

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH
DẠNG 8: TÍNH TỔNG CÙNG CƠ SỞ

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ, năm 2021 - 2022)

Cho $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S : 2^{2022}$.
B. $S + 1$ là số chính phương.
C. $(S + 1) : 2^{2022}$.
D. $S = 2^{2023} + 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$

$$2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023}$$

$$\Rightarrow 2S - S = S = (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022})$$

$$\Rightarrow S = 2^{2023} - 1$$

Câu 2. (HSG 7 Huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Giá trị biểu thức $\frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31}$ là:

- A. $\frac{26}{150}$.
B. $\frac{150}{26}$.
C. $\frac{31}{150}$.
D. $\frac{150}{31}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31} = \frac{5.5}{1.6} + \frac{5.5}{6.11} + \dots + \frac{5.5}{26.31} = 5 \cdot \left(\frac{5}{1.6} + \frac{5}{6.11} + \dots + \frac{5}{26.31} \right) \\ & = 5 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{26} - \frac{1}{31} \right) = 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{31} \right) = 5 \cdot \frac{30}{31} = \frac{150}{31} \end{aligned}$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Thống Nhất 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $B = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{100}$

Lời giải

$$2^2.B = 2^2.(1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{100})$$

Ta có:

$$4.B = 2^2.1 + 2^2.2^2 + 2^2.2^4 + \dots + 2^2.2^{100}$$

$$4.B = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{102}$$

$$4.B - B = (2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{102}) - (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{100})$$

Khi đó:

$$3.B = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{102} - 1 - 2^2 - 2^4 - \dots - 2^{100}$$

$$B = \frac{2^{102} - 1}{3}$$

$$B = \frac{2^{102} - 1}{3}$$

Vậy

Câu 2. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

$$S = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2023}$$

Tính giá trị các biểu thức bằng cách hợp lý:

Lời giải

$$S = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2023}$$

$$S = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} - \dots - \frac{1}{7^{2023}}$$

$$7S = 7 - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \dots - \frac{1}{7^{2022}}$$

$$8S = 7 - \frac{1}{7^{2023}} \Rightarrow S = \frac{7^{2024} - 1}{8 \cdot 7^{2023}}$$

$$S = \frac{7^{2024} - 1}{8 \cdot 7^{2023}}$$

Vậy

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Minh Khai 2022 - 2023)

$$B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}$$

Rút gọn :

Lời giải

$$(-5)B = (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018}$$

$$B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}$$

$$(-5)B - B = (-6)B = (-5)^{2018} - 1$$

Do đó:

$$B = \frac{(-5)^{2018} - 1}{-4} = \frac{1 - 5^{2018}}{4}$$

Vậy

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Trì, 2021 - 2022)

$$A = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - \dots + 3^{2022} - \frac{3^{2023}}{4}$$

Thực hiện phép tính:

Lời giải

$$\text{Đặt } B = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - \dots + 3^{2022}$$

$$\text{Ta có: } 3B = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 - \dots - 3^{2022} + 3^{2023}$$

Cộng từng vế ta có

$$4B=1+3^{2023} \text{ nên } B=\frac{1+3^{2023}}{4} \text{ . Ta lại có } A=B-\frac{3^{2023}}{4} \text{ suy ra } A=\frac{1}{4} \text{ . Vậy } A=\frac{1}{4}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Bá Thước, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $C=3^{100}-3^{99}+3^{98}-3^{97}+\dots+3^2-3$

Lời giải

Ta có: $C=3^{100}-3^{99}+3^{98}-3^{97}+\dots+3^2-3$

$$3C=3^{101}-3^{100}+3^{99}-3^{98}+\dots+3^3-3^2$$

$$4C=3^{101}-3 \Rightarrow C=\frac{3^{101}-3}{4}$$

$$C=\frac{3^{101}-3}{4}$$

Vậy

Câu 6. (HSG 7 trường Điện Hồng huyện Thanh Oai 2018 - 2019)

$$B=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^{50}}-\frac{1}{3^{51}}$$

Tính :

Lời giải

$$B=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^{50}}-\frac{1}{3^{51}}$$

$$=\frac{1}{(-3)}+\frac{1}{(-3)^2}+\frac{1}{(-3)^3}+\dots+\frac{1}{(-3)^{50}}+\frac{1}{(-3)^{51}}$$

$$-\frac{1}{3}B=\frac{1}{(-3)^2}+\frac{1}{(-3)^3}+\dots+\frac{1}{(-3)^{51}}+\frac{1}{(-3)^{52}}$$

$$\frac{4}{3}B=\frac{1}{-3}-\frac{1}{(-3)^{52}}=\frac{-3^{51}-1}{3^{52}}$$

Suy ra,

$$B=\frac{-3^{51}-1}{4.3^{51}}$$

Câu 7. (HSG 7 Võ Thị Sáu năm 2022-2023)

$$\text{Cho } A=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\dots+\frac{2022}{4^{2022}} \text{ . Chứng minh rằng: } A<\frac{1}{2} \text{ .}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\dots+\frac{2022}{4^{2022}}$$

$$4A=1+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{4}{4^3}+\dots+\frac{2022}{4^{2021}}$$

$$4A-A=\left(1+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{4}{4^3}+\dots+\frac{2022}{4^{2021}}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\dots+\frac{2022}{4^{2022}}\right)$$

$$3A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{1}{3} \left(4 - \frac{1}{4^{2021}} \right) - \frac{2022}{4^{2022}}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Hiệp Đức; huyện Bến Lức 2018 - 2019)

Rút gọn : $B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}$

Lời giải

Ta có: $B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}$

$$(-5)B = (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018}$$

$$B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}$$

$$(-5)B - B = -6B = (-5)^{2018} - 1$$

Do đó:

$$\Rightarrow B = \frac{1 - 5^{2018}}{6}$$

Câu 9. (HSG 7 huyện 2022 - 2023; trường Hiệp Thành, Duyên Hải 2016 - 2017)

Tính $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$

Lời giải

$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$$

Ta có:

$$\Rightarrow 5A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51}$$

$$\Rightarrow 5A - A = (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51}) - (1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50})$$

$$\Rightarrow 4A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51} - 1 - 5 - 5^2 - 5^3 - \dots - 5^{49} - 5^{50}$$

$$\Rightarrow 4A = 5^{51} - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{5^{51} - 1}{4}$$

Câu 10. (HSG 7 thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)

Rút gọn $A = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{2011}$

Lời giải

$$A = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{2011} \quad (1)$$

$$5A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2012} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế ta được $5A - A = 5^{2012} - 1$

$$4A = 5^{2012} - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{5^{2012} - 1}{4}$$

Câu 11. (HSG 7 huyện 2018 - 2019)

Tính $S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$

Lời giải

$$S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$$

$$2S = 2^{101} - 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 - 2^2$$

$$2S + S = 2^{101} - 2$$

$$3S = 2^{101} - 2$$

$$\Rightarrow S = \frac{2^{101} - 2}{3}$$

Câu 12. (HSG 7 Quận Hà Đông năm 2022-2023; huyện Quế Sơn; huyện Việt Yên 2018 - 2019; huyện Kim Sơn 2017 - 2018)

Tính $S = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$

Lời giải

$$S = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$$

$$S = 2^{2010} - (2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2 + 1)$$

Đặt $A = 2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2^2 + 2 + 1$

$$2A - A = 2(2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2 + 1) - (2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2 + 1)$$

$$A = 2^{2010} + 2^{2009} + \dots + 2^2 + 2 - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1 = 2^{2010} - 1$$

$$S = 2^{2010} - (2^{2010} - 1) = 1$$

Do đó

Vậy $S = 1$

Câu 13. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

Tính: $B = 2^{2022} - 2^{2021} - 2^{2020} - \dots - 2 - 1$

Lời giải

$$S = 2^{2022} - 2^{2021} - 2^{2020} - \dots - 2 - 1$$

$$S = 2^{2022} - (2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2 + 1)$$

Đặt $P = 2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2 + 1$

$$2P = 2^{2022} + 2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2$$

$$2P - P = (2^{2022} + 2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2) - (2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2 + 1)$$

$$2P - P = 2^{2022} - 1$$

$$P = 2^{2022} - 1$$

$$S = 2^{2022} - (2^{2022} - 1) = 1$$

Do đó:

$$\text{Vậy } S = 1$$

Câu 14. (HSG 7 trường THCS Lý Thường Kiệt, 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Lời giải

Đặt $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ (có 100 số hạng)

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots$$

$$+ (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100})$$

(có 20 nhóm)

$$D = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$D = 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31$$

$$D = 31 \cdot (2 + 2^6 + \dots + 2^{96})$$

chia hết cho 31

Vậy $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Câu 15. (HSG 7 huyện Mỹ Cày, 2017 - 2018)

Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$2B = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right)$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Rightarrow 2B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2B = B + 2 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Vậy

Câu 16. (HSG 7 huyện Tân An, 2017 - 2018)

Chứng tỏ rằng: $M = 75 \cdot (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Lời giải

$$\begin{aligned}
 M &= 75 \cdot (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\
 &= 25 \cdot (4 - 1)(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\
 &= 25 \cdot [4(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1)] + 25 \\
 &= 25 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) - 25(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\
 &= 25 \cdot 4^{2018} - 25 + 25 \\
 &= 25 \cdot 4^{2018} = 25 \cdot 4 \cdot 4^{2017} = 100 \cdot 4^{2017} : 100
 \end{aligned}$$

Vậy $M : 10^2$.

Câu 17. (HSG 7 cấp huyện 2017 - 2018)

Tính $A = 1 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{100}{2^{100}}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{100}{2^{100}} \\
 \Rightarrow 2A &= 2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{100}{2^{99}} \\
 2A - A &= \left(2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{100}{2^{99}} \right) - \left(1 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{100}{2^{100}} \right) \\
 &= \left(2 + \frac{3}{2^2} - 1 \right) + \left(\frac{4}{2^3} - \frac{3}{2^3} \right) + \left(\frac{5}{2^4} - \frac{4}{2^4} \right) + \dots + \left(\frac{100}{2^{99}} - \frac{99}{2^{99}} \right) - \frac{100}{2^{100}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}} \\
 &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2^{99}} \right) - \frac{100}{2^{100}} \\
 &= 2 - \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}} = 2 - \frac{102}{2^{100}}
 \end{aligned}$$

Câu 18. (HSG 7 trường Đức Thắng, Hiệp Hòa 2016 - 2017)

Cho $H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$. Tính 2010^H .

Lời giải

Ta có: $H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$

Nên $2H = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2009} - \dots - 2^2 - 2$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 2H - H &= 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2010} - 2^{2009} + 2^{2009} + \dots - 2^2 + 2^2 - 2 + 2 - 1 \\
 H &= 2^{2011} - 2 \cdot 2^{2010} + 1 = 1 \\
 \Rightarrow 2010^H &= 2010
 \end{aligned}$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Cho biểu thức $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Tính $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$.

Lời giải

Ta có :

$$A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$3A = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$A + 3A = -1 + \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \cdot \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow A < 0 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$B = 4 \cdot |A| + \frac{1}{3^{100}} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

Câu 20. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà 2022 - 2023)

$$M = \left(\frac{-3}{2} \right)^2 + \left(\frac{-3}{2} \right)^3 + \left(\frac{-3}{2} \right)^4 + \left(\frac{-3}{2} \right)^5 + \dots + \left(\frac{-3}{2} \right)^{100}$$

Tính

Lời giải

$$M = \left(\frac{-3}{2} \right)^2 + \left(\frac{-3}{2} \right)^3 + \left(\frac{-3}{2} \right)^4 + \left(\frac{-3}{2} \right)^5 + \dots + \left(\frac{-3}{2} \right)^{100}$$

Ta có:

$$\frac{-3}{2}M = \left(\frac{-3}{2} \right)^3 + \left(\frac{-3}{2} \right)^4 + \left(\frac{-3}{2} \right)^5 + \dots + \left(\frac{-3}{2} \right)^{100} + \left(\frac{-3}{2} \right)^{101}$$

$$M - \frac{-3}{2}M = \left[\left(\frac{-3}{2} \right)^2 + \left(\frac{-3}{2} \right)^3 + \left(\frac{-3}{2} \right)^4 + \dots + \left(\frac{-3}{2} \right)^{100} \right] - \left[\left(\frac{-3}{2} \right)^3 + \left(\frac{-3}{2} \right)^4 + \dots + \left(\frac{-3}{2} \right)^{100} + \left(\frac{-3}{2} \right)^{101} \right]$$

$$\frac{5}{2}M = \left(\frac{-3}{2} \right)^2 - \left(\frac{-3}{2} \right)^{101}$$

$$M = \frac{-27}{10} + \frac{5 \cdot (3)^{101}}{2^{100}}$$

$$M = \frac{-27}{10} + \frac{5 \cdot (3)^{101}}{2^{100}}$$

Vậy

Câu 21. (HSG 7 huyện Văn Lâm 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2023}}$.

Lời giải

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2023}}$$

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2023}}$$

Đặt

$$\Rightarrow \frac{1}{4}A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{2024}}$$

$$A - \frac{1}{4}A = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2023}} \right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{2024}} \right)$$

$$\frac{3}{4}A = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^{2024}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{4^{2023} - 1}{3 \cdot 4^{2023}}$$

Câu 22. (HSG 7 Triệu Sơn năm 2022-2023)

$$B = 1 - \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \dots - \left(\frac{3}{4}\right)^{2023} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2024}$$

Thực hiện các phép tính:

Lời giải

$$B = 1 - \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \dots - \left(\frac{3}{4}\right)^{2023} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}B = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{2023} - \left(\frac{3}{4}\right)^{2024} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}$$

$$\Rightarrow B + \frac{3}{4}B = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{3}{4}\right)B = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}B = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}$$

$$\Rightarrow B = \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}\right] : \frac{7}{4} = \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}\right] \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} + \frac{3^{2025}}{4^{2024} \cdot 7}$$

Câu 23. (HSG Hưng Hà 2022-2023)

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{36}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

$$A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}}$$

Đặt

$$\Rightarrow 5A = 1 - \frac{2}{5^1} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \frac{5}{5^4} - \dots + \frac{2021}{5^{2020}} - \frac{2022}{5^{2021}}$$

$$\Rightarrow 5A + A = 6A = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \dots - \frac{1}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2021}}$$

$$P = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} + \dots - \frac{1}{5^{2021}}$$

Đặt

$$\Rightarrow 5P = 5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \dots - \frac{1}{5^{2020}}$$

$$\Rightarrow 6P = 5 - \frac{1}{5^{2021}} \Rightarrow P = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}}$$

$$\Rightarrow 6A = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow A < \frac{5}{36}$$

Câu 24. (HSG 7 Vĩnh Yên năm 2022-2023)

a) Tính: $S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$

b) Chứng tỏ: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$

Lời giải

a) Ta có: $S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$

$$2S = 2^{101} - 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 - 2^2$$

$$3S = 2^{101} - 2 \Rightarrow S = \frac{2^{101} - 2}{3}$$

b) Đặt $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}}$

$$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{2018}}$$

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}}$$

Suy ra:

$$M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}}$$

Đặt

$$\Rightarrow 3M = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$$

$$\Rightarrow 2M = 1 - \frac{1}{3^{2018}} < 1 \Rightarrow M < \frac{1}{2}$$

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}} = 1 + M - \frac{2019}{3^{2019}} < 1 + M < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Ta có:

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>