A . \cos B . \cos C) + \overrightarrow{HB}(2R\sin B . \cos C . \cos A) + \overrightarrow{HC}(2R\sin C . \cos A . \cos B) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow tgA.\overrightarrow{HA} + tgB.\overrightarrow{HB} + tgC.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

Theo bài 10, ta có:

$$tgA.MA^2 + tgB.MB^2 + tgC.MC^2$$

$$\geq \frac{tgA.tgB.tgC}{tgA + tgB + tgC}\left(\frac{a^2}{tgA} + \frac{b^2}{tgB} + \frac{c^2}{tgC}\right), \quad \forall M \in mp(ABC)$$

$$\Leftrightarrow tgA.MA^2 + tgB.MB^2 + tgC.MC^2$$

$$\geq a^2cotgA + b^2cotgB + c^2cotgC, \quad \forall M \in mp(ABC)$$

(vì $tgA.tgB.tgC = tgA + tgB + tgC$)

$$\Leftrightarrow tgA.MA^2 + tgB.MB^2 + tgC.MC^2 \geq 4S, \quad \forall M \in mp(ABC)$$

(vì $\quad a^2 \cot g A + b^2 \cot g B + c^2 \cot g C$

$= 2R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

$= 8R^2 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C \; = 4S$)

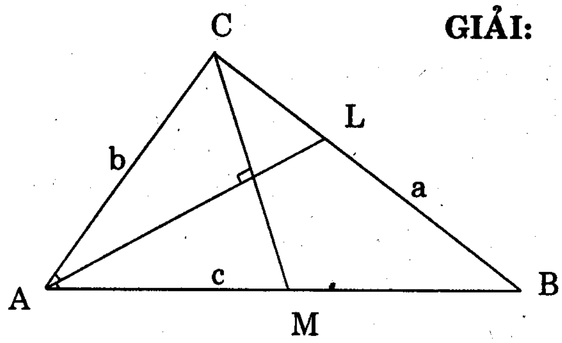
Vậy: $tgA.MA^2 + tgB.MB^2 + tgC.MC^2 \geq 4S, \quad \forall M \in mp(ABC)$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ M là trực tâm ΔABC

Bài 11

Trong ΔABC có trung tuyến CM vuông góc với đường phân giác AL và $\dfrac{CM}{AL} = \dfrac{3}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$. Tính góc A

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

Hơn nữa: $\begin{cases} \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} \\ \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CL\,.\,\overrightarrow{AL} = CL\,.\,\overrightarrow{AB} + CL\,.\,\overrightarrow{BL}. \\ BL\,.\,\overrightarrow{AL} = BL\,.\,\overrightarrow{AC} + BL\,.\,\overrightarrow{CL} \end{cases}$

$$\Rightarrow BL\,.\,\overrightarrow{AL} = CL\,.\,\overrightarrow{AB} + BL\,.\,\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AL} = \frac{CL}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{BL}{BC}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{BL}{CL}}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1 + \dfrac{CL}{BL}}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{1 + \dfrac{c}{b}}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1 + \dfrac{b}{c}}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{b}{b + c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b + c}\overrightarrow{AC}$$

mà: $AL \perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{AL}\,.\,\overrightarrow{CM} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(c.\overrightarrow{AC} + b.\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow c.\overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{AB} - 2ab^2 + bc^2 - 2b\,.\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 2b)\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + bc(c - 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 2b)\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + bc\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 2b$$

(vì $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = bc\cos A > -bc \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + bc > 0$)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Rightarrow AL^2 = \frac{4}{9}\left(AM^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{4}{9}\left(2AC^2 + 2AC^2\cos A\right)$$

$$= \frac{8}{9}AC^2(1 + \cos A)$$

và $CM^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cos A = 2b^2(1 - \cos A)$

Theo giả thiết thì:

$$\frac{CM^2}{AL^2} = \frac{9}{4}\left(5 - 2\sqrt{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}\cdot\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{9}{4}\left(5 - 2\sqrt{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \left(5 - 2\sqrt{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1 + \cos A} = 6 - 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos A = \frac{1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad A = 72^\circ$$

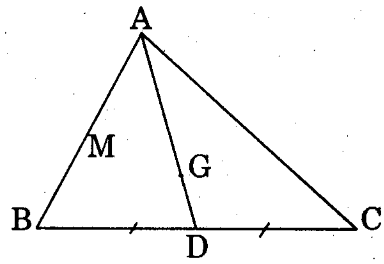
Bài 12

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$m_a \cdot MA + m_b \cdot MB + m_c \cdot MC \geq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

$$\forall M \in mp(ABC)$$

GIẢI:



Gọi G là trọng tâm ΔABC.

Ta có: $GA \cdot MA \geq \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MA}$

$$= \overrightarrow{GA}\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MG} + GA^2$$

Chứng minh tương tự:

$$GB \cdot MB \geq \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{MG} + GB^2$$

$$GC \cdot MC \geq \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{MG} + GC^2$$

$$\Rightarrow GA \cdot MA + GB \cdot MB + GC \cdot MC$$

$$\geq \left(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\right)\overrightarrow{MG} + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\left(m_a \cdot MA + m_b \cdot MB + m_c \cdot MC\right) \geq \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Rightarrow m_a \cdot MA + m_b \cdot MB + m_c \cdot MC \geq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow M \equiv G$

Bài 13

Cho ΔABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, M là điểm nằm trong ΔABC và N, P, Q lần lượt là các hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)$$

Trong đó: $\begin{cases} S = S_{\Delta ABC}, & S' = S_{\Delta NPQ} \\ d = OM, & R = OA \end{cases}$ (*Công thức Euler*)

GIẢI:

Trước hết chúng ta chứng minh bổ đề sau:

"Trong tam giác ABC luôn có:

(a) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$

(b) $S = 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C$

(c) $\overrightarrow{OA}.\sin 2A + \overrightarrow{OB}.\sin 2B + \overrightarrow{OC}.\sin 2C = \vec{0}$

Chứng minh:

(a) Ta có:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B).\cos(A-B) + 2\sin C.\cos C$$

$$= 2\sin C\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

$$= 4\sin C.\sin B.\sin A$$

(b) Ta có:

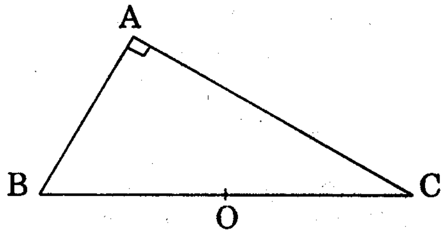
$$S = \frac{1}{2}ab.\sin C$$

$$= \frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C$$

$$= 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C$$

(c) Xét 3 trường hợp:

- *Nếu ΔABC vuông (chẳng hạn vuông tại A):*



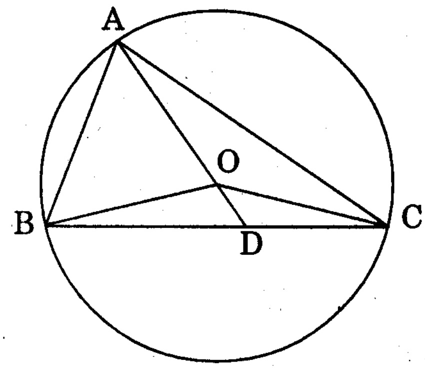
Ta có: $\overrightarrow{OA}.\sin 2A + \overrightarrow{OB}.\sin 2B + \overrightarrow{OC}.\sin 2C$

$= \overrightarrow{OB}.\sin(\pi - 2C) + \overrightarrow{OC}.\sin 2C$

$= \overrightarrow{OB}.\sin 2C + \overrightarrow{OC}.\sin 2C$ (vì $B + C = \dfrac{\pi}{2}$)

$= \left(\underbrace{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\vec{0}}\right)\sin 2C = \vec{0}$

- *Nếu ΔABC nhọn:*



Gọi D là giao điểm của AO và BC

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} CD.\overrightarrow{OD} = CD.\overrightarrow{OB} + CD.\overrightarrow{BD} \\ BD.\overrightarrow{OD} = BD.\overrightarrow{OC} + BD.\overrightarrow{CD} \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\underbrace{CD + BD}_{BC}\right)\overrightarrow{OD} = CD.\overrightarrow{OB} + BD.\overrightarrow{OC} + \left(\underbrace{CD.\overrightarrow{BD} + BD.\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \dfrac{CD}{BC}\overrightarrow{OB} + \dfrac{BD}{BC}\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{BD}{CD}}\overrightarrow{OB} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{CD}{BD}}\overrightarrow{OC}$

$= \dfrac{1}{1 + \dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OCA}}}\overrightarrow{OB} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{S_{\Delta OCA}}{S_{\Delta OAB}}}\overrightarrow{OC}$

$= \dfrac{1}{S - S_{\Delta OBC}}\left(S_{\Delta OCA}.\overrightarrow{OB} + S_{\Delta OAB}.\overrightarrow{OC}\right)$ (1)

Hơn nữa: $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{AD}{OD} - 1 = \dfrac{S}{S_{\Delta OBC}} - 1 = \dfrac{S - S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OBC}}$

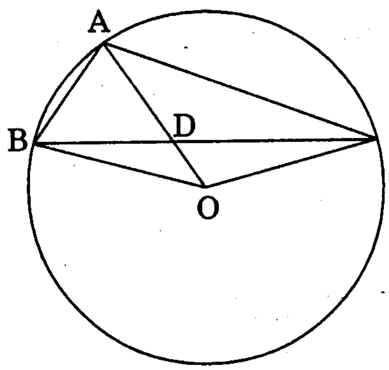
$$\Rightarrow \ \overrightarrow{OD} = -\frac{S_{\Delta OBC}}{S - S_{\Delta OBC}}\overrightarrow{OA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\quad -S_{\Delta OBC}.\overrightarrow{OA} = S_{\Delta OCA}.\overrightarrow{OB} + S_{\Delta OAB}.\overrightarrow{OC}$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{2}R^2\sin 2A.\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}R^2\sin 2B.\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}R^2\sin 2C.\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\sin 2A + \overrightarrow{OB}.\sin 2B + \overrightarrow{OC}.\sin 2C = \vec{0}$$

- *Nếu ΔABC tù (chẳng hạn tại A):*



Gọi O là giao điểm của AO và BC. Chứng minh tương tự như trường hợp ΔABC nhọn, ta cũng có:

$$\overrightarrow{OD} = \frac{CD}{BC}\overrightarrow{OB} + \frac{BD}{BC}\overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{BD}{CD}}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{1 + \dfrac{CD}{BD}}\overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OCA}}}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{1 + \dfrac{S_{\Delta OCA}}{S_{\Delta OAB}}}\overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{1}{S + S_{\Delta OBC}}\left(S_{\Delta OCA}\overrightarrow{OB} + S_{\Delta OAB}\overrightarrow{OC}\right) \quad (3)$$

Hơn nữa: $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{AD}{OD} + 1 = \dfrac{S}{S_{\Delta OBC}} + 1 = \dfrac{S + S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OBC}}$

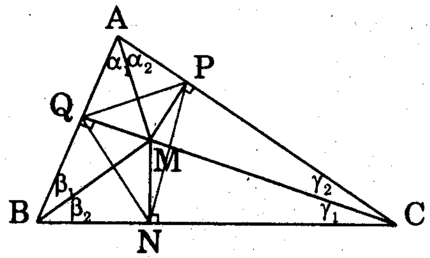
$$\Rightarrow \ \overrightarrow{OD} = \frac{S_{\Delta OBC}}{S + S_{\Delta OBC}}\overrightarrow{OA} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ $S_{\Delta OBC}.\overrightarrow{OA} = S_{\Delta OCA}\overrightarrow{OB} + S_{\Delta OAB}.\overrightarrow{OC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}R^2 \sin 2A.\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}R^2 \sin 2B.\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}R^2 \sin 2C.\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\sin 2A + \overrightarrow{OB}.\sin 2B + \overrightarrow{OC}.\sin 2C = \vec{0}$$

Quay lại bài toán:



Đặt: $\begin{cases} \widehat{MAB} = \alpha_1, \ \widehat{MAC} = \alpha_2 \\ \widehat{MBA} = \beta_1, \ \widehat{MBC} = \beta_2 \\ \widehat{MCB} = \gamma_1, \ \widehat{MCA} = \gamma_2 \end{cases}$

$$\left(\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = A \\ \beta_1 + \beta_2 = B \\ \gamma_1 + \gamma_2 = C \end{cases} \right)$$

Ta có: $S' = S_{\Delta MPQ} + S_{\Delta MNQ} + S_{\Delta MNP}$

$$= \frac{1}{2}\left(MA^2 \sin A.\sin\alpha_1.\sin\alpha_2 + MB^2 \sin B.\sin\beta_1.\sin\beta_2 + MC^2 \sin C.\sin\gamma_1.\sin\gamma_2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[MA^2 \sin A.\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + MB^2 \sin B.\cos(\beta_1 - \beta_2) + MC^2 \sin C.\cos(\gamma_1 - \gamma_2)\right]$$

$$- \frac{1}{8}\left(MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C\right) \quad (5)$$

$$S = S_{AQMP} + S_{BNMQ} + S_{CNMP}$$

$$= \frac{1}{4}\left[MA^2(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2) + MB^2(\sin 2\beta_1 + \sin 2\beta_2) + MC^2(\sin 2\gamma_1 + \sin 2\gamma_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[MA^2 \sin A.\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + MB^2 \sin B.\cos(\beta_1 - \beta_2) + MC^2 \sin C.\cos(\gamma_1 + \gamma_2)\right] \quad (6)$$

Từ (5) và (6)

$$\Rightarrow S' = \frac{1}{2}S - \frac{1}{8}\left(MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C\right) \quad (7)$$

Hơn nữa: $MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C$

$$= \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 \sin 2A + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 \sin 2B + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \sin 2C$$

$$= MO^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) + R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$+ 2\overrightarrow{MO}\left(\underbrace{\overrightarrow{OA}.\sin 2A + \overrightarrow{OB}.\sin 2B + \overrightarrow{OC}.\sin 2C}_{\vec{0}}\right)$$

$$= 4MO^2 \sin A.\sin B.\sin C + 4R^2 \sin A.\sin B.\sin C$$

$$= 4MO^2.\frac{S}{2R^2} + 2S \quad \textit{(Do bổ đề trên)}$$

$$= 2.d^2.\frac{S}{R^2} + 2S \quad (8)$$

Từ (7) và (8) $\Rightarrow$ $S' = \frac{1}{2}S - \frac{1}{8}\left(2.d^2.\frac{S}{R^2} + 2S\right)$

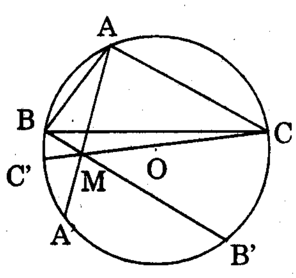
Vậy: $\frac{S}{S'} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)$

Bài 14

Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Tìm quỹ tích những điểm M nằm trong đường tròn sao cho dây cung đi qua M là AA', BB', CC' thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")



GIẢI:

Gọi G là trọng tâm ΔABC

Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $MA^2 + MB^2 + MC^2$

$$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overline{MG}\left(\underbrace{\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}}_{\vec{0}}\right)$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$$

$$= 3MG^2 + \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$= 3MG^2 + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \quad (M \equiv O)$$

$$\Rightarrow \quad OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Hơn nữa: $MA.MA' = MB.MB' = MC.MC' = R^2 - OM^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{MA}{MA'} = \frac{MA^2}{MA.MA'} = \frac{MA^2}{R^2 - OM^2}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{MB}{MB'} = \frac{MB^2}{R^2 - OM^2}$$

$$\frac{MC}{MC'} = \frac{MC^2}{R^2 - OM^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - OM^2} = 3$$

(Do giả thiết)

$$\Rightarrow \quad 3MG^2 + \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 3R^2 - 3OM^2$$

$$\Rightarrow \quad 3MG^2 + S\left(R^2 - OG^2\right) = 3R^2 - 3OM^2$$

$$\Rightarrow \quad GM^2 + MO^2 = OG^2$$

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính OG

Ngược lại, trên đường tròn đường kính OG ta lấy điểm M tùy ý.

$$\text{Vì } OG = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} < R$$

Nên đường tròn này hoàn toàn chứa trong đường tròn tâm O

$\Rightarrow$ M nằm trong đường tròn O.

Vì M thuộc đường tròn đường kính OG nên $OM^2 + MG^2 = OG^2$.

Do đó theo cách chứng minh ở chiều thuận ta có:

$$OM^2 + \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{3} - \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{9} = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \ MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\left(R^2 - OM^2\right)$$

Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của MA, MB, MC với đường tròn tâm O. Từ đó suy ra:

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - OM^2} = 3$$

Ta dễ thấy rằng, khi ΔABC đều thì $O \equiv G$ suy ra $M \equiv O \equiv G$.

Còn khi ΔABC không đều thì $O \not\equiv G$ nên tồn tại đường tròn đường kính OG.

Vậy:
- Khi ΔABC đều thì $M \equiv O \equiv G$
- Khi ΔABC không đều thì quỹ tích của M là đường tròn đường kính OG

Bài 15

Cho ΔABC, tìm quỹ tích điểm M trong các trường hợp sau:

(a) $3MA^2 = 2MB^2 + MC^2$

(b) $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$

GIẢI:

(a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$MA^2 = \left(\overline{MO} + \overline{OA}\right)^2 = MO^2 + OA^2 + 2\,\overline{MO}.\overline{OA}$$

$$MB^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 = MO^2 + OB^2 + 2\,\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$$

$$MC^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = MO^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}$$

Suy ra: $3\,MA^2 = 2\,MB^2 + MC^2$

$\Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{MO}\left(3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{MO}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = 0$

(Vì $3\,\overrightarrow{OA} - 2\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -2\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) - \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right)$
$= -(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$)

Vậy quỹ tích các điểm M là đường thẳng qua O vuông góc với vectơ $\vec{i} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

(b) Ta có: $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$

$\Leftrightarrow\ \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = 0$

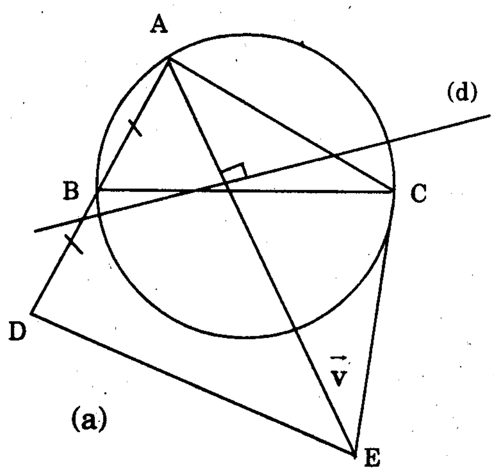
$\Leftrightarrow\ 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BA} = 0$ (với I trung điểm AB)

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{CI}\right) = 0$

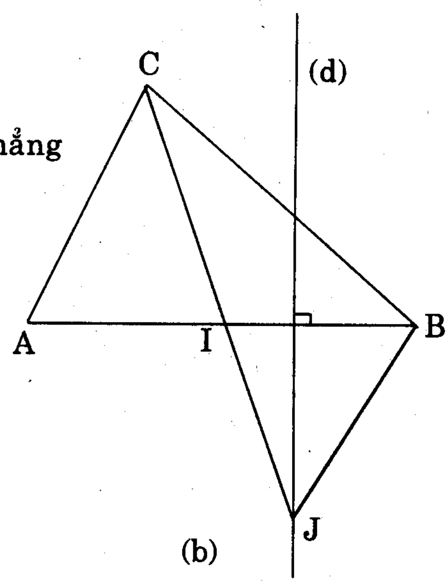
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ}\right) = 0$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MJ} = 0$

Quỹ tích điểm M là đường thẳng qua I và vuông góc với AB.



(a)



(b)

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho ΔABC x, y, z > 0. Chứng minh rằng :

(a) $\frac{1}{x}\cos A + \frac{1}{y}\cos B + \frac{1}{z}\cos C \le \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2xyz}$

(Đề thi đề nghị Olympic 30–4)

(b) $\frac{1}{x}\cos 2A + \frac{1}{y}\cos 2B + \frac{1}{z}\cos 2C \ge -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2xyz}$

2. Cho điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Chứng minh rằng giá trị của $\sum = MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí của M.

(Đề thi Olympic toán Quốc gia)

3. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C của ΔABC qua các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \cos A . \cos B . \cos C = -\frac{3}{8}$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

4. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là các trọng tâm của ΔABC, ΔBCD, ΔCDA và ΔDAB và tứ giác ABCD. Chứng minh rằng G là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$.

5. Cho ΔABC cân tại A, D là trung điểm cạnh AB, I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD. Chứng minh rằng $IE \perp CD$.

(Đề thi Olympic Toán Anh)

6. Cho ΔABC nhọn nội tiếp trong đường tròn bán kính bằng 1 và BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trong ΔABC, ta luôn có:

$$a^2(b^2 + c^2 + a^2)MA + b^2(c^2 + a^2 - b^2)MB + c^2(a^2 + b^2 + c^2)MC \geq (abc)^2$$

7. Cho ΔABC đều cạnh 2006. Tìm quỹ tích những điểm M thỏa mãn:

(a) $MB^2 + 2MC^2 = 1001$

(b) $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2007$

(c) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2008$

A. Các bài toán căn bản

Bài 1

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

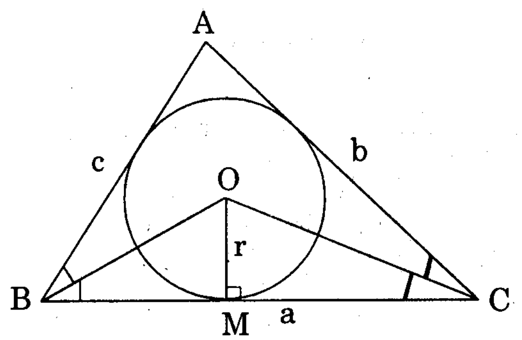
(a) $\dfrac{r}{R} = \sin\dfrac{A}{2}\,.\,\sin\dfrac{B}{2}\,.\,\sin\dfrac{C}{2}$ *(Đại học Ngoại ngữ Hà Nội)*

(b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$ *(Đại học Nông Lâm TPHCM)*

(c) $\text{tg}\,\dfrac{A}{2} + \text{tg}\,\dfrac{B}{2} + \text{tg}\,\dfrac{C}{2} = \dfrac{r + 4R}{p}$

GIẢI

(a)



Ta có: $a = BM + MC = r\left(\cot g\,\dfrac{B}{2} + \cot g\,\dfrac{C}{2}\right)$

$$= r\,\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}\,.\,\sin\dfrac{C}{2}} \quad = r\,\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}\,.\,\sin\dfrac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow\ 4R\sin\frac{A}{2}\,.\,\cos\frac{A}{2} = \frac{r\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}\,.\,\sin\dfrac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{r}{4R} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\,.\,\sin\frac{C}{2}$$

(b) Ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\,.\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] + 1$$

$$= 4\sin\frac{C}{2}\,.\sin\frac{B}{2}\,.\sin\frac{A}{2} + 1$$

$$= \frac{r}{R} + 1$$

(c) <u>Cách 1</u>:

Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\,.\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\,.\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\,.\cos\frac{B}{2}\,.\cos\frac{A}{2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{r+4R}{p} = \frac{4R\left(1 + \sin\frac{A}{2}\,.\,1\sin\frac{B}{2}\,.\sin\frac{C}{2}\right)}{R\left(\sin A + \sin B + \sin C\right)} \quad \textit{(do câu a)}$$

$$= \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$= \frac{(1+\cos A) + (1+\cos B) + (1+\cos C)}{4\cos\frac{A}{2}\,.\cos\frac{B}{2}\,.\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2\left(\cos^2\frac{A}{2}\,.\cos^2\frac{B}{2}\,.\cos^2\frac{C}{2}\right)}{4\cos\frac{A}{2}\,.\cos\frac{B}{2}\,.\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\,.\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{C+A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\,.\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\,.\cos\frac{B}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{tg}\,\frac{B}{2} + \text{tg}\,\frac{C}{2} + \text{tg}\,\frac{C}{2} + \text{tg}\,\frac{A}{2} + \text{tg}\,\frac{A}{2} + \text{tg}\,\frac{B}{2}\right)$$

$$= \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}$$

<u>Cách 2</u>:

$$VT = \frac{r + 4R}{p} = \frac{pr}{p^2} + \frac{4R}{p}$$

$$= \frac{S}{p^2} + \frac{abc}{p.S}$$

$$= \frac{p.abc + S^2}{p^2.S}$$

$$= \frac{p.abc + p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2.S}$$

$$= \frac{abc + (p-a)(p-b)(p-c)}{p.S}$$

$$= \frac{abc + p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc}{p.S}$$

$$= \frac{ab + bc + ca - p^2}{S}$$

$$Vp = \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = r\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right)$$

$$= \frac{pr\left[(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)\right]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{S\left[3p^2 - 2(a+b+c)p + ab + bc + ca\right]}{S^2}$$

$$= \frac{ab + bc + ca - p^2}{S}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

Bài 2

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

(a) $S = \frac{1}{4}\left(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A\right) = \sqrt{r_a . r_b . r_c . r}$

(b) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

(c) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

(d) $-r_a + r_b + r_c + r = 4R\cos A$

GIẢI

(a) Ta có:

- $\frac{1}{4}\left(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A\right)$

$$= 2R^2 \sin A . \sin B\left(\sin A . \cos B + \sin B . \cos A\right)$$

$$= 2R^2\left(\sin^2 A . \sin B . \cos B + \sin^2 B . \sin A . \cos A\right)$$

$$= 2R^2 \sin A . \sin B . \sin(A + B)$$

$$= 2R^2 \sin A . \sin B . \sin C$$

$$= \frac{1}{2}(2R \sin A)(2R \sin B)\sin C$$

$$= \frac{1}{2}ab . \sin C = S$$

- $S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$

$\Rightarrow S^4 = p(p - a)(p - b)(p - c)r.r_a.r_b.r_c = S^2 . r . r_a . r_b . r_c$

$\Rightarrow S = \sqrt{r . r_a . r_b . r_c}$

(b) Ta có: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

$$= (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$$

$$= pr$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S}, \ \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{b}{2S}, \ \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{c}{2S} \\ \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{p-a}{S}, \ \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{p-b}{S}, \ \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{p-c}{S} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

(c) <u>Cách 1</u>:

Ta có: $r_a + r_b + r_c = p\left(\text{tg}\dfrac{A}{2} + \text{tg}\dfrac{B}{2} + \text{tg}\dfrac{C}{2}\right)$

$= r + 4R$ *(do bài 1c)*

<u>Cách 2:</u>

Ta có: $r_a = p.\text{tg}\dfrac{A}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C)\,\text{tg}\dfrac{A}{2}$

$= R4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}.\text{tg}\dfrac{A}{2}$

(vì $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$ *)*

(bạn đọc tự kiểm tra)

$= 4R\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$

Chứng minh tương tự:

$$r_b = 4R\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

$$r_c = 4R\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}$$

Hơn nữa: $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{abc}{4Rp}$

$$= \frac{8R^3 \sin A.\sin B.\sin C}{4R^2(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

$$= \frac{2R\sin A.\sin B.\sin C}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$= 4R\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$ *(có thể xem bài 1a)*

$$\Rightarrow\ r_a + r_b + r_c - r = 4R\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}.\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$+ 4R\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$= 4R\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{A+B}{2} + 4R\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 4R\left(\cos^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$= 4R$$

$$\Rightarrow\ r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

(d) Ta có: $-r_a + r_b + r_c + r$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2}\right)$$

$$+ 4R\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} - 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$= 4R\left(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= 4R\cos A$$

Bài 3

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)l_c + \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)l_a + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)l_b = 2\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)$$

GIẢI

Ta có: $$l_a = \frac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow l_a\left(\frac{b+c}{bc}\right) = 2\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 2\cos\frac{A}{2}$$

Chứng minh tương tự:

$$l_b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) = 2\cos\frac{B}{2}$$

$$l_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 2\cos\frac{C}{2}$$

Vậy: $$\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)l_a + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)l_b + \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)l_c = 2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$

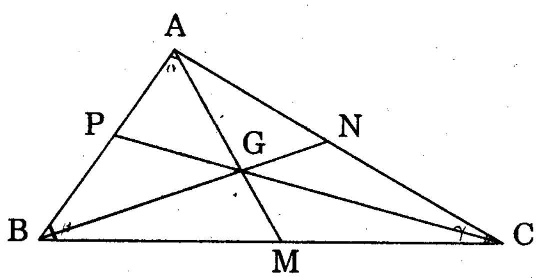
Bài 4

Cho ΔABC, G là trọng tâm. Đặt $\widehat{GAB} = \alpha, \widehat{GBC} = \beta, \widehat{GCA} = \gamma$
Chứng minh rằng:

$$\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4S}$$

(Đại học Ngoại thương)

GIẢI



Ta có: $BG^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB.AG.\cos\alpha$

$$= C^2 + AG^2 - 2AB.AG.\sin\alpha.\cot g\alpha$$

$$= C^2 + AG^2 - 4S_{\Delta ABG}.\cot g\alpha$$

$$= C^2 + AG^2 - \frac{4}{3}S.\cot g\alpha$$

$$\Rightarrow \cot g\alpha = \frac{3}{4S}\left(C^2 + GA^2 - GB^2\right)$$

Chứng minh tương tự:

$$\cot g\beta = \frac{3}{4S}\left(a^2 + GB^2 - GC^2\right)$$

$$\cot g\gamma = \frac{3}{4S}\left(b^2 + GC^2 - GA^2\right)$$

Vậy: $\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = \frac{3}{4S}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Bài 5

Cho ΔABC, có $a^4 + b^4 = c^4$. Chứng minh rằng:

(a) ΔABC có 3 góc nhọn.

(b) $2\sin^2 C = tgA.tgB$

GIẢI

(a) Ta có:

$$c^4 = a^4 + b^4 \Rightarrow \begin{cases} c^4 > a^4 \\ c^4 > b^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > a \\ c > b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c > a \\ c > b \end{cases} \Rightarrow \text{A, B nhọn}$$

Hơn nữa: $c^4 = a^2.a^2 + b^2.b^2 > c^2.a^2 + c^2.b^2$

$$\Rightarrow c^2 < a^2 + b^2 = c^2 + 2ab.\cos C$$

$$\Rightarrow \cos C > 0$$

$\Rightarrow$ C nhọn

Vậy A, B, C đều nhọn

(b) Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$$= b^2 + c^2 - 2bc.\sin A.\text{cotg}A$$

$$= b^2 + c^2 - 4S.\text{cotg}A$$

$$\Rightarrow \text{cotg}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

Chứng minh tương tự:

$$\text{cotg}B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$$

Nên $\text{cotg}A.\text{cotg}B = \dfrac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{16S^2}$

$$= \frac{c^4 - \left(a^4 + b^4 - 2a^2b^2\right)}{16S^2} = \frac{a^2b^2}{8S^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{8\left(\frac{1}{2}ab\sin C\right)^2} = \frac{1}{2\sin^2 C}$$

Vậy: $\text{tg}A.\text{tg}B = 2\sin^2 C$

Bài 6

Cho ΔABC, có $B = 2C$. Chứng minh rằng:

(a) $b^2 = ac + c^2$

(b) $r = (b - c)\sin C$

GIẢI

(a) Ta có: $b^2 - c^2 = 4R^2\left(\sin^2 B - \sin^2 C\right)$

$$= 4R^2\left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2B) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2C)\right]$$

$$= 2R^2(\cos 2C - \cos 2B)$$

$$= 2R^2.2\sin(C + B)\sin(B - C)$$

$$= ac$$

$$\Rightarrow b^2 = ac + c^2$$

(b) Ta có: $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{ab.\sin C}{a+b+c} = \dfrac{ab.\sin C}{\dfrac{ac+c^2}{c}+b} = \dfrac{ab.\sin C}{\dfrac{b^2}{c}+b}$

$$= \frac{ac.\sin C}{b+c} = \frac{ac(b-c).\sin C}{b^2-c^2}$$

$$= \frac{ac(b-c).\sin C}{ac}$$

$$= (b-c).\sin C$$

Bài 7

Cho ΔABC có $A = 2B = 4C$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

GIẢI

<u>Cách 1:</u>

Ta có: $\dfrac{A}{4} = \dfrac{B}{2} = \dfrac{C}{1} = \dfrac{A+B+C}{7} = \dfrac{\pi}{7}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{4\pi}{7} \\ B = \dfrac{2\pi}{7} \\ C = \dfrac{\pi}{7} \end{cases}$$

Theo định lý hàm sin

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)$$

$$= \frac{1}{2R}.\frac{\sin A+\sin B}{\sin A.\sin B}$$

$$= \frac{1}{2R}.\frac{2\sin\dfrac{A+B}{2}.\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin A.\sin B}$$

$$= \frac{1}{R}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{\sin A.\sin B}$$

$$= \frac{1}{R}\cdot\frac{\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7}.\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{2R\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{C}$$

<u>Cách 2</u> Do $\begin{cases} A = 2B \\ B = 2C \end{cases}$

Nên theo bài ta có:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + bc \\ b^2 = c^2 + ca \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 + ca + bc = c(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{a+b+c}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{b+c}{a^2}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{b+c}{b^2+bc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Vậy $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Bài 8

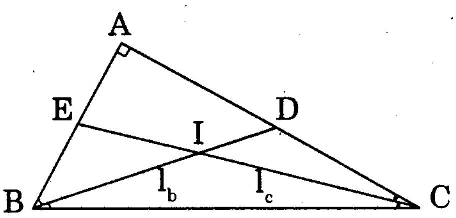
Cho ΔABC vuông tại A. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng:

(a) $\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{l_b.l_c}{4a^2}$

(b) $IB.IC = \frac{l_b.l_c}{2.}$

(Đại học Y – Dược TPHCM)

GIẢI



(a) Ta có $\begin{cases} \cos\dfrac{B}{2} = \dfrac{c}{l_b} \\ \cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{b}{l_c} \end{cases}$

Hơn nữa: $\sin B.\sin C = \dfrac{bc}{a^2}$

$$\Rightarrow 4\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} = \frac{bc}{a^2}$$

$$\Rightarrow 4\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\frac{bc}{l_b.l_c} = \frac{bc}{a^2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{l_b.l_c}{4a^2}$$

(b) Áp dụng định lý hàm sin trong ΔIBC:

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{IC}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{a}{\sin\widehat{BDC}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow IB.IC = 2a^2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$= 2a^2\frac{l_bl_c}{4a^2}$$

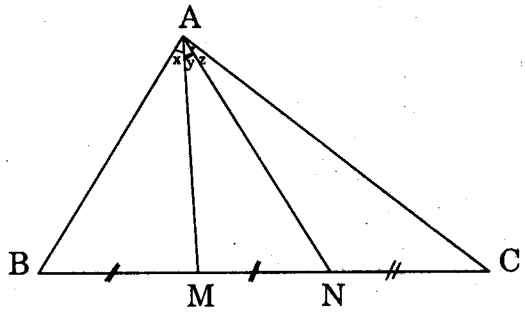
$$= \frac{l_bl_c}{2}$$

Bài 9

Cho ΔABC, $MN \in BC$ sao cho $BH = MN = NC$.
Đặt $\widehat{BAM} = x, \widehat{MAN} = y, \widehat{NAC} = z$
Chứng minh:

$$(\text{cotgx} + \text{cotgy})(\text{cotgy} + \text{cotgz}) = 4(1 + \text{cotg}^2\text{y})$$

GIẢI



Đặt $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta AMN} = S_{\Delta ANC} = \alpha > 0$

$$\text{Vế trái} = \frac{\sin(x+y)}{\sin x.\sin y}.\frac{\sin(y+z)}{\sin y.\sin z}$$

$$= \frac{\sin(x+y).\sin(y+z)}{\sin^2 y.\sin x.\sin z}$$

$$= \left(1+\text{cotg}^2 y\right)\frac{\sin(x+y).\sin(y+z)}{\sin x.\sin z}$$

$$= \left(1+\text{cotg}^2 y\right)\frac{\dfrac{2S_{\Delta ABN}}{AB.AN}}{\dfrac{2S_{\Delta ABM}}{AB.AM}}.\frac{\dfrac{2S_{\Delta AMC}}{AM.AC}}{\dfrac{2S_{\Delta ANC}}{AN.AC}}$$

$$= \left(1+\text{cotg}^2 y\right)\frac{2\alpha}{\alpha}.\frac{2\alpha}{\alpha}$$

$$= 4\left(1+\text{cotg}^2 y\right) = \text{Vế phải}$$

Bài 10

Cho ΔABC thỏa $p^2 = h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a$ (1)

Chứng minh rằng ΔABC đều.

GIẢI

Ta có: $S = \frac{1}{2}ah_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$\Rightarrow h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$\Rightarrow h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a = 4p(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

$$= \frac{8p^2(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow 8(p-a)(p-b)(p-c) = abc$

$$\Leftrightarrow abc = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2c^2 = \left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2 = (c-a)^2 = (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Bài 11

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$b\cos^2\frac{A}{2} + a\cos^2\frac{B}{2} = p$$

GIẢI

Ta có: $b\cos^2\frac{A}{2} + a\cos^2\frac{B}{2} = \frac{1}{2}b(1+\cos A) + \frac{1}{2}a(1+\cos B)$

$$= \frac{1}{2}b\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) + \frac{1}{2}a\left(1 + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{b^2+c^2-a^2}{4c} + \frac{c^2+a^2-b^2}{4c}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}C = p$$

Bài 12

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$m_a.m_b.m_c \ge p.S$$

GIẢI

Ta có: $m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4} \ge \dfrac{(b+c)^2-a^2}{4} = p(p-a)$

$$\Rightarrow m_a \ge \sqrt{p(p-a)}$$

Chứng minh tương tự:

$$m_b \ge \sqrt{p(p-b)}$$

$$m_c \ge \sqrt{p(p-c)}$$

Suy ra: $m_a.m_b.m_c \ge p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pS$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 13

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

(a) $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

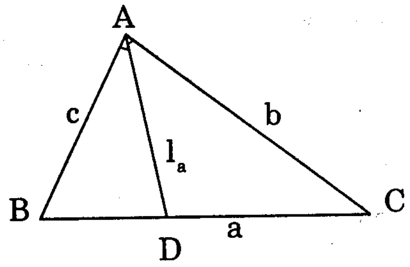
(b) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{l_a}+\dfrac{1}{l_b}+\dfrac{1}{l_c}$

(c) $\dfrac{l_b+l_c}{a}+\dfrac{l_c+l_a}{b}+\dfrac{l_a+l_b}{c} \le 3\sqrt{3}$

GIẢI

(a) Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADB} + S_{\Delta ADC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}cl_a.\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a.\sin\frac{A}{2}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}(b+c)l_a.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow bc.\sin A = (b+c)l_a.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow l_a = \frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2}$$

(b) Ta có: $$l_a = \frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2} < \frac{2bc}{b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Chứng minh tương tự $\frac{1}{l_b} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$

$$\frac{1}{l_c} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

(c) Ta có: $$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{A}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{B}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\left[\sin\frac{A}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\sin\frac{B}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos^2\frac{A}{2}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos^2\frac{B}{2}+\frac{3}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{A}{2}\right)$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{l_b+l_c}{a}+\frac{l_c+l_a}{b}+\frac{l_a+l_b}{c} = l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+l_b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+l_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right) \leq 3\sqrt{3}$$

Bài 14

Cho ΔABC có $h_a, h_b, h_c \in \mathbb{N}$; và $r = 1$.
Chứng minh rằng ΔABC đều.

GIẢI

Ta có $2p > 2a \Leftrightarrow p > a$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{r} > \frac{2S}{h_a}$$

$$\Leftrightarrow h_a > 2r = 2$$

Vì $h_a \in \mathbb{N} \Rightarrow h_a \geq 3$

Chứng minh tương tự:

$$h_b \geq 3$$
$$h_c \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Hơn nữa

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} = 1$$

$$\Rightarrow h_a = h_b = h_c = 3$$

$$\Rightarrow a = b = c$$

Vậy ΔABC đều

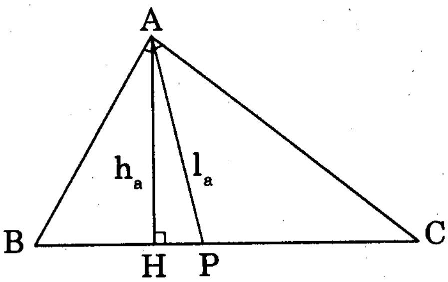
Bài 15

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{h_a}{l_a} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

GIẢI



Ta có: $h_a = l_a.\sin\widehat{ADB}$

$$= l_a.\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{h_a^2}{l_a^2} = \frac{1 - \cos(2C + A)}{2}$$

$$= \frac{1 - \cos(\pi - B + C)}{2}$$

$$= \frac{1 + \cos(B - C)}{2}$$

$$= \cos^2\frac{(B - C)}{2}$$

Hơn nữa: $r = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2r}{R} = 8\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

Do đó: $\frac{h_a}{l_c} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B - C}{2} \geq 8\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B - C}{2} \geq 4\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B - C}{2} - \cos\frac{B + C}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B - C}{2} - 4\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B - C}{2} + 4S^2\frac{A}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{B - C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \textit{(luôn đúng)}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \cos\frac{B - C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B - C}{2}.\sin\frac{B + C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

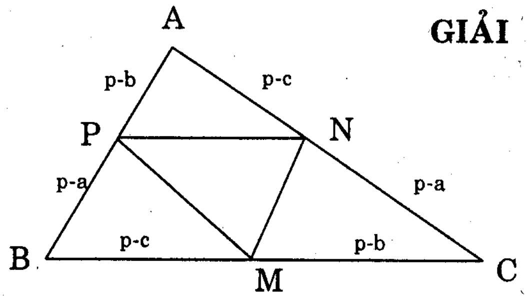
$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A$$

$$\Leftrightarrow bc = 2a$$

Bài 16

Cho ΔABC có ba đường tròn bàng tiếp của các góc A, B, C tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB tại M, N, P.
Chứng minh rằng:
$$S_{\Delta MNP} \le \frac{S}{4}$$

GIẢI



Đặt $\begin{cases} S_{\Delta ANP} = S_1 \\ S_{\Delta BMP} = S_2 \\ S_{\Delta CMN} = S_3 \end{cases}$

Ta có: $\dfrac{S_{\Delta MNP}}{S} = \dfrac{S - (S_1 + S_2 + S_3)}{S} = 1 - \left(\dfrac{S_1}{S} + \dfrac{S_2}{S} + \dfrac{S_3}{S}\right)$

$$= 1 - \left[\frac{(p-a)(p-b)}{ab} + \frac{(p-b)(p-c)}{bc} + \frac{(p-c)(p-a)}{ca}\right]$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{(p-a)(p-b)}{ab} + \frac{(p-b)(p-c)}{bc} + \frac{(p-c)(p-a)}{ca}$$

$$= \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos A) + \frac{1}{2}(1 - \cos B) + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B) + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$$

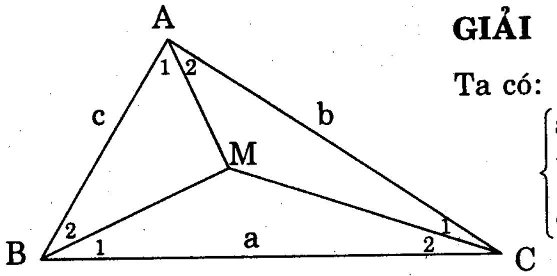
$$= \frac{3}{4} + \left(\sin^2\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2} \ge \frac{3}{4}$$

Vậy: $\dfrac{S_{\Delta MND}}{S} \le \dfrac{1}{4}$ Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Bài 17

Cho ΔABC và điểm M bất kỳ nằm trong ΔABC. Chứng minh rằng:

$$MA.\cos\frac{A}{2} + MB.\cos\frac{B}{2} + MC.\cos\frac{C}{2} \ge P$$



GIẢI

Ta có:

$$\begin{cases} a = MB\cos B_1 + MC.\cos C_2 \\ b = MC.\cos C_1 + MA\cos A_2 \\ c = MA\cos A_1 + MB\cos B_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ a + b + c = MA(\cos A_1 + \cos A_2) + MB(\cos B_1 + \cos B_2) + MC(\cos C_1 + \cos C_2)$$

$$= 2MA\cos\frac{A_1 + A_2}{2}.\cos\frac{A_1 - A_2}{2} + 2MB\cos\frac{B_1 + B_2}{2}.\cos\frac{B_1 - B_2}{2} + 2MC\cos\frac{C_1 + C_2}{2}.\cos\frac{C_1 - C_2}{2}$$

$$\le 2\left(MA\cos\frac{A}{2} + MB\cos\frac{B}{2} + MC\cos\frac{C}{2}\right)$$

Vậy: $MA\cos\frac{A}{2} + MB\cos\frac{B}{2} + MC\cos\frac{C}{2} \ge P$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ Tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Bài 18

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$p^2 + r^2 = 2R(h_a + h_b + h_c - 2r) \quad (*)$$

GIẢI

Ta có: (*) $\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr = 2R(h_a + h_b + h_c)$

$$\Leftrightarrow\ p^2 + r^2 + 4Rr = 2R\left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ p^2 + r^2 + 4Rr = 2R\frac{2abc}{4R}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ p^2 + r^2 + 4R = ab + bc + ca \quad (**)$$

Hơn nữa:
$$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{2R} \\ \text{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a} \\ \sin A = \dfrac{2\text{tg}\dfrac{A}{2}}{1 + \text{tg}^2\dfrac{A}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \frac{a}{2R} = \frac{\dfrac{2r}{p-a}}{1 + \left(\dfrac{r}{p-a}\right)^2} = \frac{2r(p-a)}{r^2 + (p-a)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ a\left[r^2 + (p-a)^2\right] = 4Rr(p-a)$$

$$\Leftrightarrow\ a\left(p^2 + a^2 - 2ap + r^2\right) = 4Rr(p-a)$$

$$\Leftrightarrow\ a^3 - 2pa + \left(p^2 + r^2 + 4Rr\right)a - 4Rrp = 0$$

Chứng minh tương tự:

$$b^3 - 2pb + \left(p^2 + r^2 + 4Rr\right)b - 4Rrp = 0$$

$$c^3 - 2pc + \left(p^2 + r^2 + 4Rr\right)c - 4Rrp = 0$$

$\Rightarrow$ a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px + \left(p^2 + r^2 + 4Rr\right)x - 4Rrp = 0$$

Theo định lý Viet, ta có:

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$$

$\Rightarrow$ (**) đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 19

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

GIẢI

Ta nhận thấy:

$$m_a \geq \frac{b^2 + c^2}{4R} \quad (1)$$

$\Leftrightarrow 4m_a^2 \geq (b.\sin B + c.\sin C)^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq b^2\sin^2 B + c^2.\sin^2 C + 2bc.\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc.\cos A \geq b^2\sin^2 B + c^2.\sin^2 C + 2ab.\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow b^2\cos^2 B + c^2.\cos^2 C - 2bc.\cos B.\cos C \geq 0$

$\Leftrightarrow (b\cos B - c.\cos C)^2 \geq 0$ *(luôn đúng)*

$$\text{Vậy: } m_a \geq \frac{b^2 + c^2}{4R}$$

Chứng minh tương tự:

$$m_b \geq \frac{c^2 + a^2}{4R}$$

$$m_c \geq \frac{a^2 + b^2}{4R}$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

$$\text{Dấu "=" } \Leftrightarrow \begin{cases} b.\cos B = c.\cos C \\ c.\cos C = a.\cos A \\ a.\cos A = b.\cos B \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad a.\cos A = b.\cos B = c.\cos C$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < A, B, C < \dfrac{\pi}{2} \\ \sin 2A = \sin 2B = \sin 2C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Tóm lại ta luôn có:

$$m_a + m_b + m_c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$(p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C$$

$$= 4r(2R - r)\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

2. Cho ΔABC.

a) Hãy tìm một điểm M trong ΔABC sao cho:

$$\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}$$

b) Đặt $\widehat{MAB} = D$. Chứng minh rằng:

$$\cot gD = \cot gA + \cot gB + \cot gC$$

(Bộ đề Tuyển sinh)

3. Cho ΔABC. Chứng minh rằng: $\quad h_a \leq \sqrt{p(p-a)} \leq m_a$

4. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 13$$

(ĐH Vinh, Khối A+B)

5. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$$

(Học viện Kỹ thuật Quân sự)

6. Cho ΔABC thỏa mãn hệ thức: $\begin{cases}\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}=\frac{b}{2\sqrt{ca}}\end{cases}$

Chứng minh rằng: ΔABC đều.

(Cao đẳng Sư phạm Kỹ thuật)

7. Cho ΔABC có $\frac{a}{m_a}=\frac{b}{m_b}=\frac{c}{m_c}$

Chứng minh rằng: ΔABC đều *(ĐH Văn hóa Hà Nội)*

8. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a) $\frac{h_b}{h_a^2}+\frac{h_c}{h_b^2}+\frac{h_a}{h_c^2}\ge\frac{1}{r}$ *(Học viện Ngân hàng)*

b) $a+b+c\le 3\sqrt{3}R$ *(ĐHDL Văn Lang)*

B. Các bài toán nâng cao

Bài 1

Cho ΔABC có $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \dfrac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C}$ (1)

Tính cosA + cosB

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin C} = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{\sin C} = \frac{4\sin A.\sin B.\sin C}{\sin 2C}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C - 1 = \cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B = 1$$

Bài 2

Cho ΔABC có $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C} = \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

Chứng minh rằng: ΔABC đều.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

* Nếu ΔABC tù:

Giả sử $A > \frac{\pi}{2} > B \geq C > 0 \Rightarrow 0 < C < \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg}C < 1 \\ \cos C < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{C}{2} < \sin C < \cos C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Hơn nữa: $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} = \dfrac{\cos A + \cos B}{\cos A.\cos B}$

$$= \frac{2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{\cos A.\cos B}$$

$$= \frac{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{\cos A.\cos B} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} < \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

* <u>Nếu ΔABC nhọn</u>:

Ta có:

$$0 < \cos A.\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}(1 - \cos C) = \sin^2\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \geq \frac{2}{\sqrt{\cos A.\cos B}} \geq \frac{2}{\sin\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ A = B

Chứng minh tương tự:

$$\frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{2}{\sin\frac{A}{2}}$$ Dấu "=" $\Leftrightarrow$ B = C

$$\frac{1}{\cos C}+\frac{1}{\cos A} \geq \frac{2}{\sin\frac{B}{2}}$$ Dấu "=" $\Leftrightarrow$ C = A

Suy ra: $$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C} \geq \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Bài 3

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$bc.\cos^2\frac{A}{2}+ca.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2} \geq r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c,$$

Khi nào xảy ra dấu đẳng thức?

(Đề thi học sinh giỏi TPHCM)

GIẢI

Ta có:

- $$bc.\cos^2\frac{A}{2}+ca.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}bc(1+\cos A)+\frac{1}{2}ca(1+\cos B)+\frac{1}{2}ab(1+\cos C)$$

$$=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\frac{1}{2}bc.\cos A+\frac{1}{2}ca.\cos B+\frac{1}{2}ab.\cos C$$

$$=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)$$
$$+\frac{1}{4}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{4}(a+b+c)^2=p^2 \quad (1)$$

- $$r_a.l_a=\frac{S}{p-a}\frac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$$

$$= \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}\,\frac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$$

$$= \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}.p\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

$$\leq 1.p\frac{p-b+p-c}{2}$$

$$\leq \frac{ap}{2}$$

$$\Rightarrow r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq \frac{a+b+c}{2}p = p^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

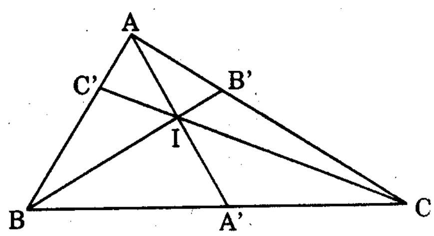
Bài 4

Cho ΔABC và điểm I thuộc miền trong của tam giác. Các đường thẳng AI, BI, CI lần lượt cắt các cạnh đối tại A', B', C'.

Chứng minh rằng: $\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \leq \frac{8}{27}$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Đặt $\begin{cases} S_{\Delta IBC} = x \\ S_{\Delta ICA} = y \\ S_{\Delta IAB} = z \end{cases}$

Ta có:

$$\frac{IA'}{AA'} = \frac{S_{\Delta IBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{x}{x+y+z}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{IB'}{BB'} = \frac{y}{x+y+z}$$

$$\frac{IC'}{CC'} = \frac{z}{x+y+z}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{(x+y+z)^3}$$

$$\leq \frac{1}{27}\left(\frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} + \frac{x+y}{x+y+z}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ I là trọng tâm ΔABC

Bài 5

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$$

Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ"

GIẢI

Ta có: $\begin{cases} h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \\ l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{h_a}{l_a} = \frac{(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a\sqrt{bc}} \geq \frac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c}$$

$$\geq 2\left(\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} + \frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b} + \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c}\right)$$

$$\geq 6\sqrt[3]{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}}$$

Hơn nữa: $\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \dfrac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}$

$$= \frac{S^2}{p(4RS)}$$

$$(vì\ \ S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)})$$

$$= \frac{S}{4Rp} = \frac{r}{4R} \quad (vì\ S = pr\ )$$

$$= \frac{1}{8}\frac{2r}{R}$$

Vậy: $\dfrac{h_a}{l_a} + \dfrac{h_b}{l_b} + \dfrac{h_c}{l_c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2r}{R}}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Bài 6

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

b) $\dfrac{p}{p+r}a^2 + \dfrac{p}{r+p}b^2 + \dfrac{r}{p+q}c^2 \geq 2\sqrt{3}S, \qquad \forall p, q, r > 0$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI

a) Đặt: $\begin{cases} p-a = x > 0 \\ p-b = y > 0 \\ p-c = z > 0 \end{cases}$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

$$\Leftrightarrow \left[a^2 - (b-c)^2\right] + \left[b^2 - (c-a)^2\right] + \left[c^2 - (a-b)^2\right] \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\ 4(p-b)(p-c)+4(p-c)(p-a)+4(p-a)(p-b)\ge 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\ xy+yz+zx\ge\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow\ (xy+yz+zx)^2\ge 3xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow\ (xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\ge 0\quad (\textit{đúng})$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow\ xy = yz = zx$

$\Leftrightarrow\ x = y = z$

$\Leftrightarrow\ a = b = c$

b) Theo BĐT Cauchy:

$$(a+b+c)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{q+r}}\sqrt{q+r}+\frac{b}{\sqrt{r+p}}\sqrt{r+p}+\frac{c}{\sqrt{p+q}}\sqrt{p+q}\right)^2$$

$$\le\ 2\left(\frac{a^2}{(q+r)^2}+\frac{b^2}{(r+p)^2}+\frac{c^2}{(p+q)^2}\right)^2(p+q+r)$$

$$\le\ 2(a^2+b^2+c^2)+2\left(\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\ge\frac{(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

$$\ge\ \frac{a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{2}\ge 2S\sqrt{3}$$

(*do câu a*)

Vậy: $\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\ge 2S\sqrt{3}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow\ \begin{cases}a=b=c\\ p=q=r\end{cases}$

Chú ý:

- Lấy $p = q = r > 0$, ta có bài toán quen thuộc:

  $$a^2+b^2+c^2\ge 4S\sqrt{3}$$

- Lấy $a = b = c = 1$Ta có BĐT Nesbit: $\frac{p}{q+r}+\frac{q}{r+p}+\frac{r}{p+q}\ge\frac{3}{2}$

  Dấu "=" $\Leftrightarrow\ p = q = r > 0$

Bài 7

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI

Ta có: $\begin{cases} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-a)r_a \\ m_a^2 = \dfrac{1}{4}\left[2\left(b^2+c^2\right)-a^2\right] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_a = \dfrac{\sqrt{p(p-b)(p-c)}}{(p-a)} \\ m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) \end{cases}$$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow p\left[\frac{(p-b)(p-c)}{(p-a)} + \frac{(p-c)(p-a)}{(p-b)} + \frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)}\right]$$

$$\geq \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right) \geq \frac{3}{4}\left[(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right] \quad (2)$$

(*trong đó*: $\begin{cases} x = p-a > 0 \\ y = p-b > 0 \\ z = p-c > 0 \end{cases}$)

Để ý rằng: $(x+y+z)\left(\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z}\right)$

$$= xy + yz + zx + x^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) + y^2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) + z^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$$\geq xy + yz + zx + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

$$\geq \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx\right)$$

$$\geq \frac{3}{4}\left[(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2\right]$$

$\Rightarrow$ (2) đúng

Dấu "=" ở (1) $\Leftrightarrow x = y = z$

$\Leftrightarrow a = b = c$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

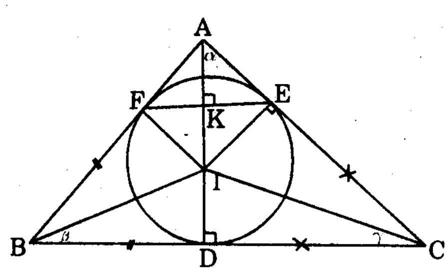
Bài 8

Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Chứng minh rằng:

$$\frac{DE}{\sqrt{BC.CA}} + \frac{EF}{\sqrt{CA.AB}} + \frac{FD}{\sqrt{AB.BC}} \leq \frac{3}{2}$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI



Ta có:

$$EF = 2FK = 2(p-a)\sin\alpha$$

$$= 2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{\sqrt{bc}} = \frac{2(p-a)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{bc}$$

$$= \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-a)(p-c)}}{bc}$$

$$\leq \frac{2\frac{c}{2}.\frac{b}{2}}{bc} = \frac{1}{2}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{DE}{\sqrt{ab}} \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{FD}{\sqrt{ca}} \le \frac{1}{2}$$

Vậy: $\dfrac{DE}{\sqrt{ab}} + \dfrac{EF}{\sqrt{bc}} + \dfrac{FD}{\sqrt{ca}} \le \dfrac{3}{2}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Bài 9

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$m_a + l_b + h_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$$

(Bất đẳng thức Jack Garfulkel)

GIẢI

Đặt: $\begin{cases} x = p - a > 0 \\ y = p - b > 0 \\ z = p - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \end{cases}$

Khi đó: $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2(z + x)^2 + 2(x + y)^2 - (y + z)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 4x(y + z) + y^2 - 2yz + z^2}$$

$$= \sqrt{\left(x + \frac{y + z}{2}\right)^2 - yz}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3\left(x + \frac{y + z}{2} - \sqrt{yz}\right)\left(x + \frac{y + z}{2} + \sqrt{yz}\right)}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3\left(x+\frac{y+z}{2}-\sqrt{yz}\right)\left(x+\frac{y+z}{2}+\sqrt{yz}\right)}{2}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2x+y+z-\sqrt{yz}\right)$$

Ta đã biết:

$$l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)} \le \sqrt{p(p-b)} = \sqrt{y(x+y+z)}$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)} \le \sqrt{p(p-c)} = \sqrt{z(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow m_a + l_b + l_c \le \frac{2x+y+z-\sqrt{yz}}{\sqrt{3}} + \sqrt{x+y+z}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$$

$$\le \frac{2x+y+z-\sqrt{yz}}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{x+y+z}.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x+y+z-\sqrt{yz}+x+y+z+\frac{3}{4}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\right]$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left[3(x+y+z)-\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\right]$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}3(x+y+z) \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow m_a + l_b + l_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)(1)$$

$$\Rightarrow m_a + l_b + h_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \quad (h_c \prec l_c)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Chú ý:

Để ý rằng: $l_a \le m_a$, nên từ (1) ta có ngay bất đẳng thức sau:

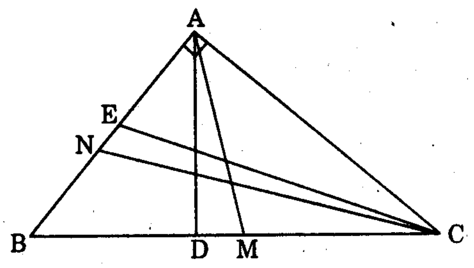
$$l_a + l_b + l_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$$

Bài 10

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) + \frac{|a-b|+|b-c|+|c-a|}{4}$$

GIẢI



Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \ge b \ge c$.

Gọi:

- AD, CE lần lượt là các đường phân giác trong xuất phát từ A và C.
- AM, CN lần lượt là các đường trung tuyến xuất phát từ A và C.

Dễ thấy rằng:

$$MD = MB - BD = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} \le \frac{b-c}{2}$$

$$NE = NA - AE = \frac{c}{2} - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)} \le \frac{a-b}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_a = AM \le AD + MD \le l_a + \dfrac{b-c}{2} \\ m_c = CN \le AE + NE \le l_c + \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ m_a + m_b + m_c \le l_a + m_b + l_c + \frac{a-b}{2} + \frac{b-c}{2}$$

$$\le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) + \frac{|a-b|+|b-c|+|c-a|}{2}$$

(Do (1) của bài 9)

Vậy: $m_a + m_b + m_c \le \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{|a-b|+|b-c|+|c-a|}{2}$

Bài 11

Cho ΔABC và $\begin{cases} m+n>0 \\ n+p>0 \\ p+m>0 \\ mn+np+pm>0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng:

$$ma^2+nb^2+pc^2 \geq 4\sqrt{mn+np+pm}.S \quad (*)$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI

Giả sử C nhọn

$$(*) \Leftrightarrow \; ma^2+nb^2+p\left(a^2+b^2-2ab\cos C\right) \geq 2\sqrt{mn+np+pm}.ab\sin C$$

$$\Leftrightarrow \; (m+p)\frac{a}{b}+(n+p)\frac{b}{a} \geq 2\left(p\cos C+\sqrt{mn+np+pm}\sin C\right)(**)$$

Theo bất đẳng thức Côsi và Bunhiacopski, ta có:

$$(m+p)\frac{a}{b}+(n+p)\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{(m+p)(n+p)}$$

và $$\left(p\cos C+\sqrt{mn+np+pm}\sin C\right)^2 \leq p^2+(mn+np+pm) \leq (m+p)(n+p)$$

$\Rightarrow$ (*) đúng và có dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (n+p)\dfrac{a}{b}=(n+p)\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{\cos C}{p}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{mn+np+pm}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{(n+p)}=\dfrac{b}{\sqrt{p+m}} \\ \dfrac{\cos^2 C}{p^2}=\dfrac{\sin^2 C}{mn+np+pm}=\dfrac{1}{(n+p)(n+p)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{n+p}} = \frac{b}{\sqrt{p+m}} = \frac{c}{\sqrt{m+n}}$$

$$(vì \;\; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$= a^2 + \frac{p+m}{n+p}a^2 - 2a\sqrt{\frac{p+m}{n+p}}.\frac{p}{\sqrt{(m+p)(n+p)}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{n+p+p+m-2p}{n+p} = \frac{n+m}{n+p}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{n+p}} = \frac{c}{\sqrt{m+n}} \quad)$$

Chú ý:

Từ bất đẳng thức (*) ta suy ra một số bất đẳng thức cụ thể mà các bạn có gặp trong một số sách tham khảo hay đề thi tuyển sinh đại học.

- Với $m = n = p = 1$, ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$
- Với $\begin{cases} m = \dfrac{bc}{a^2} \\ n = \dfrac{ca}{b^2} \\ p = \dfrac{ab}{c^2} \end{cases}$, ta có:

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}}.S$$

$$\geq 4\sqrt{3}.S$$

- Với $a = b = c = 1$, ta có:

$$m + n + p \geq \sqrt{3(mn + np + pm)}$$

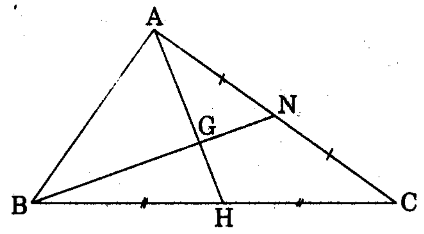
$$\Leftrightarrow \quad (m + n + p)^2 \geq 3(mn + np + pm)$$

Bài 12

Cho ΔABC có $2\,\text{cotg}B = \text{cotg}A + \text{cotg}C$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\widehat{GAC} = \widehat{GBA}$$

GIẢI



Ta có: $\text{cotg}A + \text{cotg}C = 2\,\text{cotg}B$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = 2\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = 2\left(c^2 + a^2 - b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = c^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow 3b^2 = 2\left(c^2 + a^2\right) - b^2 = 4m_b^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{m_b}{3} m_b$$

$$\Leftrightarrow NA^2 = NG.NB$$

$$\Leftrightarrow \frac{NA}{NG} = \frac{NB}{NA}$$

$$\Leftrightarrow \Delta NAG \backsim \Delta NBA$$

$$\Leftrightarrow \widehat{GAC} = \widehat{GBA}$$

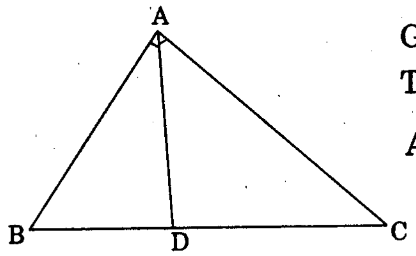
Bài 13

Cho ΔABC, $B > C$. Chứng minh rằng:

$$A = 2(B - C) \Leftrightarrow (b - c)(b + c)^2 = a^2 b$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI



Gọi AD là phân giác trong ΔABC.

Ta có:

$$AD^2 = l_a^2 = \frac{4}{(b+c)^2} bc.p.(p-a)$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(b+c-a)$$

Do đó: $A = 2(B - C)$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} + C = B$$

$$\Leftrightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABD}$$

$$\Leftrightarrow AB = AD$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{bc}{b+c}(a+b+c)(b+c-a)$$

$$\Leftrightarrow c(b+c)^2 = b\left[(b+c)^2 - a^2\right]$$

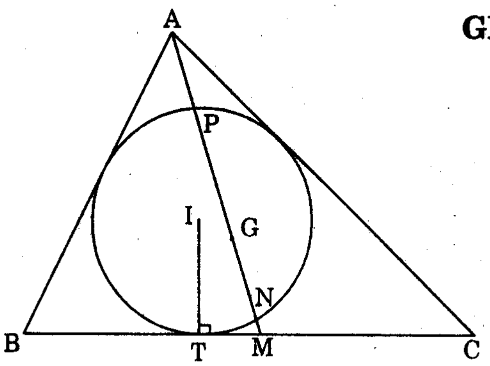
$$\Leftrightarrow (b-c)(b+c)^2 = a^2 b$$

Bài 14

Cho ΔABC, trọng tâm G nằm trong đường tròn nội tiếp (I).
Chứng minh rằng:

$$\text{Max}\{a^2, b^2, c^2\} < 4\text{Min}\{bc, ca, ab\} \quad (1)$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")



GIẢI

Không giảm tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta phải chứng minh $a^2 < 4bc$.

Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC. AM cắt (I) tại P, N (ở hình vẽ) và T là tiếp điểm của (I) với BC.

Ta có: $MT^2 = MN.MP$

và $MN.MP < MG.MA$ *(vì G nằm trong (I))*

$\Rightarrow MT^2 < MG.MA$

$\Rightarrow MT^2 < \dfrac{1}{3}MA^2$

Hơn nữa: $\begin{cases} MA^2 = ma^2 = \dfrac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) \\ MT = CT - CM = p - c - \dfrac{a}{2} = \dfrac{b-c}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{(b-c)^2}{4} < \frac{1}{12}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3(b-c)^2 < 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 2b^2 + 2c^2 - 3(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 4bc - (b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 4bc \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài 15

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI

Theo BĐT Bunhiacopski:

$$\sqrt{ac} + \sqrt{ba} \le \sqrt{a+b}\sqrt{c+a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}\left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right) \le \sqrt{(a+b)(a+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \frac{a}{a + \sqrt{a}\left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} \le \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \le \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \le 1$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = b = c > 0$

Bài 16

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} \ge \frac{9r^2}{R^2}$$

GIẢI

Ta có:

- $(h_a + h_b + h_c)\underbrace{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)}_{\frac{1}{r}} \ge 9 \quad \Rightarrow \quad (h_a + h_b + h_c) \ge 9$

- $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$

$$\le 4R^2\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right)$$

$$\le 4R^2\frac{9}{4} = 9R^2$$

Theo BĐT bunhiacopski:

$$(9r)^2 \le \left(\frac{h_a}{\sqrt{bc}}\sqrt{bc} + \frac{h_b}{\sqrt{ca}}\sqrt{ca} + \frac{h_c}{\sqrt{ab}}\sqrt{ab}\right)^2$$

$$\le \left(\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_b^2}{ab}\right)(ab + bc + ca)$$

$$\le 9R^2\left(\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_b^2}{ab}\right)$$

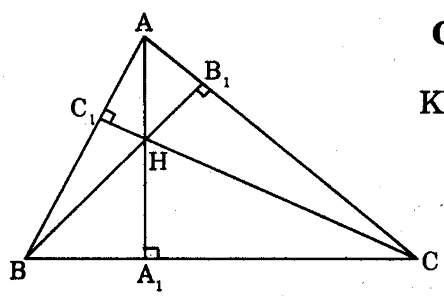
$$\Rightarrow \frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} \ge \frac{9r^2}{R^2}$$

Bài 17

Cho ΔABC nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là ba đường cao với H là trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \ge 2\sqrt{3}\left(HA_1 + HB_1 + HC_1\right)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Không giảm tính tổng quát, ta xem:

$$a \le b \le c$$
$$\Leftrightarrow A \le B \le C$$
$$\Leftrightarrow \cos A \ge \cos B \ge \cos C$$

Hơn nữa, ta có: $HA_1 = A_1C\cot gB = AC\cos C.\cot gB$

$$= 2R\sin B\cos C\frac{\cos B}{\sin B} = 2R\cos B.\cos C$$

Chứng minh tương tự:

$$HB_1 = 2R\cos C.\cos A$$

$$HC_1 = 2R\cos A.\cos B$$

Do đó: $HA_1 \le HB_1 \le HC_1$

Theo BĐT Trebưsep:

$$(a+b+c)(HA_1 + HB_1 + HC_1) \le 3\Big(\underbrace{a.HA_1 + b.HB_1 + c.HC_1}_{6S}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{HA_1 + HB_1 + HC_1}{a+b+c} \le \frac{6S}{4p^2}$$

$$\le \frac{3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2p^2}$$

$$\le \frac{3\sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3}}{2p^2}$$

(BĐT Cauchy)

$$\le \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Vậy: $2\sqrt{3}(HA_1 + HB_1 + HC_1) \le a+b+c$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Bài 18

Cho ΔABC nhọn có $AB, BC, CA \le 1$. Chứng minh rằng:

$$\sin\frac{A}{2}(3-\cos A) + \sin\frac{B}{2}(3-\cos B) + \sin\frac{C}{2}(3-\cos C) \ge \frac{7\sqrt{3}}{2}r + 2$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

$$VT = 2\sin\frac{A}{2}\left(1+\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\sin\frac{B}{2}\left(1+\sin^2\frac{B}{2}\right) + 2\sin\frac{C}{2}\left(1+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right) + 2\left(\sin^3\frac{A}{2}+\sin^3\frac{B}{2}+\sin^3\frac{C}{2}\right)$$

mà

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} \le 2\sin\frac{C}{2}$$

Chứng minh tương tự

$$\cos B + \cos C \le 2\sin\frac{A}{2}$$

$$\cos C + \cos A \le 2\sin\frac{B}{2}$$

Do đó:

$$1+\frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C \le \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

Mặt khác:

$$\sin^3\frac{A}{2}+\sin^3\frac{B}{2}+\sin^3\frac{C}{2} \ge 3\sqrt[3]{\sin^3\frac{A}{2}+\sin^3\frac{B}{2}+\sin^3\frac{C}{2}}$$

$$\ge 3\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{3r}{4R}$$

Do đó: $VT \ge 2\left(\frac{1+r}{R}\right) + 2\frac{r}{4R} = 2 + \frac{7r}{2R}$

Do $a, b, c \le 1$, ΔABC nhọn.

Giả sử $\text{Max}\{a,b,c\} = a \le 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \le A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin A < 1$

$$\Rightarrow 1 \ge a^2 = 4R^2\sin^2 A \ge 3R^2$$

$$\Rightarrow R \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow VT \ge 2 + \frac{7\sqrt{3}}{2}r$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều cạnh bằng 1

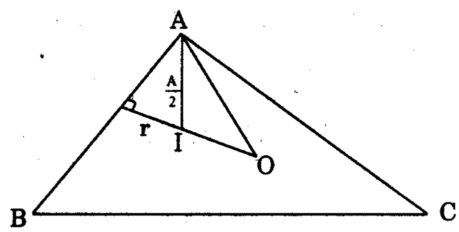
Bài 19

Gọi I và O là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp ΔABC không đều. Chứng minh rằng:

$$\widehat{AIO} \le 90° \leftrightarrow 2BC \le AB + AC$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI:



Ta có: $\widehat{AIO} \le 90°$

$\Leftrightarrow \; AO^2 \le IO^2 + IA^2$

$\Leftrightarrow \; R^2 \le R^2 - 2Rr + \dfrac{r^2}{\sin^2 \dfrac{A}{2}}$ *(Do công thức Euler)*

$\Leftrightarrow \; 2R \le \dfrac{r}{\sin^2 \dfrac{A}{2}}$

$\Leftrightarrow \; 1 - \cos A \le \dfrac{r}{R} = \dfrac{S}{p.R}$

$\Leftrightarrow \; 1 - \cos A \le \dfrac{bc.\sin A}{R(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow \; 1 - \cos A \le \dfrac{2bc\sin^2 A}{2R\sin A(a+b+c)} = \dfrac{2bc\sin^2 A}{a(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow \; a(a+b+c) \le 2bc(1+\cos A)$

$\Leftrightarrow \; a(a+b+c) \le 2bc + b^2 + c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow \; a(a+b+c) \le (b+c)^2 - a^2$

$\Leftrightarrow \; 2a \le b + c$

Bài 20

Cho ΔABC, M nằm trong ΔABC. Đặt MA = x, MB = y, MC = z. Gọi p, q, r là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng:

a) $x \ge \dfrac{cq + br}{a}$ b) $x + y + z \ge 2(p + q + r)$

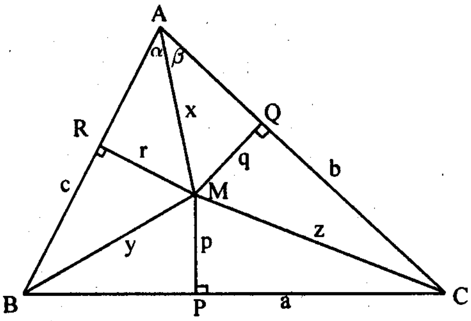
c) $\dfrac{q + r}{q + 2x + r} + \dfrac{r + p}{r + 2y + p} + \dfrac{p + q}{p + 2z + q} \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{p + r} + \dfrac{y}{r + p} + \dfrac{z}{p + q}\right)$

d) $ax + by + cz \ge 2(ap + bq + cr)$

e) $x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \ge 2^\alpha\left(p^\alpha + q^\alpha + r^\alpha\right), \quad \forall\alpha \in [0,1]$

(BĐT Paul Edos)

GIẢI



a) Ta có: $x \ge \dfrac{cq + br}{a}$

$\Leftrightarrow \quad x\sin A \ge q\sin C + r\sin B$ *(Do định lý hàm sin)*

$\Leftrightarrow \quad x^2\sin^2 A \ge q^2\sin^2 C + r^2\sin^2 B + 2qr\sin B.\sin C \quad (1)$

Hơn nữa: $(x\sin A)^2 = QR^2 = r^2 + q^2 + 2rq\cos A$

$\Rightarrow \quad x^2\sin^2 A = r^2 + q^2 + 2rq\cos A$

Do đó:

$(1) \Leftrightarrow \quad r^2\cos^2 B + q\cos^2 C + 2rq(\cos A - \sin B.\sin C) \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad r^2\cos^2 B + q\cos^2 C - 2rq\cos B.\cos C \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (r\cos B - q\cos C)^2 \ge 0$ *(luôn đúng)*

$\Rightarrow$ câu a được chứng minh

b) Chứng minh tương tự như câu a, ta có:

$$y \geq \frac{ar + cp}{b}$$

$$z \geq \frac{aq + bp}{c}$$

Do đó: $$x + y + z \geq p\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + q\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + r\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$$

$$\geq 2(p + q + r)$$

c) Đặt: $\begin{cases} \widehat{MAB} = \alpha \\ \widehat{MAC} = \beta \end{cases}$

Ta có: $$\frac{r + q}{q + 2x + q} = \frac{x(\sin\alpha + \sin\beta)}{x(\sin\alpha + \sin\beta + 2)}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Do: $$0 < 1 + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1 + \sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{r + q}{r + 2x + q} \leq 1 - \frac{1}{1 + \sin\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{r + q}{r + 2x + q} + \frac{r + p}{r + 2y + p} + \frac{p + q}{p + 2z + q}$$

$$\leq 3 - \left[\frac{1}{1 + \sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\frac{C}{2}}\right]$$

Hơn nữa:

$$\left(3+\underbrace{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}_{\le\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\right)\ge 9$$

(Do BĐT Cauchy)

$$\Rightarrow \frac{9}{2}\left(\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\right)\ge 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\ge 2$$

$$\Rightarrow \frac{r+q}{r+2x+q}+\frac{r+p}{r+2y+p}+\frac{p+q}{p+2z+q}\le 1 \quad (1)$$

Ta lại có:

$$\frac{x}{q+r}=\frac{1}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\ge\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{x}{q+r}+\frac{y}{r+p}+\frac{z}{p+q}\right)\ge\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)\ge 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ c được chứng minh

d) Trong ΔAMP, ta có:

$$AM+mp\ge Ap\ge ha$$
$$\Leftrightarrow x+p\ge ha$$
$$\Leftrightarrow ax+ap\ge aha$$

Chứng minh tương tự:

$$by+bq\ge bhb$$
$$cz+cr\ge chc$$

$$\Rightarrow\ ax + by + cz + \underbrace{ap + bq + cr}_{2S} \geq \underbrace{aha + bhb + chc}_{6S}$$

$$\Rightarrow\ ax + by + cz \geq 2(ap + bq + cr)$$

e) **Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:**

$$(X + Y)^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}(X^{\alpha} + Y^{\alpha}),\ \forall \begin{cases} X, Y > 0 \\ 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

Quả vậy:

$$(3) \Leftrightarrow \left(\frac{X}{Y} + 1\right)^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}\left(\left(\frac{X}{Y}\right)^{\alpha} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}(a^{\alpha} + 1) \ \text{(với } a = \frac{X}{Y} \geq 0\text{) (4)}$$

Xét: $f_{(a)} = (a + 1)^{\alpha} - 2^{\alpha-1}(a^{\alpha} + 1) \quad , a > 0$

Ta chỉ cần xét $0 < \alpha < 1$(vì $\alpha = 1$ **thì (3) hiển nhiên đúng)**

$$f'_{(a)} = \alpha(a + 1)^{\alpha-1} - \alpha.a^{\alpha-1}.2^{\alpha-1}$$

$$= \alpha\left[(a + 1)^{\alpha-1} - (2a)^{\alpha-1}\right]$$

$$= 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Bảng xét dấu:

a	$0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad +\infty$
$f'_{(a)}$	$- \qquad 0 \qquad +$
$f_{(a)}$	$\searrow \ 0 \ \nearrow$

Từ đó suy ra $f_{(a)} \geq 0, \forall a > 0$, như vậy bổ đề được chứng minh xong.

Theo câu a, ta có:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{cq+br}{a} \\ y \geq \dfrac{ar+cp}{b} \\ z \geq \dfrac{aq+bp}{c} \end{cases}$$

Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$x^{\alpha} \geq \left(\frac{cq+br}{a}\right)^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}\left[\left(\frac{br}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{cq}{a}\right)^{\alpha}\right]$$

Chứng minh tương tự:

$$y^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}\left[\left(\frac{ar}{b}\right)^{\alpha} + \left(\frac{cp}{b}\right)^{\alpha}\right]$$

$$z^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}\left[\left(\frac{aq}{c}\right)^{\alpha} + \left(\frac{bp}{c}\right)^{\alpha}\right]$$

$$x^{\alpha} + y^{\alpha} + z^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}p^{\alpha}\left[\left(\frac{b}{c}\right)^{\alpha} + \left(\frac{c}{b}\right)^{\alpha}\right] + 2^{\alpha-1}q^{\alpha}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\alpha}\right]$$

$$+ 2^{\alpha-1}r^{\alpha}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}\right]$$

$$\geq 2^{\alpha}\left(p^{\alpha} + q^{\alpha} + r^{\alpha}\right)$$

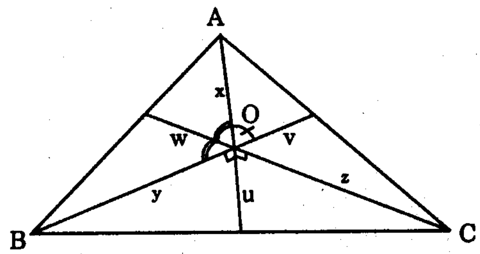
Bài 21

Cho ΔABC. O là điểm tùy ý trong tam giác.
Đặt $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Gọi u, v, w tương ứng là độ dài các đường phân giác trong của các góc $\widehat{BOC}, \widehat{COA}, \widehat{AOB}$ trong các tam giác BOC, COA, AOB. Chứng minh rằng:

$$OA = x, OB = y, OC = z$$

(BĐT Paul Edos mở rộng)

GIẢI



Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ thì

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq 2(qr\cos\alpha + rp\cos\beta + pq\cos\gamma),\ \forall p, q, r \in \mathbb{R}$$

Quả vậy: $p^2 + q^2 + r^2 - 2(qr\cos\alpha + rp\cos\beta + pq\cos\gamma)$

$$= (\sin^2\beta + \cos^2\beta)p^2 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)q^2$$

$$+ r^2 - 2qr\cos\alpha - 2rp\cos\beta + 2pq\cos(\alpha+\beta)$$

$$= \left[r^2 + (p\cos\beta)^2 + (q\cos\alpha)^2 - 2r(p\cos\beta) - 2r(q\cos\alpha)\right.$$

$$\left. + 2(p\cos\beta)(q\cos\alpha)\right] + \left[(p\sin\beta)^2 + (q\sin\alpha)^2 + 2pq\sin\alpha\sin\beta\right]$$

$$= (r - p\cos\beta - q\cos\alpha)^2 + (p\sin\beta - q\sin\alpha)^2 \geq 0$$

(luôn đúng)

$\Rightarrow$ Bổ đề được chứng minh

Trở lại bài toán.

Đặt $\widehat{BOC} = 2\alpha$, $\widehat{COA} = 2\beta$, $\widehat{AOB} = 2\gamma$

($\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$)

Theo công thức tính độ dài đường phân giác trong tam giác, ta có:

$$u = \frac{2yz\cos\alpha}{y+z},\ v = \frac{2zx\cos\beta}{z+x},\ w = \frac{2xy\cos\gamma}{x+y}$$

Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$x + y + z = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{z}\right)^2$$

$$\geq 2\left(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma\right)$$

$$\Rightarrow\ x+y+z \ge \sqrt{yz}.u.\frac{y+z}{yz} + \sqrt{zx}.v.\frac{z+x}{zx} + \sqrt{xy}.w.\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$$

$$\ge 2(u+v+w)$$

Vậy: $x+y+z \ge 2(u+v+w)$

Bài 22

Cho ΔABC thỏa $2tgB = tgA + tgC$. Chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos C \le \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

(Đề thi học sinh giỏi TPHCM)

GIẢI

Ta có: $2tgB = tgA + tgC$

$$= \frac{\sin(A+C)}{\cos A.\cos C} = \frac{\sin B}{\cos A.\cos C}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos B = 2\cos A.\cos C = \cos(A+C) + \cos(A-C)$$

$$= -\cos B + \cos(A-C)$$

$$\Leftrightarrow\ -2\cos B + \cos(A-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cos(A+C) + \cos(A-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(2\cos^2\frac{A+C}{2} - 1\right) + 2\cos^2\frac{A-C}{2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{3}{2} = 2\cos^2\frac{A+C}{2} + \cos^2\frac{A-C}{2} \ge 2\sqrt{2}\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \ge 2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2} = \cos A + \cos C$$

$$\Leftrightarrow\ \cos A + \cos C \le \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Bài 23

Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$T = \sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2}$$

(Đề thi Olympic 30-4)

GIẢI

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\sin^6\frac{A}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \geq 3\sin^2\frac{A}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^6\frac{A}{2} + \frac{1}{32} \geq \frac{3}{16}\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow T + \frac{3}{32} \geq \frac{3}{16}\left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\geq 3\left[3 - (\cos A + \cos B + \cos C)\right]$$

$$\geq \frac{3}{32}\left[3 - \frac{3}{2}\right] = \frac{9}{64} \quad (\text{vì } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{3}{64}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Vậy: $\text{Min}T = \dfrac{3}{64}$

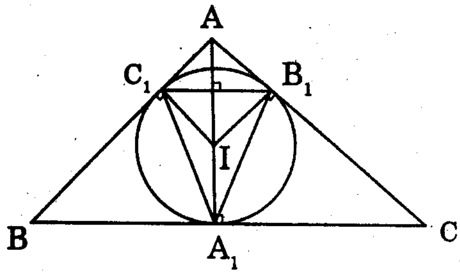
Bài 24

Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Đặt $B_1C_1 = a_1, C_1A_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2}\right) \geq 36$$

(Đề thi Olympic 30-4)

GIẢI



Ta có:

$$a_1 = 2AC_1 \sin\frac{A}{2}$$

$$= 2(p-a)\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow a_1^2 = (b+c-a)^2\frac{1-\cos A}{2}$$

$$= (b+c-a)^2\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}$$

$$= \frac{(b+c-a)^2\left[a^2-(b-c)^2\right]}{4bc}$$

$$= \frac{(b+c-a)^2(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

$$= \frac{\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}{4bc} \le \frac{bc}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} \ge \frac{4}{bc}$$

Chứng minh tương tự: $\dfrac{1}{b_1^2} \ge \dfrac{4}{ca}$

$$\frac{1}{c_1^2} \ge \frac{4}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2} \ge 4\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$\ge 4\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$\ge 4\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$$

Vậy: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{c_1^2}\right) \geq 36$

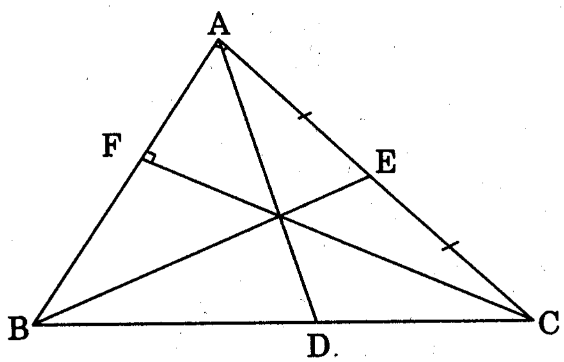
Dấu " = " $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Bài 25

Các góc của ΔABC phải thỏa mãn điều kiện gì để đường phân giác góc A, đường trung tuyến vẽ từ B và đường cao hạ từ đỉnh C cắt nhau tại một điểm.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



($\Rightarrow$) <u>Điều kiện cần:</u>

- Giả sử đường phân giác trong AD, trung tuyến BE và đường cao CF cắt nhau tại điểm I.

$\Rightarrow$ I nằm trong ΔABC.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b} \\ EC = EA \\ FA = b\cos A \\ FB = a\cos B \end{cases}$

- Theo định lý Xêva:

AD, BE, CF đồng quy $\Rightarrow \dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{EC}{EA}\cdot\dfrac{FA}{FB} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{b}.\frac{b\cos A}{a\cos B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c\cos A}{a\cos B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin C\cos A}{\sin A\cos B} = 1$$

$$\Leftrightarrow tgA = \frac{\sin C}{\cos B}$$

($\Leftarrow$) **Điều kiện đủ**

Giả sử ΔABC có $tgA = \dfrac{\sin C}{\cos B}$

Vì sinC>0 $\Rightarrow tgA.\cos B > 0$

$\Rightarrow$ A,B nhọn

$\Rightarrow$ F nằm trên đoạn AB

$$\Rightarrow \begin{cases} FA = b\cos A \\ FB = a\cos B \end{cases}$$

Do đó: $tgA = \dfrac{\sin C}{\cos B}$

$$\Leftrightarrow \frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$$

Theo định lý Xêva suy ra AD, BE, CF đồng quy hoặc song song nhau. Nhưng AD cắt BE nên suy ra AD, BE, CF đồng quy.

Bài 26

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$m_a.m_b.m_c \leq \frac{27R^3}{8}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - \cos^2 A + 1 - \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C)$$

$$= 2 - \cos^2 A + \cos A . \cos(B - C)$$

$$\le 2 - \cos^2 A + |\cos A|$$

$$\le \frac{9}{4} - \left(\cos^2 A - |\cos A| + \frac{1}{4}\right)$$

$$\le \frac{9}{4} - \left(|\cos A| - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \; a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) \le 4R^2 \frac{9}{4} \le 9R^2$$

$$\Rightarrow \; m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \le \frac{27R^2}{4}$$

$$\Rightarrow \; m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le \left(\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3}\right)^3 \le \left(\frac{27R^2}{4.3}\right)^3 \; \textit{(Do BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow \; m_a . m_b . m_c \le \frac{27}{8}R^3$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \begin{cases} |\cos A| = \dfrac{1}{2} \\ \cos A . \cos(B - C) = |\cos A| \\ m_a^2 = m_b^2 = m_c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Chú ý:

Trong ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2\left(c^2 + a^2\right) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \; m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Bài 27

Cho ΔABC có diện tích S, độ dài các cạnh là a, b, c và $n \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^n .S^n + |a-b|^{2n} + |b-c|^{2n} + |c-a|^{2n}$$

$$+ (b+c-a)^n |b-c|^n + (c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n$$

GIẢI

Để chứng minh bài toán, trước hết ta chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1:

Cho $\begin{cases} x > y \geq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$, ta luôn có: $x^m - y^m \geq (x-y)^m$

Chứng minh:

Ta có: $0 \leq \dfrac{y}{x}, \quad \dfrac{x-y}{x} \leq 1$ nên:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^m \leq \frac{y}{x}$$

$$+$$

$$\left(\frac{x-y}{x}\right)^m \leq \frac{x-y}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^m + \left(\frac{x-y}{x}\right)^m \leq 1$$

$$\Rightarrow x^m - y^m \geq (x-y)^m$$

Dấu $"=" \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ y = 0 \end{array}\right.$

Bổ đề 2:

Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$, ta luôn có:

a) $\dfrac{x^m + y^m}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m$

b) $\dfrac{x^m + y^m + z^m}{3} \geq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^m$

· Chứng minh:

a) Theo BĐT Bernoulli:

$$\left(\frac{2x}{x+y}\right)^m = \left(1 + \frac{x-y}{x+y}\right)^m \geq 1 + \frac{m(x-y)}{x+y}$$

$$+ \quad \left(\frac{2y}{x+y}\right)^m = \left(1 + \frac{y-x}{x+y}\right)^m \geq 1 + \frac{m(y-x)}{x+y}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x}{x+y}\right)^m + \left(\frac{2y}{x+y}\right)^m \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^m + y^m}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^m$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ x = y \end{array}\right.$

b) Theo BĐT câu a, ta có:

$$\frac{x^m + y^m}{2} + \frac{z^m + \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^m}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^m + \left(\frac{z + \dfrac{x+y+z}{3}}{2}\right)^m$$

$$\geq 2\left(\frac{\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{z+\dfrac{x+y+z}{3}}{2}}{2}\right)^m$$

$$\geq 2\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^m$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^m+y^m+z^m}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^m$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ x = y = z \end{array}\right.$

> ***Bổ đề 3:***
>
> Cho $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$, ta luôn có:
>
> a) $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{m}{2}} \geq x^m + y^m$
>
> b) $\dfrac{x^m+y^m}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m + \left|\dfrac{x-y}{2}\right|^m$

<u>Chứng minh:</u>

a) • Nếu $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$ thì BĐT a) hiển nhiên đúng

• Nếu $x, y > 0$, ta có: $0 < \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, \quad \dfrac{y^2}{x^2+y^2} < 1$

Do đó:

$$\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{m}{2}} \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{m}{2}} \leq \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^m + y^m}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{m}{2}}} \le 1$$

$$\Rightarrow \quad x^m + y^m \le \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{m}{2}}$$

Vậy: $x^m + y^m \le \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{m}{2}}$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

b) Theo BĐT a), ta có:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^m + \left|\frac{x-y}{2}\right|^m \le \left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left|\frac{x-y}{2}\right|^2\right]^{\frac{m}{2}}$$

$$\le \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$\le \frac{x^m + y^m}{2} \qquad \textit{(Do bổ đề 2a)}$$

Vậy: $\dfrac{x^m + y^m}{2} \ge \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m + \left|\dfrac{x-y}{2}\right|^m$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ x = y \end{array}\right.$

***Bổ đề 4*:**

Trong ΔABC. Ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

hay

$$(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) \ge S\sqrt{3}$$

(với $2p = a + b + c$)

Chứng minh:

Ta có:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[a^2-(b-c)^2\right]+\left[b^2-(c-a)^2\right]+\left[c^2-(a-b)^2\right] \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 4(p-b)(p-c)+4(p-c)(p-a)+4(p-a)(p-b) \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx \geq S\sqrt{3} \quad \text{với } \begin{cases} x=p-a>0 \\ y=p-b>0 \\ z=p-c>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$\left(\text{vì } S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}\right)$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2 \geq 0$$

BĐT cuối luôn đúng

Vậy: $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

Dấu " = " $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Quay lại bài toán

Trong ΔABC, ta luôn có: $\begin{cases} a^2-(b-c)^2>0 \\ b^2-(c-a)^2>0 \\ c^2-(a-b)^2>0 \end{cases}$

Do đó, theo BĐT1 thì:

$$a^{2n}-|b-c|^{2n} > \left[a^2-|b-c|^2\right]^n = \left[4(p-b)(p-c)\right]^n$$

$$b^{2n}-|c-a|^{2n} > \left[b^2-|c-a|^2\right]^n = \left[4(p-c)(p-a)\right]^n$$

$$c^{2n}-|a-b|^{2n} > \left[c^2-|a-b|^2\right]^n = \left[4(p-a)(p-b)\right]^n$$

$$\Rightarrow \quad a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} - |a-b|^{2n} - |b-c|^{2n} - |c-a|^{2n} \geq$$

$$\frac{\left[4(p-b)(p-c)\right]^n + \left[4(p-c)(p-a)\right]^n}{2}$$

$$+\frac{\left[4(p-c)(p-a)\right]^n + \left[4(p-a)(p-b)\right]^n}{2}$$

$$+\frac{\left[4(p-a)(p-b)\right]^n + \left[4(p-b)(p-c)\right]^n}{2}$$

$$\geq \left[\frac{4(p-b)(p-c) + 4(p-c)(p-a)}{2}\right]^n + (a+b-c)^n |a-b|^n$$

$$+\left[\frac{4(p-c)(p-a) + 4(p-a)(p-b)}{2}\right]^n + (b+c-a)^n |b-c|^n$$

$$+\left[\frac{4(p-a)(p-b) + 4(p-b)(p-c)}{2}\right]^n + (c+a-b)^n |c-a|^n$$

(Do BĐT 3b)

$$\geq \left[2(p-b)(p-c) + 2(p-c)(p-a)\right]^n$$

$$+\left[2(p-c)(p-a) + 2(p-a)(p-b)\right]^n$$

$$+\left[2(p-a)(p-b) + 2(p-b)(p-c)\right]^n + (b+c-a)^n |b-c|^n$$

$$+(c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n$$

$$\geq 3\left[\frac{4(p-a)(p-b) + 4(p-b)(p-c) + 4(p-c)(p-a)}{3}\right]^n$$

$$+(b+c-a)^n |b-c|^n + (c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n$$

(Do BĐT 2b)

$$\geq 3\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^n + (b+c-a)^n |b-c|^n + (c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n$$

(Do BĐT 4)

Vậy: $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^n S^n + |a-b|^{2n} + |b-c|^{2n} + |c-a|^{2n}$

$+ (b+c-a)^n |b-c|^n + (c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n$

Dấu " = " $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Chú ý: Trong ΔABC, ta luôn có những BĐT quen thuộc sau:

1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ *(Đề thi Olympic Toán Quốc tế lần 3)*

2) $ab + bc + ca \geq 4S\sqrt{3}$

3) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

4) $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$ *(Đề thi ĐHDL Hùng Vương, năm 2000)*

5) $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^n S^n + (a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n}$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ", số trong năm 1997)

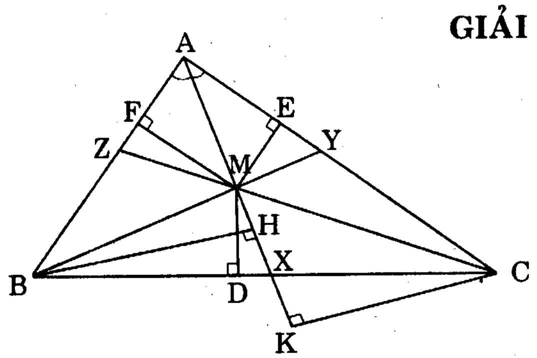
Bài 28

Cho ΔABC đều, từ điểm M nằm trong ΔABC kẻ MA, MB, MC cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB.

Chứng minh rằng: $S_{\Delta DEF} \geq S_{\Delta XYZ}$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Đặt $\begin{cases} x = S_{\Delta MBC} \\ y = S_{\Delta MCA} \\ z = S_{\Delta MAB} \end{cases}$

Khi đó: $\quad x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad (*)$

Gọi H, K là hình chiếu của B, C xuống AM, ta có:

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BH}{CK} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta MCA}} = \frac{z}{y}$$

Chứng minh tương tự: $\dfrac{CY}{AY} = \dfrac{x}{z}$

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{y}{x}$$

Suy ra: $\dfrac{S_{\Delta AYZ}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{AZ.AY}{AB.AC}$

$$= \frac{AZ.AY}{(AZ + BZ)(AY + CY)}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{BZ}{AZ}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{CY}{AY}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{x}{y}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{x}{z}} = \frac{yz}{(x + y)(x + z)}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{S_{\Delta BZX}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{zx}{(y + z)(y + x)}$$

$$\frac{S_{\Delta CXY}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{xy}{(z + y)(z + y)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta XYZ}}{S_{\Delta ABC}} = 1 - \frac{xy}{(z + x)(z + y)} - \frac{yz}{(x + y)(x + z)} - \frac{zx}{(y + z)(y + x)}$$

$$= 1 - \frac{xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

$$= \frac{2xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

Hơn nữa, từ (*) suy ra:

$$x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = x\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right) + y\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}\right) + z\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}\right)$$

$$= (x + y + z)\overrightarrow{OM} \quad \textit{(trong đó O là tâm } \Delta ABC\textit{)}$$

$$\Rightarrow (x + y + z)^2 OM^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)R^2 + 2xy.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2yz.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2zx.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$

(trong đó OA = R)

$$= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)R^2 - xy.R^2 - yz.R^2 - zx.R^2$$

$$= \left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right)R^2$$

$$\Rightarrow \frac{OM^2}{R^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}{(x + y + z)^2}$$

Do đó, theo công thức Euler:

$$\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right) = \frac{3(xy + yz + zx)}{4(x + y + z)^2}$$

Từ đó, suy ra: $S_{\Delta DEF} \geq S_{\Delta XYZ}$

$$\Leftrightarrow \frac{3(xy + yz + zx)}{4(x + y + z)^2} \geq \frac{2xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

$$\Leftrightarrow 8xyz(x + y + z)^2 \leq 3(xy + yz + zx)(x + y)(y + z)(z + x)$$

Bất đẳng thức cuối đúng, vì:

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x) \geq (x + y)(y + z)(z + x) + xyz \geq (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x)(xy + yz + zx) \geq (x + y + z)(xy + yz + zx)^2 \geq (x + y + z)3xyz(x + y + z) \geq 3xyz(x + y + z)^2$$

$$\Rightarrow 3(x + y)(y + z)(z + x)(xy + yz + zx) \geq 8xyz(x + y + z)^2$$

$\Rightarrow$ (Đpcm)

Bài 29

Xác định tính chất của ΔABC nếu A, B, C thỏa:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^3 A + \sin A}{\left[\sin^2(B+C) - \sin(B+C) + 1\right]^2} = 2 \quad (1) \\ \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}.\cos^2\dfrac{B}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}.\cos^2\dfrac{C}{2} = 1 - 2\cos^2\dfrac{B+C}{2} \quad (2) \end{cases}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:

(1) $\Leftrightarrow \sin^3 A + \sin A = 2\left(\sin^2 A - \sin A + 1\right)^2$

$\Leftrightarrow \sin^3 A + \sin A = 2\left(\sin^4 A + \sin^2 A + 1 - 2\sin^3 A + 2\sin^2 A - 2\sin A\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin^4 A - 5\sin^3 A + 6\sin^2 A - 5\sin A + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin A - 1)^2\left(2\sin^2 A - \sin A + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin A = 1 \Leftrightarrow A = 90°$

(2) $\Leftrightarrow \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\cos^2\dfrac{B}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\cos^2\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{C}{2}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{B}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\dfrac{C}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}.\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow B = C$

Vậy ΔABC có các góc thỏa mãn các hệ đã cho là tam giác vuông cân tại A.

Bài 30

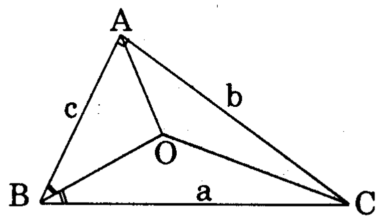
Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. R_1, R_2, R_3, R, lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OCA, OAB, ABC. r là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC và a, b, c tương ứng là độ dài các cạnh ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{R_1^2}{a^2}+\frac{R_2^2}{b^2}+\frac{R_3^2}{c^2}\le\frac{R}{2r}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:



$$2R_1=\frac{BC}{\sin\widehat{BOC}}=\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow\ R_1^2=\frac{a^2}{4\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{a^2}{2(1+\cos A)}$$

$$=\frac{a^2}{2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=\frac{a^2bc}{(b+c)^2-a^2}=\frac{a^2bc}{4p(p-a)}$$

(với $2p=a+b+c$)

$$\Rightarrow\ \frac{4R_1^2}{a^2}=\frac{bc}{p(p-a)}$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{4R_2^2}{b^2}=\frac{ca}{p(p-b)}$$

$$\frac{4R_3^2}{c^2}=\frac{ab}{p(p-c)}$$

Do đó: $4\left(\frac{R_1^2}{a^2}+\frac{R_2^2}{b^2}+\frac{R_3^2}{c^2}\right)$

$$=\frac{bc(p-b)(p-c)+ca(p-c)(p-a)+ab(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\le \frac{bc\frac{a^2}{4} + ca\frac{b^2}{4} + ab\frac{c^2}{4}}{S^2}$$

$$\le \frac{\frac{1}{4}abc(a+b+c)}{S^2}$$

$$\le \frac{\frac{1}{4}4RS\frac{2S}{r}}{S^2}$$

$$\le \frac{2R}{r}$$

Vậy: $\frac{R_1^2}{a^2} + \frac{R_2^2}{b^2} + \frac{R_3^2}{c^2} \le \frac{R}{2r}$

Dấu " = " $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Bài 31

Cho $\alpha > 1$. A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm giá trị lớn nhất của:

$$Q = \frac{(\sin A)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin B)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin C)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(\cos\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos\frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Trước hết ta chứng minh bổ đề:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha} \le \frac{a^{\alpha} + b^{\alpha}}{2}, \forall a, b > 0 \quad (*)$$

Quả vậy:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{2a}{a+b}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{\alpha} \ge 2 \quad (**)$$

Theo BĐT Bernoulli:

$$\left(\frac{2a}{a+b}\right)^{\alpha} = \left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^{\alpha} \geq 1+\alpha.\frac{a-b}{a+b}$$

$$\left(\frac{2b}{a+b}\right)^{\alpha} = \left(1+\frac{b-a}{a+b}\right)^{\alpha} \geq 1+\alpha.\frac{b-a}{a+b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2a}{a+b}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{\alpha} \geq 2 \quad \Rightarrow (**) \text{ đúng}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow a = b \quad \Rightarrow (*)$ đúng

Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$\left(\frac{(\sin A)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin B)^{\frac{1}{\alpha}}}{2}\right)^{\alpha} \leq \frac{\sin A + \sin B}{2} = \cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} \leq \cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\sin\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin B)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 2\left(\cos\frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow A = B$

Chứng minh tương tự:

$$(\sin C)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin A)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 2\left(\cos\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow C = A$

$$(\sin B)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin C)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 2\left(\cos\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow B = C$

$$\Rightarrow (\sin A)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin B)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin C)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\cos\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos\frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$\Leftrightarrow Q \leq 1$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy: Max $Q = 1$ ($\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều)

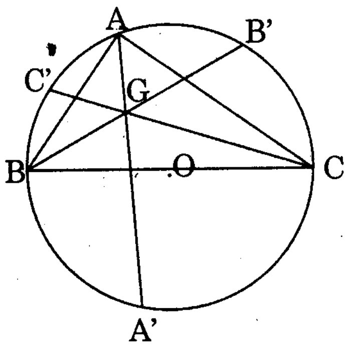
Bài 32

Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi G là trọng tâm tam giác. Giả sử GA, GB, GC kéo dài gặp đường tròn nói trên tại A', B', C' tương ứng. Chứng minh:

$$\frac{1}{GA'^2}+\frac{1}{GB'^2}+\frac{1}{GC'^2}=\frac{27}{a^2+b^2+c^2},$$

trong đó BC = a, AB = b, AC = c

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Theo công thức tính đường trung tuyến, ta có:

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}\left(ma^2+mb^2+mc^2\right)$$

$$=\frac{4}{9}.\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Hơn nữa:

$$OA^2+OB^2+OC^2=\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3R^2=3OG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

$$=3OG^2+\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow P_{G/(0)}=OG^2-R^2=-\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Hơn nữa: $P_{G/(0)}=\overline{GA}.\overline{GA'}\Rightarrow\dfrac{1}{GA'^2}=\dfrac{GA^2}{P^2_{G/(0)}}$

$$\Rightarrow\frac{1}{GA'^2}+\frac{1}{GB'^2}+\frac{1}{GC'^2}=\frac{GA^2+GB^2+GC^2}{P^2_{G/(0)}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\frac{1}{81}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}=\frac{27}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 33

Cho ΔABC nhọn. Chứng minh rằng:

Nếu: $\sqrt{\dfrac{\cos A}{\sin B.\sin C}}+\sqrt{\dfrac{\cos B}{\sin C.\sin A}}+\sqrt{\dfrac{\cos C}{\sin A.\sin B}}=\sqrt{6}$

thì ΔABC đều.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:

$$\cos A = -\cos(B+C) = -\cos B.\cos C + \sin B.\sin C$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A}{\sin B.\sin C} = 1 - \cot gB.\cot gC$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\cos A}{\sin B.\sin C}}+\sqrt{\frac{\cos B}{\sin C.\sin A}}+\sqrt{\frac{\cos C}{\sin A.\sin B}}$$

$$= \sqrt{1-\cot gB.\cot gC}+\sqrt{1-\cot gC.\cot gA}+\sqrt{1-\cot gA.\cot gB}$$

$$\le \sqrt{3}.\sqrt{3-(\cot gA.\cot gB+\cot gB.\cot gC+\cot gC.\cot gA)} = \sqrt{6}$$

(*vì* $\cot gA.\cot gB + \cot gB.\cot gC + \cot gC.\cot gA = 1$)

Dấu " = " $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

$\Rightarrow$ (Đpcm)

Bài 34

Cho ΔABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp R = 1

và $\dfrac{\sin A}{ma}+\dfrac{\sin B}{mb}+\dfrac{\sin C}{mc}=\sqrt{3}$

Chứng minh rằng: ΔABC đều.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Theo định lý hàm sin, ta có:

$$\frac{\sin A}{ma}+\frac{\sin B}{mb}+\frac{\sin C}{mc}=\frac{a^2}{2a.ma}+\frac{b^2}{2b.mb}+\frac{c^2}{2c.mc}$$

mà: $$\frac{a^2}{2a\,.ma}=\frac{\sqrt{3}.a^2}{\sqrt{3a\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}}\geq\frac{\sqrt{3}.a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

(Do BĐT Cauchy)

Do đó:

$$\frac{\sin A}{ma}+\frac{\sin B}{mb}+\frac{\sin C}{mc}\geq\frac{\sqrt{3}.a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{\sqrt{3}.b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{\sqrt{3}.c^2}{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 35

Chứng minh rằng: $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\geq\frac{9\sqrt{3}}{2p}$

Trong đó: p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của ΔABC. Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh ΔABC.

Ta có: $abc = 4R.S = 4Rrp$ (với $S = S_{\Delta ABC}$)

Theo bất đẳng thức Cauchy:

- $(2p)^3=(a+b+c)^3\geq 27abc = 27.4Rrp$

  $\Rightarrow\ p^2\geq\frac{27}{2}Rr\quad(1)$

- $r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$

$$\leq \frac{\sqrt{p\left(\frac{(p-a+p-b+p-c)}{3}\right)^3}}{p} = \frac{p}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad p \geq 3\sqrt{3}.r \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow \quad p^3 \geq \frac{81\sqrt{3}}{2}Rr^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{1}{4Rr^2}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4Rr^2}} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$$

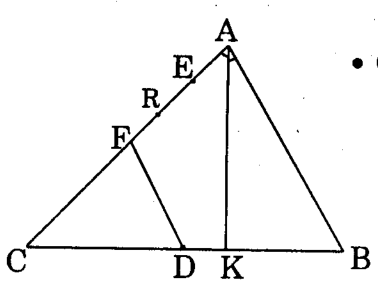
Dấu " = " $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ p - a = p - b = p - c \\ R = 2r \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 36

Cho ΔABC $(AB < AC)$ có $\widehat{A} = \alpha$. Trên cạnh AC lấy điểm R sao cho AB = RC. Gọi E, D lần lượt là trung điểm của AR và BC. Tính $\widehat{CED}$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



• Cách 1 :

Đặt $\widehat{CED} = x$, BC = a, CA = b, AB = c

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{CDE} = 150° - (c + x), \quad CD = \frac{a}{2} \\ CE = CR + RE = c + \frac{b-c}{2} = \frac{b+c}{2} \end{cases}$$

Áp dụng định lý hàm sin trong ΔCDE, ta có:

$$\frac{CE}{\sin\widehat{CDE}} = \frac{CD}{\sin\widehat{CED}} \Rightarrow \frac{b+c}{\sin(c+x)} = \frac{a}{\sin x}$$

Áp dụng định lý hàm sin trong ΔABC, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{1}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$$

Suy ra: $\dfrac{\sin A}{\sin B + \sin C} = \dfrac{\sin x}{\sin(c+x)}$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{\sin(A+C) + \sin C} = \frac{\sin x}{\sin(c+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{2\sin\left(\frac{A}{2}+C\right) + \cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin x}{\sin(c+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)} = \frac{\sin x}{\sin(C+x)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}C = \operatorname{cotg}C + \operatorname{cotg}x$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \operatorname{cotg}x$$

$$\Rightarrow x = \frac{A}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

- Cách 2:

Gọi F là trung điểm AC

$$\Rightarrow EF = CE - CF = \frac{b+c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = DF$$

$\Rightarrow$ ΔEDF cân tại F

$$\Rightarrow \Delta\widehat{CED} = \frac{1}{2}\widehat{CFD} = \frac{\alpha}{2}$$

• Cách 3:

Gọi AK là phân giác trong

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{CK}{CA} = \dfrac{a}{b+c} \\ \text{mà } \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{a}{b+c}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{CK}{CA} = \dfrac{CD}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CK} = \frac{CE}{CA}$$

$$\Rightarrow DE \parallel AK$$

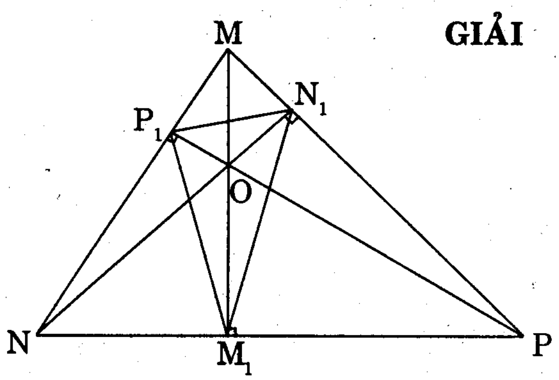
$$\Rightarrow \widehat{CED} = \frac{\alpha}{2}$$

Bài 37

Cho ΔMNP nhọn. M, N, P lưu động trên đường tròn tâm O bán kính R. Gọi M_1, N_1, P_1 là chân ba đường cao tương ứng hạ từ M, N, P. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f = \frac{(M_1N_1 + N_1P_1 + P_1M_1)^4}{MN^8 + NP^8 + PM^8}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Ta có:

$\Delta MN_1P_1 \backsim \Delta MNP$

nên: $\dfrac{N_1P_1}{NP} = \dfrac{MN_1}{MN}$

$$\Rightarrow N_1P_1 = \frac{MN_1 . NP}{MN} = NP.\cos M$$

$$= 2R\sin M\cos M$$

$$= R\sin 2M$$

Chứng minh tương tự:

$$M_1N_1 = R\sin 2P$$
$$P_1M_1 = R\sin 2N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(M_1N_1 + N_1P_1 + P_1M_1)R = \frac{1}{2}R^2(\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P)$$
$$= 2R^2 \sin M.\sin N.\sin P$$
$$= S_{\Delta MNP} \quad (1)$$

Hơn nữa:

$$MN^2 + NP^2 + PM^2 - 4S_{\Delta MNP}\sqrt{3}$$
$$= 2NP^2 + 2PM^2 - 2NP.PM\cos P - 2NP.PM\sin P\sqrt{3}$$
$$= 2\left[NP^2 + PM^2 - 2NP.PM\cos(P - 60°)\right]$$
$$\geq 2\left[2NP.PM - 2NP.PM\cos(P - 60°)\right]$$
$$\geq 4NP.PM\left[1 - \cos(P - 60°)\right] \geq 0$$
$$\Rightarrow MN^2 + NP^2 + PM^2 \geq 4S_{\Delta MNP}\sqrt{3} \quad (2)$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow$ ΔMNP đều

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski (2 lần), ta có:

$$MN^8 + NP^8 + PM^8 \geq \frac{\left(MN^2 + NP^2 + PM^2\right)^4}{27} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ $MN^8 + NP^8 + PM^8 \geq \dfrac{4^4.S_{\Delta MNP}^4}{3}$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow$ $f \leq \dfrac{3.2^4.S_{\Delta MNP}^4}{R^4.4^4.S_{\Delta MNP}^4} = \dfrac{3}{16.R^4}$

Dấu " = " $\Leftrightarrow$ ΔMNP đều

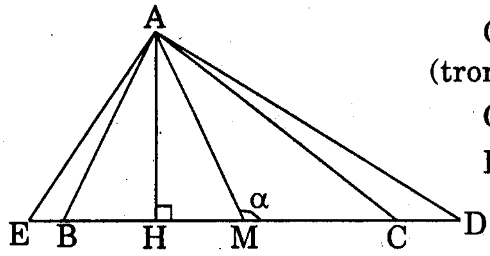
Vậy: $\text{Max } f = \dfrac{3}{16R^4}$

Bài 38

Chứng minh rằng: Với mọi tam giác ABC nhọn có diện tích $S = k > 0$ cho trước, có thể chứa trong một tam giác vuông có diện tích $S' \leq k\sqrt{3}$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Giả sử A là góc lớn nhất (trong ba góc A, B, C).

Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Do ΔABC nhọn nên:

$$AM > \frac{BC}{2}$$

Dựng đường tròn tâm M bán kính R=AM cắt BC tại E và D

$$\Rightarrow \text{ BC ở trong đoạn ED và } \begin{cases} \widehat{DAC} = 90^\circ \\ MB = MC = \dfrac{a}{2} < R \end{cases}$$

(với $a = BC$*)*

Rõ ràng ta luôn có $\text{Max}\left\{\widehat{AMC}, \widehat{AMB}\right\} \ge 90^\circ$

Giả sử có góc $\widehat{AMC} = \alpha \ge 90^\circ$

Vì A là góc lớn nhất nên: $AC \le BC$

Theo định lý hàm cos:

$$R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = MA^2 + MC^2 \le MA^2 + MC^2 - 2MA.MC.\cos\alpha = AC^2$$

$$\le BC^2 = a^2 \quad (\textit{vì } \cos\alpha \le 0)$$

$$\Rightarrow R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \le a^2$$

$$\Rightarrow R \le \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}AH.DE$$

$$\le R.AH \le AH.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}S_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ADE} \le \sqrt{3}.S_{\Delta ABC}$$

$\Rightarrow$ (Đpcm)

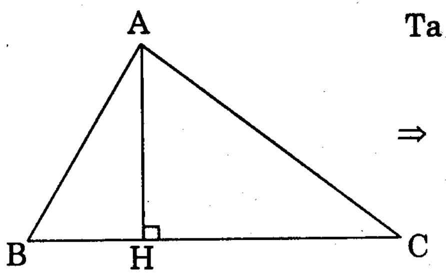
Bài 39

Cho ΔABC có AH là đường cao. Gọi p_1, p_2, p_3 lần lượt là nửa chu vi các tam giác ABC, ABH, ACH. Chứng minh rằng:

Nếu $p^2 = p_1^2 + p_2^2$ thì ΔABC vuông.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Ta có:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 \Rightarrow p > p_1, p_2$$

$\Rightarrow$ B, C là các góc nhọn.

Đặt: $\begin{cases} AH = a \\ AB = c \\ BC = a \\ CA = b \end{cases}$

Khi đó:

- $p_1 = \dfrac{1}{2}(AH + BH + AB) = \dfrac{1}{2}\left(h + h\cot gB + \dfrac{h}{\sin B}\right)$

$$= \frac{h}{2}\left(1 + \cot g\frac{B}{2}\right)$$

- $p_2 = \dfrac{1}{2}(AH + CH + AC)$

$$= \frac{1}{2}\left(h + h\cot gC + \frac{1}{\sin C}\right) = \frac{h}{2}\left(1 + \cot g\frac{C}{2}\right)$$

- $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

$$= \frac{1}{2}\left(ha.tgB + ha.tgC + \frac{h}{\sin B} + \frac{h}{\sin C}\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right)$$

Do đó: $p^2 = p_1^2 + p_2^2$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \text{cotg}\frac{B}{2}\right)^2 + \left(1 + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right) = 2\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2} - 1}{\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}\left(\frac{B+C}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow A = 90°$$

Bài 40

Cho ΔABC thỏa mãn các hệ thức: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Chứng minh rằng:

$$\text{Max}\{A, B, C\} > \frac{2\pi}{3}$$

GIẢI

Không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $A \geq B \geq C$

$$\Rightarrow \text{Max}\{A, B, C\} = A$$

Vì vậy bài toán trở thành: Chứng minh $A > \dfrac{2\pi}{3}$ (1)

Từ giả thiết đã cho, suy ra:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sqrt{3}} \leq \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

(vì $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$ *)*

$$\Rightarrow \quad \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Giả sử (1) sai, tức là } A \le \dfrac{2\pi}{3} \\ \qquad\qquad \text{Do } \quad A \ge B \ge C \;\Rightarrow\; A \ge \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} \le A \le \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \sin A \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ Vô lý

Vậy: $A > \dfrac{2\pi}{3}$

Bài 41

Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$tgA + tgB + tgC = 3\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ đều}$$

GIẢI

($\Leftarrow$) Hiển nhiên

($\Rightarrow$) Do trong ΔABC, ta luôn có:

$$\begin{cases} \sin A, \sin B, \sin C > 0 \\ \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad tgA + tgB + tgC = \frac{3(\sin A + \sin B + \sin C)}{\cos A + \cos B + \cos C} > 0$$

$$\Rightarrow \quad tgA.tgB.tgC = tgA.tgB.tgC > 0$$

$\Rightarrow \quad \Delta ABC$ nhọn

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{\Delta ABC}} + \frac{3\left(3a^2 + c^2 - b^2\right)}{4S_{\Delta ABC}}$$

$$= \frac{4a^2 + 2c^2 - b^2}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) + 2a^2}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$= \frac{4BM^2 + 2a^2}{2S_{\Delta ABC}} \geq \frac{2\sqrt{2}\,.BM.a}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{cotg}A + 3\text{cotg}\varphi \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{cotg}A \geq \frac{2\sqrt{2} - 3\sin\varphi}{\sin\varphi}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow$ $b = c\sqrt{2}$

Bài 43

Cho ΔABC. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng: $\dfrac{IA + IB + IC}{IA.IB.IC} \geq \dfrac{R + r}{2Rr^2}$ (1)

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

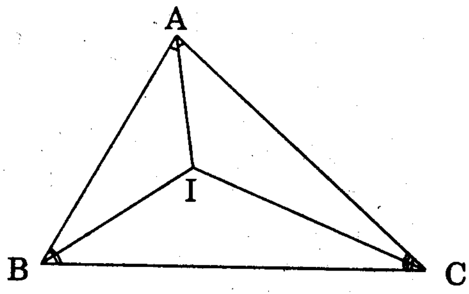
GIẢI

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 2\frac{r}{IA}.\frac{r}{IB} + 2\frac{r}{IB}.\frac{r}{IC} + 2\frac{r}{IC}.\frac{r}{IA} \leq 1 + \frac{r}{R}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$\leq \cos A + \cos B + \cos C \quad (2)$$



Ta có: $\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \geq 2$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right) \geq 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sin A.\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \sin B.\mathrm{tg}\frac{A}{2}\right) \geq 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{1}{2}\left(\sin B.\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \sin C.\mathrm{tg}\frac{B}{2}\right) \geq 2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin C.\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \sin A.\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right) \geq 2\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{VT}(2) \leq \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}(\sin B + \sin C) + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}(\sin C + \sin A) + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}(\sin A + \sin B)$$

$$\leq \cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C+A}{2}.\cos\frac{C-A}{2} + \cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\leq \cos A + \cos B + \cos C = \mathrm{VP} \quad (2)$$

Bài 44

Cho ΔABC có $A = 45°$. Kéo dài cạnh BC về phía B một đoạn BB' = BC. Kéo dài BC về phía C một đoạn CC' = BC. Đặt $\widehat{B'AB} = \alpha$, $\widehat{C'AC} = \beta$. Chứng minh rằng:

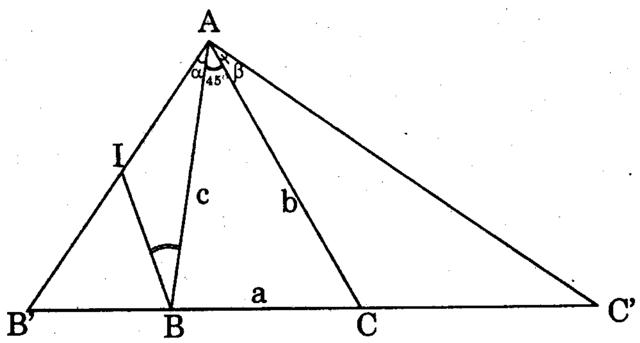
a) $(1 + \text{cotg}\alpha)(1 + \text{cotg}\beta) = 8$

b) $\text{cotg}\widehat{AB'B} + \text{cotg}\widehat{AC'C} = \dfrac{3\sqrt{2}.a^2}{bc}$

với BC = a, CA = b, AB = c

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



a) Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABB'} = S_{\Delta ACC'} = S = \dfrac{bc\sqrt{2}}{4}$

Gọi I là trung điểm cạnh AB. Khi đó:

$$\begin{cases} S_{\Delta ABI} = S_{\Delta BB'I} = \dfrac{S}{2} \\ BI \parallel AC \quad \left(\Rightarrow \widehat{ABI} = 45° \right) \end{cases}$$

Áp dụng định lý hàm cos mở rộng trong ΔABC, ta có:

$$\text{cotg}\widehat{ABI} + \text{cotg}\widehat{BAI} = \frac{AB^2 + BI^2 - AI^2}{2S} + \frac{AI^2 + AB^2 - BI^2}{2S}$$

$$= \frac{AB^2}{S} = \frac{c^2}{S} \quad \Rightarrow \quad 1 + \text{cotg}\alpha = \frac{c^2}{S}$$

Chứng minh tương tự:

$$1 + \text{cotg}\beta = \frac{b^2}{S}$$

$$\Rightarrow \ (1 + \text{cotg}\alpha)(1 + \text{cotg}\beta) = \frac{(bc)^2}{S} = 8 \ \ (vì \ \ S = \frac{bc\sqrt{2}}{4})$$

b) Áp dụng định lý hàm cos mở rộng trong $\Delta BB'I$, ta có:

$$\text{cotg}\widehat{AB'B} + \text{cotg}\widehat{IBB'}$$

$$= \frac{BB'^2 + B'I^2 + BI^2}{2S} + \frac{BB'^2 + BI^2 - B'I^2}{2S} = \frac{a^2}{S}.$$

$$\Rightarrow \ \text{cotg}\widehat{AB'B} + \text{cotg}C = \frac{a^2}{S}$$

Chứng minh tương tự:

$$\text{cotg}\widehat{AC'C} + \text{cotg}B = \frac{a^2}{S}$$

Từ đó suy ra:

$$\text{cotg}\widehat{AB'B} + \text{cotg}\widehat{AC'C} = \frac{2a^2}{S} - (\text{cotg}B + \text{cotg}C)$$

$$= \frac{2a^2}{S} - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}\right)$$

$$= \frac{3a^2}{2S} = \frac{3\sqrt{2}.a^2}{bc} \quad (vì \ S = \frac{bc\sqrt{2}}{4})$$

Bài 45

Tìm giá trị các góc α, β, γ của một tam giác, biết:

$$\sin\frac{\alpha - \beta}{2} + \sin\frac{\alpha - \gamma}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có: • $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$\Rightarrow \ 3\alpha = 3\pi - 3(\beta + \gamma) \ \Rightarrow \ \frac{3\alpha}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}(\beta + \gamma) \quad (2)$$

- $$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{4}.\cos\frac{\beta-\gamma}{4}$$

$$= 2\sin\frac{2\pi-3(\beta+\gamma)}{4}.\cos\frac{\beta-\gamma}{4}$$

$$= 2\cos\frac{3(\beta+\gamma)}{4}.\cos\frac{\beta-\gamma}{4} \quad (3)$$

Từ (2) $\Rightarrow$ $\sin\frac{3\alpha}{2} = -\cos\frac{3(\beta+\gamma)}{2}$

Đặt $u = \cos\frac{3(\beta+\gamma)}{4}$

Từ (1), (3) và (4)

$$\Rightarrow \quad 2u\cos\frac{\beta-\gamma}{4}+1-2u^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2u^2-2u\cos\frac{\beta-\gamma}{4}+\frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2-u\cos\frac{\beta-\gamma}{4}+\frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[u-\frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\beta-\gamma}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{4} \\ \sin\frac{\beta-\gamma}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{3(\beta-\gamma)}{4} = \frac{1}{2} \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{3\beta}{2} = \frac{1}{2} \\ \beta = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\beta}{2} = \frac{\pi}{2} \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\pi}{9} \\ \beta = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5\pi}{9} \\ \beta = \gamma = \frac{2\pi}{9} \end{cases}$$

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho ΔABC nhọn. h_a, h_b, h_c là các đường cao, p là nửa chu vi của nó. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3}\ \mathrm{Max}\{h_a, h_b, h_c\} \geq p$$

2. Cho một tam giác có diện tích S và gọi l_a, l_b, l_c là các đường phân giác trong. Chứng minh rằng:

$$l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a \geq 3\sqrt{3}S$$

3. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$p \leq 2R + \left(3\sqrt{3} - 4\right)r$$ *(BĐT Blulon)*

4. Cho ΔABC, BC là cạnh lớn nhất. O là một điểm tùy ý trong tam giác. AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện tại P, Q, R. Chứng minh rằng:

$$OP + OQ + OR < BC$$

5. Cho ΔABC, M nằm trong tam giác sao cho $MA = 1$, $MB = MC = 6$. Chứng minh rằng:

$$S_{\Delta ABC} \leq 10\sqrt{3}$$

6. Cho D nằm trong ΔABC nhọn sao cho:

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^\circ \text{ và } AC.BD = AD.BC$$

a) Tính tỷ số: $\dfrac{AB.CD}{AC.BD}$

b) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại C của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD và BCD vuông góc nhau.

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

7. Cho ΔABC có $A \geq B \geq C$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ha^2}{hb^2} + \frac{hb^2}{hc^2} + \frac{hc^2}{ha^2} \geq \frac{ha}{hb} + \frac{hb}{hc} + \frac{hc}{ha}$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

8. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \ tg^{2006}A + tg^{2006}B + tg^{2006}C = 3^{1004}$$

9. Cho P nằm trong ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\text{Min}\left\{\widehat{PAB}, \widehat{PBC}, \widehat{PCA}\right\} \leq 30^\circ$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

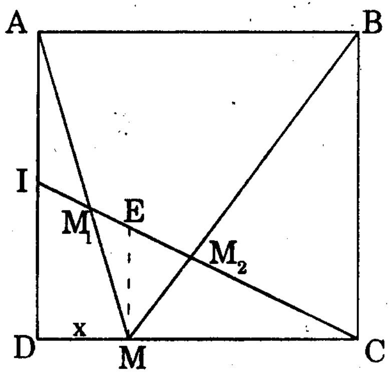
Chương III:

CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC KHÁC

Bài 1

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, I là trung điểm của AD, M là một điểm trên cạnh DC; MA và MB cắt IC lần lượt tại M_1, M_2. Đặt DM = x. Tính diện tích ΔMM_1M_2 theo x.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Dựng $ME \parallel AD$, $E \in CI$

Ta có: $\dfrac{ME}{ID} = \dfrac{MC}{CD} = 1 - x$

$\Rightarrow ME = \dfrac{1}{2}(1 - x)$

Mặt khác:

- $\dfrac{MM_1}{AM_1} = \dfrac{ME}{AI}$

$$\Rightarrow \frac{MM_1}{AM} = \frac{MM_1}{AM_1 + M_1M} = \frac{ME}{AI + ME} = \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1-x}{2}}$$

$$= \frac{1-x}{2-x} \quad (1)$$

- $\dfrac{MM_2}{BM_2} = \dfrac{ME}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{MM_2}{BM} = \frac{MM_2}{BM_2 + M_2M} = \frac{ME}{BC + ME} = \frac{\frac{1-x}{2}}{1 + \frac{1-x}{2}} = \frac{1-x}{3-x} \quad (2)$$

7. Cho ΔABC có $A \geq B \geq C$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ha^2}{hb^2} + \frac{hb^2}{hc^2} + \frac{hc^2}{ha^2} \geq \frac{ha}{hb} + \frac{hb}{hc} + \frac{hc}{ha}$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

8. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow tg^{2006}A + tg^{2006}B + tg^{2006}C = 3^{1004}$$

9. Cho P nằm trong ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\text{Min}\left\{\widehat{PAB}, \widehat{PBC}, \widehat{PCA}\right\} \leq 30°$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

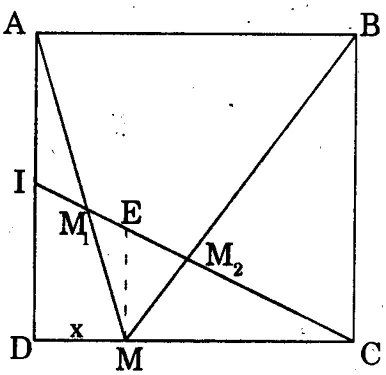
Chương III:

CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC KHÁC

Bài 1

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, I là trung điểm của AD, M là một điểm trên cạnh DC; MA và MB cắt IC lần lượt tại M_1, M_2. Đặt DM = x. Tính diện tích ΔMM_1M_2 theo x.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Dựng $ME \parallel AD$, $E \in CI$

Ta có: $\dfrac{ME}{ID} = \dfrac{MC}{CD} = 1 - x$

$$\Rightarrow ME = \frac{1}{2}(1 - x)$$

Mặt khác:

- $\dfrac{MM_1}{AM_1} = \dfrac{ME}{AI}$

$$\Rightarrow \frac{MM_1}{AM} = \frac{MM_1}{AM_1 + M_1M} = \frac{ME}{AI + ME} = \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1-x}{2}} = \frac{1-x}{2-x} \quad (1)$$

- $\dfrac{MM_2}{BM_2} = \dfrac{ME}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{MM_2}{BM} = \frac{MM_2}{BM_2 + M_2M} = \frac{ME}{BC + ME} = \frac{\frac{1-x}{2}}{1 + \frac{1-x}{2}} = \frac{1-x}{3-x} \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow \frac{(1-x)^2}{(2-x)(3-x)} = \frac{MM_1.MM_2}{MA.MB} = \frac{S_{\Delta MM_1M_2}}{S_{\Delta MAB}}$$

$$= 2S_{MM_1M_2}$$

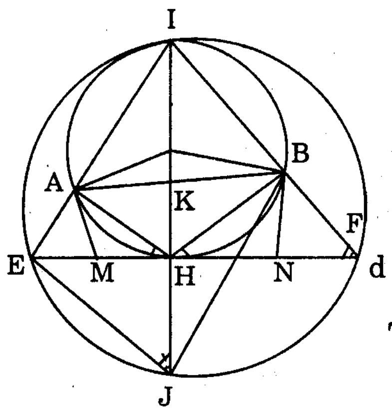
$$\text{Vậy } S_{\Delta MM_1M_2} = \frac{(x-1)^2}{2(x-2)(x-3)}$$

Bài 2

Cho đường tròn (O,R) tiếp xúc với đường thẳng d tại H cố định. M, N là hai điểm di động trên d sao cho $\overline{HM}.\overline{HN} = -k^2 (k \neq 0)$ Từ M và n kẻ hai tiếp tuyến MA và NB đến (O). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Kẻ đường kính IH của (O).

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của IA và IB với d.

Dễ dàng chứng minh được rằng:

M, N là trung điểm EH, FH.

Từ giả thiết:

$$\overline{HM}.\overline{HN} = -k^2$$

$$\Rightarrow \overline{HE}.\overline{HF} = -4k^2$$

Dựng đường tròn (EFI) cắt IH kéo dài tại J.

$$\text{Xét } P_{H/(EFI)} = \overline{HI}.\overline{HJ}$$

$$= \overline{HE}.\overline{HF}$$

$$= -4k^2$$

$\Rightarrow$ J cố định.

Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông IEH và IFH, ta có:

$$IA.IE = IB.IF = IH^2$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABFE nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IFE}$$

Do tứ giác IFJE nội tiếp, ta cũng có:

$$\widehat{IFE} = \widehat{IJE}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IJE}$$

$\Rightarrow$ AKJE nội tiếp

Xét $P_{I/(AKJE)} = \overline{IK}.\overline{IJ} = \overline{IA}.\overline{IE} = IH^2$

Do I, J cố định, IH không đổi, suy ra K cố định.

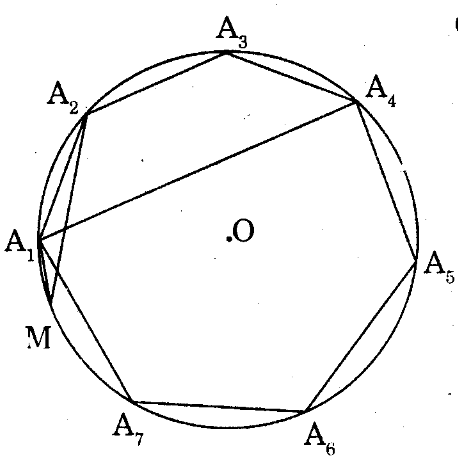
Vậy AB luôn đi qua điểm cố định K.

Bài 3

Cho thất giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thuộc cung nhỏ A_1A_7. Chứng minh rằng:

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 = MA_2 + MA_4 + MA_6 \quad (1)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Gọi R là bán kính đường tròn (O).

Đặt sđ $\overset{\frown}{A_1M} = 2\alpha$

Áp dụng định lý hàm sin trong tam giác MA_1A_2 ta có:

$$MA_1 = 2R\sin\alpha$$

Tính tương tự:

$$MA_3 = 2R\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{7}\right)$$

$$MA_5 = 2R\sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{7}\right)$$

$$MA_7 = 2R\sin\left(\frac{\pi}{7} - \alpha\right) = 2R\sin\left(\alpha + \frac{6\pi}{7}\right)$$

$$MA_2 = 2R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$MA_4 = 2R\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right)$$

$$MA_6 = 2R\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{7}\right)$$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{6\pi}{7}\right)$$

$$= 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right)\cos\frac{3\pi}{7} + 2\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right)\cos\frac{\pi}{7}$$

$$= 2\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right)\cos\frac{2\pi}{7} + \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right) > 0\right)$$

Đặt $S = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$

$$= \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{7}.S = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}$$

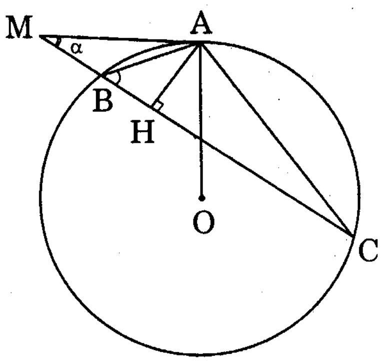
$$= \sin\frac{6\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7} \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

Vậy: (2) đúng $\Rightarrow$ (Đpcm)

Bài 4

Cho đường tròn bán kính bằng 1. A là một điểm cố định trên đường tròn. Vẽ tiếp tuyến tại A, trên tiếp tuyến đó lấy điểm M sao cho AM = 1. Một đường thẳng d quay quanh M cắt đường tròn tại B và C. Xác định vị trí của d để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Đặt $\widehat{AMB} = \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $\widehat{ABC} = \alpha + \widehat{BAM}$

mà $\widehat{BAM} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \alpha + \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 180 - \left(\alpha + 2\widehat{ACB}\right)$

Dựng AH $\perp$ BC tại H, ta có:

$$AH = AM.\sin\alpha = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.\sin\alpha \quad (\textit{với } a = BC)$$

Trong ΔABC, $\quad a = 2\sin A = 2\sin(\alpha + 2c)$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sin\alpha + \sin(\alpha + 2c)$$

Áp dụng định lý hàm sin trong ΔABM, ta có:

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin\widehat{ABM}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = c\sin\widehat{ABM} \quad (\textit{với } c = AB)$$

$$= 2\sin c.\sin(\alpha + c)$$

$$= \cos\alpha - \cos(\alpha + 2c)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + 2c) = \cos\alpha - \sin\alpha$$

$$\Rightarrow S^2_{\Delta ABC} = \sin^2\alpha.\sin^2(\alpha + 2c)$$

$$= \sin^2\alpha\left[1 - (\cos\alpha - \sin\alpha)^2\right]$$

$$= 2\sin^3\alpha.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\ S^4_{\Delta ABC} = 4\sin^6\alpha.\cos^2\alpha$$

$$= \frac{4}{3}\sin^2\alpha.\sin^2\alpha.\sin^2\alpha\left(3\cos^2\alpha\right)$$

$$\le \frac{4}{3}\left(\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha}{4}\right)^4 = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

(Do BĐT Cauchy)

$$\Rightarrow\ S_{\Delta ABC} \le \sqrt[4]{\frac{27}{64}}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow\ \sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow\ \text{tg}\alpha = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\ \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy: Max $S_{\Delta ABC} = \sqrt[4]{\dfrac{27}{64}}$ *(khi $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$)*

Bài 5

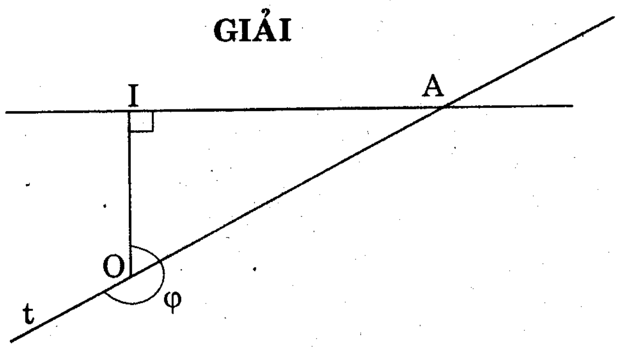
Cho n-giác đều tâm O, cạnh a (a>0). Đường thẳng (d) qua O cắt tất cả các đường thẳng chứa các cạnh của n giác đều tại $M_1, M_2, ..., M_n$. Chứng minh rằng:

$S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{OM_i^2}$ là một hằng số không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng (d).

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

a)



Trước hết ta chứng minh bổ đề:

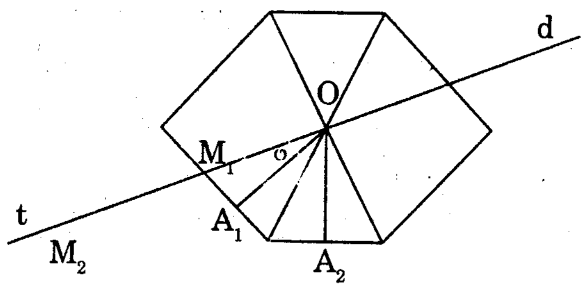
Cho tia Ot. Một đoạn OI thay đổi quanh với góc $\widehat{tOI} = \varphi \in (0, 2\pi)$

Đường thẳng vuông góc với OI tại I cắt Ot tại A

thì $|\cos\varphi| = \dfrac{OI}{OA}$ *(Dành cho bạn đọc)*

b) <u>Chứng minh bài toán</u>

Gọi Ot là một tia trên d.



$A_1, A_2, ..., A_n$ là các hình chiếu của O lên các cạnh $a_1, a_2, ..., a_n$ của đa giác đều. $M_1, M_2, ..., M_n$ là các giao điểm của d với các đường thẳng chứa các cạnh $a_1, a_2, ..., a_n$. Không giảm tính tổng quát ta giả sử $\varphi = \widehat{tOA_1}$ là góc mà khi Ot quay theo chiều ngược với kim đồng hồ gặp OA_1 đầu tiên. Khi đó:

$$\widehat{tOA_2} = \varphi + \frac{2\pi}{n}$$

....

$$\widehat{tOA_i} = \varphi + (i-1)\frac{2\pi}{n}$$

....

$$\widehat{tOA_n} = \varphi + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

Theo bổ đề trên, ta có:

$$\left|\cos\left(\varphi + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right| = \frac{OA_i}{OM_i}, \forall i = \overline{1, n}$$

Từ đó, suy ra:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{OM_i^2} = \frac{1}{OA_1^2} \sum_{i=1}^{n} \cos^2\left(\varphi + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{OA_1^2}\left[\frac{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} \cos\left(2\varphi + (i-1)\frac{4\pi}{n}\right)\right]$$

Đặt: $Q = \sum_{i=1}^{n} \cos\left(2\varphi + (i-1)\frac{4\pi}{n}\right)$

$$\Rightarrow\ 2\sin\frac{2\pi}{n} = \sum_{i=1}^{n} 2\sin\frac{2\pi}{n}.\cos\left(2\varphi + (i-1)\frac{4\pi}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\sin\left(2\varphi + (2i-1)\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(2\varphi + (2i-3)\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Đặt: $f_{(i)} = \sin\left(2\varphi + (2i-1)\frac{2\pi}{n}\right)$

$$\Rightarrow\ f_{(i-1)} = \sin\left(2\varphi + (2i-3)\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow\ Q = \sum_{i=1}^{n}\left[f_{(i)} - f_{(i-1)}\right]$$

$$= f_{(n)} - f_{(0)}$$

$$= \sin\left(2\varphi + (2n-1)\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(2\varphi - \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= 0$$

Mặt khác: $OA_1 = \dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}$

$$\Rightarrow\ S = \frac{2n.\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n}}{a^2}$$

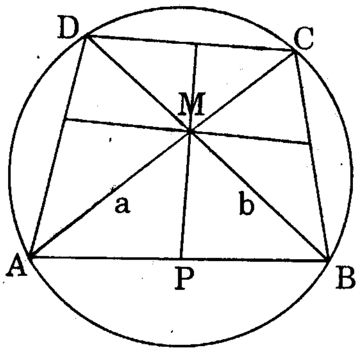
Bài 6

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O), hai đường chéo cắt nhau tại M. Qua trung điểm P của cạnh AB kẻ đường thẳng PM, qua trung điểm Q của cạnh BC kẻ đường thẳng QM. Chứng minh rằng:

Nếu $PM \perp CD$ và $MA \neq MB$ thì $QM \perp AD$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Đặt: $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = \vec{a}, & MA = a \\ \overrightarrow{MB} = \vec{b}, & MB = b \end{cases}$

Ta có: $\Delta MAB \backsim \Delta MDC$

nên: $\dfrac{MD}{MA} = \dfrac{MC}{MB} = k$

$\Rightarrow MD = k.MA, MC = k.MB$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \dfrac{kb}{a}\vec{a}$, $\overrightarrow{MD} = -\dfrac{ka}{b}\overrightarrow{MB}$

Theo giả thiết: $PM \perp CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{PM} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(b^2\vec{a} - a^2\vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow b^2a^2 + b^2.\vec{a}.\vec{b} - a^2.\vec{a}.\vec{b} - a^2b^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(a^2 - b^2\right)\vec{a}.\vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow AC \perp BD$

Bài 7

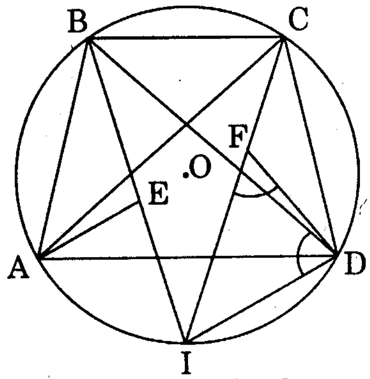
Cho tứ giác lồi ABCD có $AD = \sqrt{3}$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 60°$. E và F là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD. $EF = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Tính BC.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Vì $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 60°$ $\Rightarrow$ ABCD nội tiếp đường tròn (O)

$\Rightarrow$ Có bán kính $R = \dfrac{AD}{2\sin 60°} = 1$



Các đường thẳng BE và CF cắt nhau tại I là trung điểm cung AD của (O). Ta có:

$$\widehat{IDF} = 30^\circ + \frac{1}{2}\widehat{ADC} = \widehat{IFO}$$

$\Rightarrow$ IF = ID = 1

Chứng minh tương tự: IE = IA = 1

Khi đó:

$$EF^2 = IE^2 + IF^2 - 2IE.IF\cos\widehat{EIF}$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} = 2 - \cos\widehat{EIF}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{EIF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{EIF} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow BC = 1$$

Bài 8

Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn AB = BC, CD = DE, EF = FA.
Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Áp dụng BĐT Ptoleme cho tứ giác ACEF, ta có:

$$AC.EF + CE.AF \geq AE.CF$$

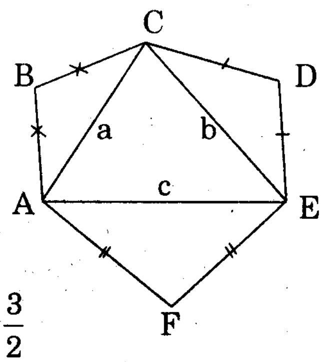
$$\Rightarrow AF(a+b) \geq c.CF$$

$$\Rightarrow \frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{c+a}$$

$$\frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}$$



$$\Rightarrow \frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ABCDEF là lục giác đều

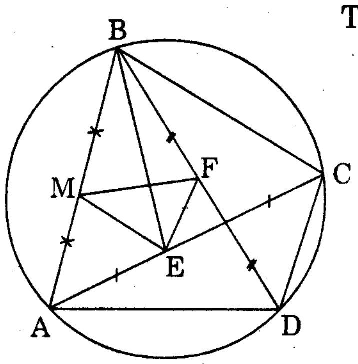
Bài 9

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn. Chứng minh rằng:

$$|AC - BD| \leq |AB - CD|$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Gọi E, F là trung điểm của AC và BD.
Theo định lý về trung tuyến, ta có:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

$$= 2BE^2 + \frac{AC^2}{2} + 2DE^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$= 2\left(BE^2 + DE^2\right) + AC^2$$

$$= 2\left(2EF^2 + \frac{BD^2}{2}\right) + AC^2$$

$$= AC^2 + BD^2 + 4EF^2 \quad (1)$$

(Hệ thức Euler)

Theo định lý Ptoleme, ta có:

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow (AC - BD)^2 + 4EF^2 = (AB - CD)^2 + (AD - BC)^2 \quad (3)$$

Hơn nữa, gọi M là trung điểm của AB, ta có:

$$EF \geq |ME - MF| = \frac{1}{2}|AD - BC|$$

$$\Rightarrow 4EF^2 \geq (AD - BC)^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4)

$$\Rightarrow (AB - CD)^2 \geq (AC - BD)^2$$

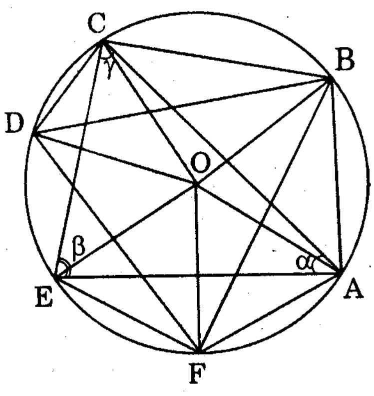
$$\Rightarrow |AB - CD| \geq |AC - BD|$$

Bài 10

Cho ABCDEF là lục giác nội tiếp trong một đường tròn và thỏa mãn điều kiện: AB = BC, CD = DE, EF = FA.

Chứng minh rằng: $S_{\Delta ACE} \leq S_{\Delta BDF}$

GIẢI



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp lục giác ABCDEF, với R là bán kính của nó.

Đặt $\begin{cases} \widehat{CAE} = \alpha \\ \widehat{AEC} = \beta \\ \widehat{ACE} = \gamma \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \alpha \\ \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \beta \\ \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = \gamma \end{cases}$

Suy ra: $S_{\Delta ACE} = 2R^2 \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma$

$$S_{\Delta BDF} = 2R^2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

$$= 2R^2 \cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}$$

Do đó: $S_{\Delta ACE} \le S_{\Delta BDF}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma \le \cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}$

$\Leftrightarrow 8\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2} \le 1$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\gamma}{2} - 4\sin\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} \ge 0$ *(Đúng)*

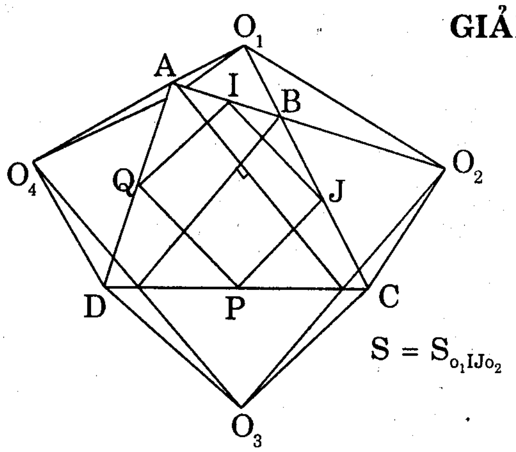
$\Rightarrow$ (Đpcm)

Bài 11

Tứ giác lồi ABCD có $AC \perp BD$ và $AC - BD = k > 0$ cho trước. Dựng về phía ngoài tứ giác các tam giác vuông cân có cạnh huyền lần lượt là AB, BC, CD, DA. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là các đỉnh của các tam giác ấy. Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác $O_1O_2O_3O_4$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Gọi I, J, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA.

Đặt $S = S_{O_1O_2O_3O_4}$

Khi đó:

$$S = S_{O_1IJO_2} + S_{O_2JPO_3} + S_{O_3PQO_4} + S_{O_4QIO_1} + S_{IJQP}$$

Hơn nữa:

$$S_{o_1IJo_2} = \frac{1}{8}\left(AB^2 + BC^2\right) + S_{\Delta BIJ} + S_{o_1Bo_2}$$

(Dấu "+" nếu $90° \le \widehat{ABC} < 180°$

"−" nếu $0° < ABC \le 90°$)

$$= \frac{1}{8}\left(AB^2 + BC^2\right) + S_{\Delta BIJ} \pm \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}AB.\frac{\sqrt{2}}{2}BC.\sin\widehat{O_1BO_2}$$

$$= S_{\Delta BIJ} + \frac{1}{8}\left(AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\widehat{ABC}\right)$$

$$= S_{\Delta BIJ} + \frac{1}{8}AC^2$$

Tính tương tự:

$$S_{o_2JPo_3} = S_{\Delta CIP} + \frac{1}{8}BD^2$$

$$S_{o_3PQo_4} = S_{\Delta DPQ} + \frac{1}{8}AC^2$$

$$S_{o_4QIo_1} = S_{\Delta AIQ} + \frac{1}{8}BD^2$$

Từ đó suy ra:

$$S = S_{ABCD} + \frac{1}{4}\left(AC^2 + BD^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}AC.BD + \frac{1}{4}\left(AC^2 + BD^2\right)$$

$$\ge \frac{1}{2}AC.BD + \frac{1}{2}AC.BD = k$$

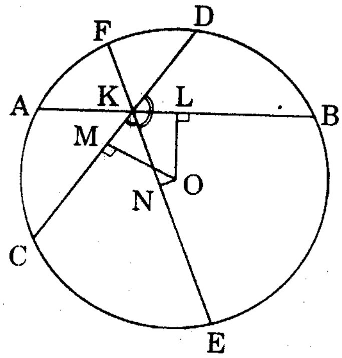
$$\Rightarrow \text{Min } S = k \quad \text{khi} \quad AC = BD = \sqrt{k}$$

Bài 12

Trong một đường tròn cho ba dây cung AB, CD và EF đồng quy tại K đôi một với nhau một góc 60°. Chứng minh rằng:

$$(KB - KA)(KB - KA + KC - KD)$$
$$= (KE - KF)(KE - KF - KC + KD)$$

GIẢI



Gọi O là tâm của đường tròn.

Đặt: $KA = a$, $KB = b$,
$KC = c$, $KD = d$,
$KE = e$, $KF = f$

Đường tròn đường kính KO cắt các dây cung AB, CD, EF tại các trung điểm L, M, N của chúng.

Vì góc giữa các dây cung là 60° nên ΔMNL đều.

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác LMK, ta có:

$$LM^2 = LK^2 + MK^2 - 2LK.MK.\cos 120^\circ$$

Hơn nữa:

$$LK = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$MK = \frac{c+d}{2} - d = \frac{c-d}{2}$$

$$\Rightarrow \ LM^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(c-d)^2 + \frac{1}{4}(b-a)(c-d)$$

Tính tương tự, ta có:

$$MN^2 = \frac{1}{4}(c \quad d)^2 + \frac{1}{4}(e-f)^2 - \frac{1}{4}(c-d)(e-f)$$

$$NL^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(e-f)^2 - \frac{1}{4}(b-a)(e-f)$$

Vì LM = MN nên:

$$(b-a)^2 + (c-a)^2 + (b-a)(c-d) = (c-d)^2 + (e-f)^2 - (c-a)(e-f)$$

$$\Rightarrow \ (b-a)(b-a+c-a) = (e-f)(e-f-c+d)$$

Bài 13

Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ thuộc đường tròn (O,1) sao cho:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

Hãy xác định vị trí điểm B thuộc mặt phẳng chứa đường tròn (O, 1) sao cho:

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} BA_i^3}{\sum_{i=1}^{n} BA_i^4} \text{ lớn nhất}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

$\forall i = 1, 2, \dots, n$, ta có:

$$BA_i = \left|\overrightarrow{BA_i}\right| = \left|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB}\right|$$

$$= \left|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB}\right| . \left|\overrightarrow{OA_i}\right|$$

$$\geq \left(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OA_i} = OA_i^2 - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} BA_i \geq n - \overrightarrow{OB}.\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}}_{\vec{0}} = n$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA_i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA_i}, \ \forall i = 1, 2, \dots, n$

$\Leftrightarrow B \equiv O$

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử:

$$BA_1 \leq BA_2 \leq \dots \leq BA_n$$

Áp dụng bất đẳng thức Trebưsep cho hai dãy đơn điệu tăng:

$$\begin{cases} BA_1 \leq BA_2 \leq \dots \leq BA_n \\ BA_1^3 \leq BA_2^3 \leq \dots \leq BA_n^3 \end{cases}$$

Ta được bất đẳng thức:

$$\left(BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n\right)\left(BA_1^3 + BA_2^3 + \dots + BA_n^3\right)$$

$$\leq n\left(BA_1^4 + BA_2^4 + \dots + BA_n^4\right) \quad \Rightarrow \quad Q \leq 1$$

$$\text{Dấu } " = " \Leftrightarrow \begin{cases} BA_1 = BA_2 = \cdots = BA_n \\ B \equiv O \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B \equiv O$$

Vậy Max $Q = 1$

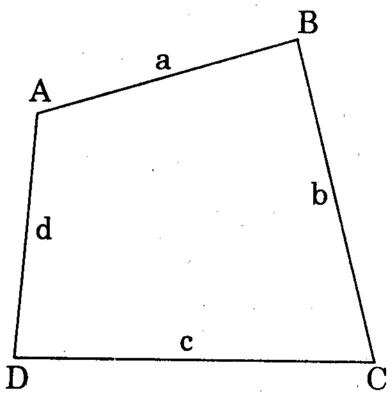
Bài 14

Trong tất cả các tứ giác lồi ABCD có chu vi bằng 1, tìm tứ giác sao cho biểu thức:

$$D = \frac{AB^4}{(AB + BC)^2 \sin B} + \frac{BC^4}{(BC + CD)^2 \sin C}$$
$$+ \frac{CD^4}{(CD + DA)^2 \sin D} + \frac{DA^4}{(DA + AB)^2 \sin A}$$

đạt giá trị nhỏ nhất

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Đặt

$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$

$$S = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a}$$

$$\text{Do } \frac{a^2 - b^2}{a+b} + \frac{b^2 - c^2}{b+c} + \frac{c^2 - d^2}{c+d} + \frac{d^2 - a^2}{d+a} = 0$$

$$\Rightarrow 2.S = \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + d^2}{c+d} + \frac{d^2 + a^2}{d+a}$$

$$\geq \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(c-d) + \frac{1}{2}(d+a) = 1$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{2}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow$ $a = b = c = d = \frac{1}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$\frac{1}{4} \le S^2 \le 4\left[\frac{a^4}{(a+b)^2} + \frac{b^4}{(b+c)^2} + \frac{c^4}{(c+d)^2} + \frac{d^4}{(d+a)^2}\right] \le 4p$$

$$\Rightarrow \quad p \ge \frac{1}{16}$$

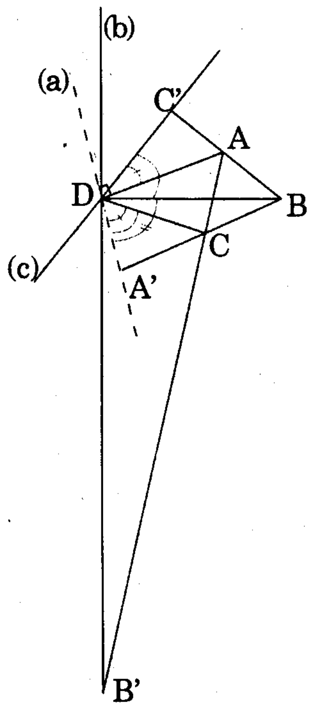
Dấu " = " $\Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông cạnh bằng $\frac{1}{4}$

Vậy: Min $p = \frac{1}{16}$ (khi ABCD là hình vuông cạnh bằng $\frac{1}{4}$)

Bài 15

Qua đỉnh D của tứ giác lồi ABCD kẻ các đường thẳng a, b, c lần lượt vuông góc với DA, DB, DC. Gọi $A' = a \cap BC$, $B' = b \cap CA$, $C' = c \cap AB$. Chứng minh rằng: A', B', C' thẳng hàng.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{A'DB} = \pi - \widehat{ADB'} \\ \widehat{A'DC} = \widehat{ADC'} \\ \widehat{B'DC} = \widehat{BDC'} \end{cases}$$

Áp dụng định lý hàm số sin cho các tam giác A'DB, A'DC, B'DA, B'DC, C'DA, C'DB. Ta có:

$$\frac{A'B}{DB} = \frac{\sin\widehat{A'DB}}{\sin\widehat{DA'B}} \quad (1)$$

$$\frac{DC}{A'C} = \frac{\sin\widehat{DA'C}}{\sin\widehat{A'DC}} \quad (2)$$

$$\frac{B'C}{DC} = \frac{\sin\widehat{B'DC}}{\sin\widehat{DB'C}} \quad (3)$$

$$\frac{DA}{B'A} = \frac{\sin\widehat{DB'A}}{\sin\widehat{B'DA}} \quad (4)$$

$$\frac{C'A}{DA} = \frac{\sin\widehat{C'DA}}{\sin\widehat{DC'A}} \quad (5)$$

$$\frac{DB}{C'B} = \frac{\sin\widehat{DC'B}}{\sin\widehat{C'DB}} \quad (6)$$

Nhân từng vế các đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = \frac{\sin\widehat{DA'C}}{\sin\widehat{DA'B}}.\frac{\sin\widehat{DB'A}}{\sin\widehat{DB'C}}.\frac{\sin\widehat{DC'B}}{\sin\widehat{DC'A}}$$

$$= 1$$

Vậy theo định lý Menelaus áp dụng cho ΔABC ta có A', B', C' thẳng hàng

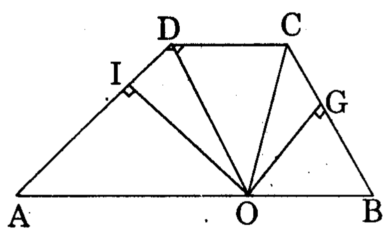
Bài 16

Cho một đường tròn tâm ở trên cạnh AB của một tứ giác lồi ABCD và tiếp xúc với ba cạnh còn lại. Chứng minh rằng:

Nếu tứ giác ABCD nội tiếp thì $AD + BC = AB$.

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế (tại Anh)

GIẢI



Gọi O là tâm đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tứ giác ABCD, r là bán kính của nó, G và I là chân các đường vuông góc hạ từ O theo thứ tự xuống BC, DA (xem hình vẽ). Khi đó:

$$BG = r.\cot gB \;,\quad CG = r.\cot g\frac{C}{2}$$

$$AI = r.\text{cotg}A \quad , \quad DI = r.\text{cotg}\frac{D}{2}$$

$$OB = \frac{r}{\sin B} \quad , \quad OA = \frac{r}{\sin A}$$

Do tứ giác ABCD nội tiếp

$$\Rightarrow A + C = B + D = \pi$$

Nên $\dfrac{1 - \cos A}{\sin A} = \text{tg}\dfrac{A}{2} = \text{cotg}\dfrac{C}{2}$

$$\frac{1 - \cos B}{\sin B} = \text{tg}\frac{B}{2} = \text{cotg}\frac{D}{2}$$

Suy ra:

$$AD + BC = AI + ID + CG + GB$$

$$= r\left(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}\frac{C}{2} + \text{cotg}\frac{D}{2}\right)$$

$$= r\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{1 - \cos A}{\sin A} + \frac{1 - \cos B}{\sin B}\right)$$

$$= r\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}\right)$$

$$= OA + OB = AB$$

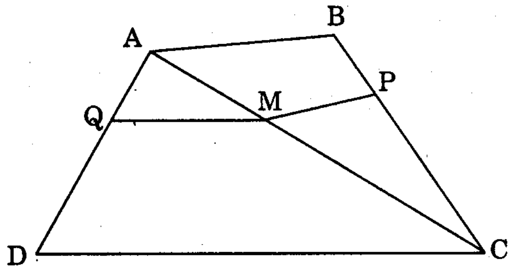
Bài 17

Cho tứ giác lồi ABCD. $M \in AC$, $P \in BC$, $Q \in AD$, $MP \parallel AB$, $MQ \parallel CD$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{MP^2 + MQ^2} \leq \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}$$

(Tạp chí " Toán Học và Tuổi Trẻ")

GIẢI



Theo định lý Talet:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{MQ}{CD} = \dfrac{AM}{AC} \\ \dfrac{MP}{AB} = \dfrac{MC}{AC} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{MQ}{CD} + \frac{MP}{AB} = 1$$

Vì vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$1 = \left(\frac{MQ}{CD} + \frac{MP}{AB}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}\right)\left(MP^2 + MQ^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{MP^2 + MQ^2} \leq \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{AB}}{MP} = \dfrac{\frac{1}{CD}}{MQ}$

$\Leftrightarrow MP.AB = CQ.CD$

Cùng với $\dfrac{MQ}{CD} + \dfrac{MP}{AB} = 1$

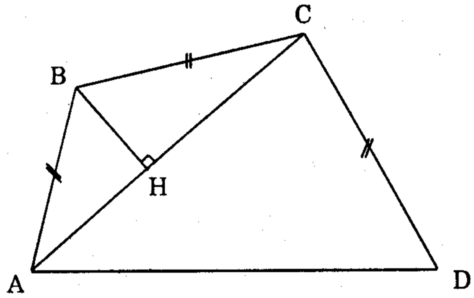
Ta tính được $CM = \dfrac{CD^2.CA}{AB^2 + CD^2}$

Bài 18

Cho tứ giác lồi ABCD có ba cạnh AB = BC = CD = a.
Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} \leq \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

GIẢI



Đặt:

$\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ACD} = \beta$

Khi đó:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}$$

$$= \frac{1}{2}AC.BH + \frac{1}{2}AC.CD.\sin\beta$$

$$\leq BH.AH + AH.CD$$

$$\leq a\sin\alpha.a\cos\alpha + a^2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow S^2_{ABCD} \leq a^4\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)^2$$

$$\leq \frac{1}{3}a^4(3-3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$$

$$\leq \frac{1}{3}a^4\left(\frac{3-3\sin\alpha+1+\sin\alpha+1+\sin\alpha+1+\sin\alpha}{4}\right)^4$$

(Do BĐT Cauchy)

$$\Rightarrow S^2_{ABCD} \leq \frac{a^4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} \leq \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 30^\circ\\ 3-3\sin\alpha = 1+\sin\alpha\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 90^\circ\\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 30^\circ\\ \beta = 90^\circ\end{cases}$

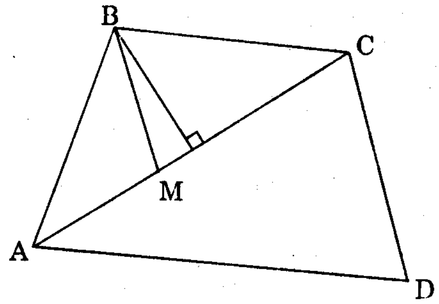
$\Leftrightarrow$ ABCD là nửa lục giác đều cạnh a

Bài 19

Cho tứ giác lồi ABCD chỉ có một cạnh >1. Gọi S là diện tích của tứ giác. Chứng minh rằng:

$$S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

GIẢI



Giả sử AD > 1.

Như vậy AB, BC, CD ≤ 1.

Đặt a = AC

($\Rightarrow$ $0 < a = AC < AB + BC \le 2$

$\Rightarrow$ $0 < a < 2$)

Gọi M là trung điểm cạnh AC.

Ta có: $2BM^2 + \frac{AC^2}{2} = AB^2 + BC^2 \le 2$

$$\Rightarrow BM^2 \le \frac{1}{2}\left(2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow BM \le \frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC.BH$$

$$\le \frac{1}{2}a.BM$$

$$\le \frac{a}{4}\sqrt{4-a^2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} \le \frac{a}{4}\sqrt{4-a^2}$$

Hơn nữa:

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}AC.CD.\sin\widehat{ACD} \le \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}$$

$$\le \frac{a}{4}\sqrt{4-a^2} + \frac{a}{2}$$

$$\le \frac{a}{4}\left(2+\sqrt{4-a^2}\right)$$

$$\Rightarrow S \le \frac{a}{4}\left(1.1+1.1+1\sqrt{4-a^2}\right)$$

(Do BĐT Bunhiacopski)

$$\le \frac{a}{4}\sqrt{3}\,.\sqrt{1^2+1^2+4-a^2}$$

$$\le \frac{a}{4}\sqrt{3}.\sqrt{6-a^2}$$

$$\le \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2+6-a^2}{2}$$

$$\le \frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad \textit{(Do BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \begin{cases} AB = BC = CD = 1 \\ AC \perp CD \\ B = \sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ABCD là nửa lục giác đều cạnh bằng 1

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho ABCD là tứ giác lồi vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp. Gọi S và p tương ứng là diện tích và nửa chu vi của tứ giác. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{p^2}{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{D}{2}}$$

2. Cho tứ giác lồi ABCD. M và N tương ứng là trung điểm AD và BC. Đường thẳng CM và DN cắt nhau ở E, còn BM và AN cắt nhau tại F. Chứng minh rằng:

$$\frac{AF}{FN} + \frac{BF}{FM} + \frac{CE}{BM} + \frac{DE}{EN} \geq 4$$

3. Cho đa giác đều n cạnh $A_1, A_2, ..., A_n$ nội tiếp đường tròn có bán kính bằng 1. Lấy điểm M trên cung nhỏ $\overset{\frown}{A_1A_n}$.

Chứng minh rằng:

a) $MA_1 + MA_3 + \cdots + MA_{n-2} + MA_n < \frac{n}{\sqrt{2}}$

b) $MA_1 + MA_3 + \cdots + MA_{n-3} + MA_{n-1} \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$ nếu n chẵn

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

4. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 1. Điểm M và N lần lượt di động trên AD và CD sao cho $\widehat{MBN} = 45°$.

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2} - 1 \leq S_{\Delta BMN} \leq \frac{1}{2}$$

5. Một tứ giác lồi ABCD có các tính chất sau:

a) $AB = AD + BC$

b) Có một điểm P bên trong tứ giác cách đường thẳng CD một khoảng h sao cho: $AP = h + AD$, $BP = h + BC$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

6. Cho ABCDEF là một lục giác lồi có $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ và $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60^\circ$. Cho G và H là hai điểm nằm bên trong lục giác sao cho $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^\circ$. Chứng minh rằng:

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

7. Xét các tứ giác lồi có các cạnh là a, b, c, d thỏa mãn điều kiện:

$$\text{Max}\{ab + cd, ac + bd, ad + ba\} = 2$$

Tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

8. Trên đường thẳng cho bốn điểm phân biệt theo thứ tự A, B, C, D. E là điểm bất kỳ nằm ngoài đường thẳng. Chứng minh rằng:

$$AE + ED + |AB - CD| > BE + CE$$